物理学選書 9

山内恭彦・菊池正士・小谷正雄 編集

素粒子物理学

東北大学教授
理学博士
武田　暁

東京大学教授
理学博士
宮沢弘成

共著

東京　裳華房　発行

Physics of Elementary Particles

by

Gyo Takeda, D. Sc.

and

Hironari Miyazawa, D. Sc.

—1 9 7 0—

(4th edition)

SYOKABŌ

TOKYO

序　　文

私共が学生の頃は素粒子として知られていたのは陽子・中性子・電子とπ中間子・μ中間子・ニュートリノ，それに光子の7種類で，いま振り返って考えると素粒子物理学の揺籃期であった．その頃にはすでにHeisenberg–Pauliの場の理論・中間子に対する湯川理論等があって，これら素粒子を記述するのにこと欠かなかったが，場の理論自身のもつ矛盾をいかにして解くか等の難問題が当面の問題で，場の理論＝素粒子物理学という感のあった時代であった．そんなわけで素粒子論ということばが使われて，素粒子物理学ということばはほとんど耳にしなかったように思われる．

その後，画期的に実験が進歩して，多数の素粒子が発見され，また反陽子の存在・パリティ非保存の実験・各種の保存則の存在等の重要な発見がなされると，場の理論＝素粒子物理学という傾向は変化して実験が理論を刺激し修正し，また理論が次の実験を刺激するという物理学らしい状態になり，理論の発展と素粒子世界との実際がより密接な関係になってきた．本書の題名を“素粒子論”とせずに“素粒子物理学”としたのは，素粒子物理学を記述する場の理論の体系的記述よりも，むしろ理論の基礎づけを与えている少数の重要な実験事実を明らかにし，どのような概念が理論体系の中にとり入れられねばならないかを論ずるのに主眼をおきたいからである．

裳華房から学生の教科書としての本書の執筆をお受けしたのは約4年前であった．著者達の一人が東京に，一人が仙台に住むための連絡の不備，またそれぞれに忙しい雑事と研究をかかえて延々4年の歳月を費すことになってしまった．初めの間は何とかやさしく書けるだろうと思っていた甘い考えは月日がたつにつれくづれて来て，章を重ねる毎に書き直したり筆を措くことが多くなり，素粒子物理学の難しさと私共の不勉強を身にしみて感じてきた．そんなわけで書き上った原稿をながめるとなお意にみたぬ点が多いのと同時に，長い間私共をいじめてきたこの本にひそかな愛着を感ずるしだいである．

最近素粒子についての本は内外で数多く出版され，多くの名著が書かれてい

る．それらの多くは非常に難しく，またあるものは研究者向きであり，あるものは素粒子論に重点がおかれ，あるものには確かな事実と不確かな事実が共に書かれ，必ずしも教科書として適当なものは多くない．急速に進歩しつつあるこの分野で本書のような教科書の果す役割には多くの制限があるけれども，読者が素粒子物理学に理解と興味をもたれる一助となれば幸いである．

本書の執筆にあたって私共は特にいくつかの点に気を使った．第一になるべく素粒子の本を手許におかないようにした．第二に $\hbar$, c 等を省略しないで書き，いろいろな物理量の次元をはっきりさせておいた．第三に理論物理専攻の人々だけでなく実験物理専攻の人々にも読んでいただくことを意識して書いた．

本書の付録の電磁気の単位については高橋秀俊先生の“電磁気学”（物理学選書3）の付録を参照し，また一部借用させていただいた．また三浦功・菅浩一・俣野恒夫氏の“放射線計測学”（物理学選書7）の付録の表 3, 6 を借用させていただいた．厚く御礼を申し上げるしだいである．

最後になって申訳ないけれども，本書の刊行には終始裳華房の遠藤恭平氏のお世話になった．私共が自分自身気づかなかった程怠けものであることを発見したのは執筆を始めてまもなくであったが，その後4年間手綱をひきしめもゆるめもせずに終始大人の風格をもって我々をゴールまで引張ってこられたのには全く頭の下がる思いである．

昭和40年1月10日

著　　者

目　次

第8章 荷電粒子と電磁場の相互作用

第9章 素粒子間の相互作用と *S*－行列

第10章 核子と中間子

第11章 ハイパロンと *K* 中間子

第12章 弱い相互作用

付　　録

第1章 素　粒　子

物理学の発展における大きな流れの一つは，物質の究極の構成要素を探り，その個々の持つ性質を調べ，またそれら構成要素が集まった時にそれら相互の間に働く力を調べて，いろいろな物質が構成されていくようすを理解することといえよう．われわれが日常見聞する物質はその性質，形状等きわめて多種多様であるけれども，それらは水素，ヘリウム，リチウムというぐあいにメンデレーフの周期律表（付録 A 7）に並べられた約100種類の元素の集合体であることが知られている．さらにそれぞれの元素は原子といわれている最小の単位の集まりであり，たとえば水素ガスは2個の水素原子からなる水素分子の集合として理解される．さらに原子は原子核といわれる中心のまわりに幾個かの電子がまわっている集合体で，それぞれの元素に応じてそれぞれ異なる**原子核**がある．これら原子核はさらに**陽子**（proton）と**中性子**（neutron）の集合体で，異なる原子核は結合している陽子，中性子の数の違いによるものである．

原子核と電子の集まりの結合するようすはきわめて多種多様であり，気体，液体，固体，プラズマ状態でそれぞれ非常に異なっている．また陽子と中性子が集まって原子核を作るようすもきわめて複雑で，これらを扱う原子核理論を定量的に理解できる段階迄にはまだ多くの研究を必要とするだろう．しかしながら物質を陽子，中性子，電子を基本的構成要素として一応理解できるようになったのは，中性子の発見（1932年 Chadwick）直後まで遡ることができる．

その後，初めは宇宙線の中に，後に人工高エネルギー加速器を用いて作られた粒子の中に，陽子，中性子，電子と同程度に基本的と考えられる粒子が次々と見つかってきた．通常，素粒子といわれているこれらの粒子はその性質と共にこの章の最後に表にしておこう（1-2 表）．これらは総数32におよびまた今後新たに発見されるかもしれない．物質の基本的構成粒子，素粒子という概念は今の所きわめてあいまいのもので，多くの素粒子は不安定で或る時間がたつと自然に崩壊してより軽い2個以上の別の素粒子に転化したり，外から十分なエネルギーを与えれば自分自身より重い素粒子に転化することもできる．また，今日知られている素粒子は将来より基本的な物質により理解されるようになるかもしれないし，素粒子の中のあるものは他の素粒子に比べてより基本的であるかもしれない．

さて，日常の巨視的（マクロ）な世界での物理現象と，原子，素粒子のような微視的（ミクロ）な世界での現象では，エネルギーや時間のスケールが非常に異なっている．これら

の違いを表にして見ると次のようなものである．

1-1 表　いろいろな世界での長さ，時間，質量のスケール

	素粒子	原子	日常の世界	宇宙
長さ	$\sim 10^{-13}$ cm （陽子の拡がりの半径）	$10^{-7}\sim 10^{-8}$ cm （いろいろな原子の拡がりの半径）	1 cm	$\sim 5\times 10^{22}$ cm （銀河系の半径）
時間	$\sim 10^{-23}$ sec （素粒子間の衝突の起こる時間）	$\sim 10^{-16}$ sec （水素原子中の電子の運動の周期）	1 sec	$\sim 1.5\times 10^{12}$ sec （銀河系を光が横ぎる時間）
質量	$\sim 2\times 10^{-24}$ gr （陽子の質量）	$\sim 2\times 10^{-24}$ gr （水素原子の質量）	1 gr	$\sim 10^{44}$ gr （銀河系の質量）

われわれのマクロの世界で起こる日常の現象は，Newton 力学（古典物理学）の法則で大部分よく記述されるが，原子や素粒子の世界のように非常にスケールの違う世界では，必ずしもマクロの世界で成立した古典物理学の法則がそのまま成立しているとは限らない．19 世紀末から今世紀の初めにかけての研究は，原子の世界でのいろいろ特異な現象をあばき出し，量子力学の誕生となった．それでは原子よりさらに小さな素粒子の世界での物理法則はいかなるものであろうか．素粒子の世界での多くの現象は量子力学に基づいて定性的によく説明されるが，原子の世界では見られなかった特異な現象も数多く存在し，今日**場の理論**といわれる一つの理論体系が作られている．

原子の世界を記述する量子力学はそれを無数の原子の集合体であるマクロの物質に用いると，古典力学の法則が非常によい近似で得られることが示される．したがって日常世界のマクロな現象では，量子力学が成立しているにもかかわらず，より簡単な古典力学を用いて論ずることができる．同様に場の理論を原子の世界に用いるとどうであろうか．原子の世界での物理現象では，素粒子自身の大きさが原子の拡がりに比べてはるかに小さいので，素粒子は大きさや構造のない単なる質点と考えてよい．また現象に関係するエネルギーも小さく，粒子の速度は光速度に比べて非常に小さいので相対論的効果を無視できる．またいろいろな現象に伴うエネルギーの変化は素粒子の質量エネルギーに比べはるかに小さく，素粒子間の転換は起こらない．ただ，素粒子相互の結びつきのようすが変るだけである．このような条件の下では場の理論は近似的に量子力学に移ることを示すことができる．しかしながら場の理論はそれ自身不完全なので，いろいろな角度からより完全な素粒子の理論の研究が進められている．

この本では，われわれは個々の素粒子の性質やそれらのしたがう法則性，素粒子 2 個の衝突現象等，小数個の素粒子からなる系を対象にして話をすすめる．われわれのまわりの

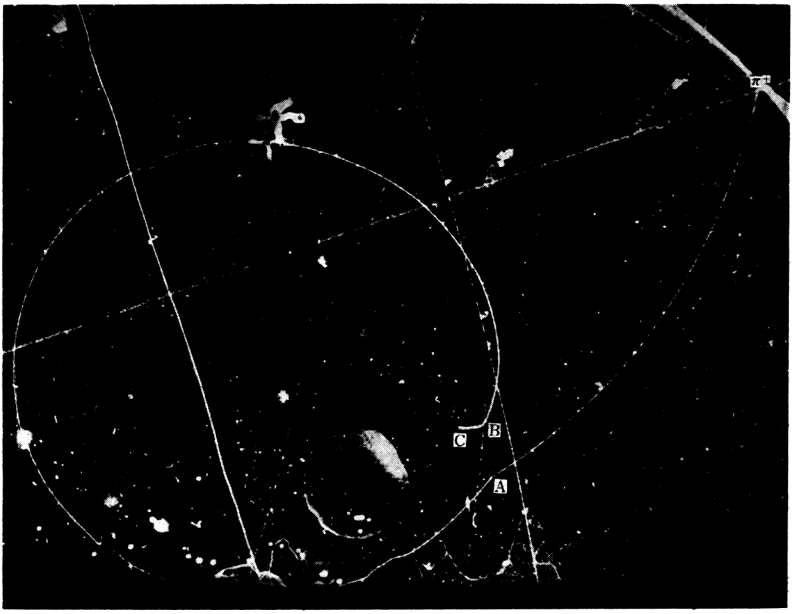
マクロの世界の現象では，エネルギー，運動量，荷電のように，いろいろな現象の起こった前後でその総量の不変の量が存在する．これらはエネルギー保存則，運動量保存則，荷電の保存則として古典物理学で非常に重要な役割を果してきた．同様に素粒子相互間の衝突や素粒子の崩壊等の素粒子世界での現象でもいくつかの保存則が確かめられ，これらは素粒子を支配する法則を理解する鍵を与えている．また素粒子物理学において最もよく調べられている部分ということができる．素粒子物理学で成り立つエネルギー，運動量，荷電の保存則等は，ただちにマクロの世界での対応する保存則に導くが，またこの他に素粒子間の現象を調べることにより初めから明らかにされた保存則，または近似的に成立する保存則がいくつかあり，これらの議論は本書の重要な部分をしめるであろう．

素粒子の一つのいちじるしい特長は，素粒子間の衝突，または素粒子の崩壊に際して，一つの素粒子が他の素粒子に転化したり，新しい素粒子が作られたりすることである．素粒子はきわめて小さいので（$\sim 10^{-13}$ cm）これら素粒子世界での特長的な現象を手に取るように眺めるにはきわめて倍率の高い顕微鏡を必要とする．われわれの肉眼で見える物体の大きさは最小限 $10^{-1} \sim 10^{-2}$ cm 程度，倍率と分解能のよい光学レンズ系を用いると $10^{-4} \sim 10^{-5}$ cm くらいまで（電子顕微鏡を用いると 10^{-8} cm くらいまで）の大きさの物体を見分けることができるが，素粒子の大きさは，はるかにこれらの極限値より小さい．幸にもわれわれは特殊な方法を用いて肉眼または顕微鏡で見える程度の大きさの素粒子の像を作ることができ，素粒子物理学に飛躍的な発展をもたらしている．これらの主なものとして，泡箱，霧箱，原子核乾板，および放電箱等をあげることができる．

たとえば**泡箱**は沸騰点よりやや高温の状態にある液体を箱に入れ，外から圧力を加えて沸騰するのを防いでおく．外からの圧力を急に取り除くと，液体はきわめて不安定な状態になり液体中に泡を生ずるが，泡は液体中の泡を作る中心になるような“よごれ”や液体の“乱れ”がないとできにくい．もし液体中になんらかの乱れができるとそれが中心となりそのまわりに泡が発生する．さて荷電を持った素粒子が液体中を走ると液体分子中の電子をはねとばし液体は**イオン化**する（負荷電の電子と電子を失った正荷電の分子になる）．このイオン化の起こった場所は熱的な乱れを生じそのまわりに泡が発生する．したがって荷電を持った素粒子が不安定状態にある液体中を通過すると，その進路の直線上にイオンを生じ，したがって泡がその直線上に作られる．泡の大きさは肉眼で見える $10^{-2} \sim 10^{-1}$ cm 程度のもので，このようにして 10^{-13} cm の素粒子を $10^{11} \sim 10^{12}$ 倍にも拡大する顕微鏡の役をする．

1-1，1-2，1-3 図は水素の泡箱中を走る素粒子の飛跡を写真に撮ったものであるが，

これらの飛跡は単に素粒子の通過した跡を示すだけでなく，どのような素粒子が通過したか，またどの点でどのような素粒子間の衝突が行なわれたかについて重要な知識を与えてくれる．たとえば泡箱を強い磁石の両極の中間におき磁場を泡箱中に作ると，粒子の進行方向（＝電流の方向）と磁場の方向にそれぞれ垂直な方向に力が働き，荷電粒子は曲げられて磁場方向にとった軸のまわりに らせん運動する．（写真では紙面に垂直な方向に磁場が働いている）．回転方向が素粒子の荷電の正負により異なるので，これからまず荷電の符号を知ることができる．また磁場の強さが与えられている時に，磁場により曲げられる度合は運動量の大きさに逆比例するので，直線に近いものは運動量が大きく，逆に曲率半径の小さいものは運動量の小さい素粒子による飛跡である．さらにイオン対の作られる数は同一の粒子に対しその速度の関数で，速度の小さい止まりかけの粒子ほど単位長さ走る間に作るイオン対の数が多い．したがって泡の密度が大きく飛跡は濃く見える．一般に荷電粒子が泡箱中（一般に物質中）を通過する時物質中の電子をはねとばし，物質をイオン化するためにだんだんエネルギーを失う．したがってその粒子の飛跡はだんだん濃くなっていく．各点における泡の密度，すなわち飛跡の濃さからその点における粒子の速度がわかる．粒子は十分長い距離を走ると，ついには泡箱中で静止するが，その粒子の飛跡上の



1-1 図　π 中間子の崩壊

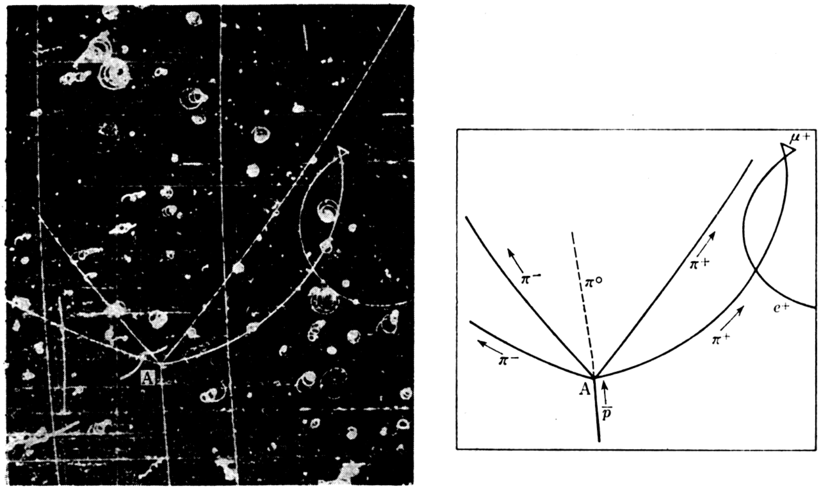
ある点において持っていた速度は，静止点からその点までの距離（飛跡に沿って測った）の関数としても求められる．

1－1 図は泡箱中に π^+ 中間子が右上方から入ってきた時の写真である．磁場がかけてあるので飛跡は曲線で，時計の針の回転と同じ方向に曲っていることから π^- ではなく π^+ のことがわかる．点 A で進行方向が変ったのはその点で水素原子核（陽子）に衝突して π^+ の進行方向が変ったことを示している．（陽子は入射 π^+ 中間子のエネルギーの一部を貰って走り出すが，その速度は小さくてすぐ止ってしまい認められる程度の飛跡を作ってない）．衝突後の π^+ 中間子はエネルギーを一部失ったために運動量が小さくなり，より曲率半径の小さい曲線運動をして点 B に達している．（下方の飛跡の乱れは泡箱の壁の近くでの液体水素の乱れによるもので，実際の π^+ 飛跡とは関係ない）．飛跡の濃さの増しから π^+ のエネルギーがだんだん失われていることがよくわかり，B 点で π^+ 中間子は静止している．B 点から C 点まで達する新しい飛跡は π^+ 中間子がより軽いいくつかの粒子にこわれ，その際発生する余分のエネルギーを貰って生成粒子中の荷電粒子が走り出したためと考えられる．π^+ 中間子は崩壊して μ^+ 中間子とニュートリノ（ν）に崩壊するが（$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$），エネルギー·運動量の保存則から μ^+ 中間子のエネルギーは約 6 MeV，B から C までの距離はちょうどこのエネルギーの μ^+ 中間子が泡箱中を走って最後に静止するまでの距離に相当する．点 C からきわめて淡い飛跡が左上方に向って走っている．これは静止した μ^+ 中間子が崩壊して陽電子（e^+）を作り，その陽電子による飛跡である（$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}$）（$\bar{\nu}$ は反ニュートリノ）．陽電子の速度は非常に光速度に近いので飛跡はきわめて淡いものになる．

泡箱等の測定装置は，直接には荷電粒子しか見ることができない．しかし運動量，エネルギーの保存則が成立していると考えると，荷電をもたぬ中性粒子についてもある知識を与えてくれる．たとえば 1－1 図の B，C 点でそれぞれ運動量・エネルギーの保存則を適用すると，荷電粒子のみ考えたのでは，エネルギー・運動量は保存しておらず，少なくとも中性粒子（写真に写ってない粒子）が 1 個以上それらの点からでてなければならぬことを示している．また π^+ 崩壊（$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$）の場合には，$\pi^+$，$\mu^+$ のエネルギー，運動量と保存則から ν のエネルギー，運動量を算出し，ν の質量が 0（実験誤差の範囲で）のことを示すことができる．

1－2 図は下方から入射した反陽子（$\bar{p}$）が泡箱中の陽子に A 点で衝突し 4 個の荷電 π 中間子と 1 個の π^0 中間子とに転化している写真である（$\bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- + \pi^- + \pi^0$）．右上隅でその中の 1 個の π^+ 中間子か写真 1－1 のような $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \rightarrow e^+$ 崩壊を次々に起

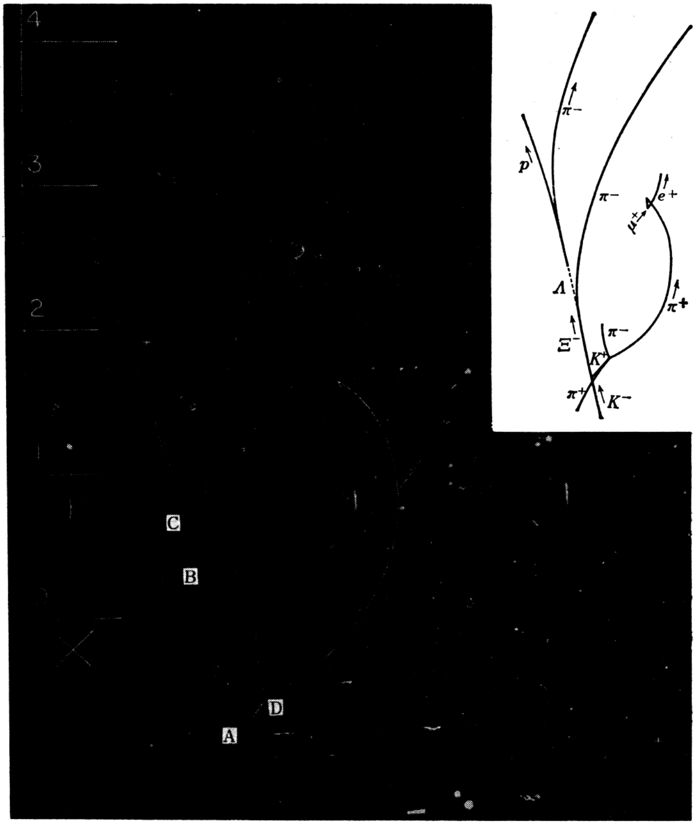
こしている．素粒子間の衝突の際に十分大きなエネルギーが系に与えられると，そのエネルギーが多数の素粒子の質量に転化して多くの素粒子を作り得る．この図の場合は陽子と反陽子の質量（それぞれ π 中間子の質量の約 6.7 倍）が 5 個の π 中間子の質量と運動エネルギーに転化している．右の図は写真の説明図である．写真の所々に点在する小さな渦巻き状の飛跡は小さなエネルギーの電子の飛跡で，エネルギーを失って運動量が小さくなるにつれ曲率半径の小さくなっていくようすがはっきりわかる．



1－2 図　反陽子の消滅

1－3 図は K^- 中間子が泡箱中の陽子に衝突して起こす一連の反応を示している．まず下方から入射した K^- が点 A で陽子に衝突し反応 $K^- + p \to K^+ + \Xi^-$ を起こす．作られた Ξ^- は点 B まで走った後，崩壊して次のように壊れる $\Xi^- \to \Lambda^0 + \pi^-$．$\Lambda^0$ は中性で写真には写らないが点 C まで走った後 $\Lambda^0 \to p + \pi^-$ に崩壊している．一方，A 点で作られた K^+ は D 点で 3 個の π 中間子に崩壊する $K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$．そのうち右上方に出た π^+ 中間子は $\pi^+ \to \mu^+ \to e^+$ 崩壊している．

1－1，1－3 図からもわかるように多くの素粒子は不安定で，ある時間たつと崩壊してより軽い二つ以上の素粒子に転化する．たとえば π^+ 中間子は $\pi^+ \to \mu^+ + \nu$ のように，μ^+ 中間子は $\mu^+ \to e^+ + \nu + \bar{\nu}$ のように崩壊する．また崩壊の仕方も必ずしも一ようでなく場合に応じていろいろ異なった崩壊をする．素粒子の寿命はきわめて短く大部分のものは 10^{-6} sec から 10^{-10} sec 程度の短い間に崩壊する．一方，素粒子間の衝突の起こる時



1－3 図　カスケード粒子の生成と崩壊

間はさらにはるかに短いもので，素粒子世界での現象を測る時間のスケールは 10^{-23} sec (1－1 表参照）である．したがってこの時間のスケールで測ってみると素粒子の寿命はきわめて長く，ちょうどわれわれが宇宙の起源を考えるほどに長い時間の現象である．素粒子はこのようにして素粒子自身の目から眺めるときわめて安定なものといえよう．

素粒子は定まった質量，荷電を持つだけでなくいろいろの属性を持っている．一定の運動量で走っている一つの素粒子（たとえば陽子）はすべて同一の状態にあるわけではなく，いくつかの異なる状態が存在する．これはあたかも素粒子が有限の半径を持つ回転体で，その回転軸の向きが異なるいろいろな回転状態が存在することに対応している．この回転を素粒子の**スピン**といい，スピン（回転角運動量）の大きさは 1－2 表で与えられる値をとる（§ 3.2 参照）．

また素粒子の内部状態を表わす波動関数は，座標系の x，y，z 軸を反転した時（$x\to-x$，$y\to-y$，$z\to-z$）に元と同じ値をとるか，または符号が変るかいずれかの性質を持っており，この性質を素粒子の**パリティ**という（§ 4.4 参照）．

さらに多くの素粒子，特に荷電を持った素粒子は，それと同じ質量，スピン，荷電の大きさを持ち，荷電の符号のみ異なる対になる素粒子が存在する．これをその粒子の**反粒子**という．たとえば π^+ 中間子の反粒子は π^- 中間子，電子の反粒子は陽電子である．また，中性の粒子でも中性 K 中間子やニュートリノは反粒子を持つ．

同種の素粒子が2個以上集まった時にその系の示す性質は，二通りのきわめて異なるようすを示し，π 中間子，光子等スピンが整数値をとる素粒子では同一の状態（運動量，スピンの成分の値が同一）に何個でも同時に同種の素粒子が存在し得る．これに対して電子，陽子等スピンが半整数の素粒子では，一つの状態に2個以上の同種の素粒子は存在し得ない．前者を **Bose 粒子**，後者を **Fermi 粒子**という（第5章参照）．

素粒子間の衝突で素粒子が散乱され（進行方向を変え），あるいは他の素粒子に転化し，あるいは新しい素粒子を作る時に，衝突前後での運動量の総和，エネルギーの総和，全荷電量は不変であるが，この他にも近似的にその総和が保たれる量として，**strangeness**（S），および**荷電スピン**（I）が知られている（第10，11章参照）．これらの保存則がみたされている限り，十分大きな運動エネルギーを持った高エネルギー粒子をもう一つの粒子にぶつけると，そのエネルギーの一部を転化して新しい粒子を作り出すことができる．多くの素粒子は不安定で長く存在し得ないが，陽子，電子等の安定な素粒子を高エネルギーに加速して，それらを物質に衝突させることにより不安定な素粒子を作り出すことができる．

加速器の原理は簡単で直線，または円運動をしている荷電粒子を電場によって加速するもので，多種多様な加速器がある．その代表的なものを 1-3 表に記しておく．

高エネルギー加速器と泡箱等の素粒子測定器の発達は大いに素粒子物理学を発展させた．しかしながら素粒子についてきわめて僅かなことがわかり始めたに過ぎず，その正体をつきとめるにはほど遠い所にある．本書では比較的よく確かめられていることについてのみ記し，素粒子についてのいろいろ興味ある考え方や，今後の発展に待つべきことについては最後の章で簡単にふれることにする．

なお本書で用いるいろいろなエネルギー，長さ，時間の単位と通常用いられている単位との換算式は巻末の付録に表にしておく．

1-2表 素 粒 子

性質 / 名称	(S) スピン $(\hbar)$	(P) パリティ	(Q) 荷電 (e)	(S) strangeness	(I) 荷電スピン	(I_3)	質量 (MeV)	寿命 (sec)	主な崩壊
Baryon									
p (proton)	1/2	+	1	0	1/2	1/2	938.3	安定	——
n (neutron)	1/2	+	0	0	1/2	−1/2	939.6	0.96×10^{3}	$p+e^-+\bar{\nu}$
Λ^0 (lambda)	1/2	+	0	−1	0	0	1115.4	2.5×10^{-10}	$\begin{cases}p+\pi^-\\ n+\pi^0\end{cases}$
Σ^+ (sigma +)	1/2	+	1	−1	1	1	1189.4	0.81×10^{-10}	$\begin{cases}p+\pi^0\\ n+\pi^+\end{cases}$
Σ^0 (sigma 0)	1/2	+	0	−1	1	0	1192.6	$<10^{-14}$	$\Lambda^0+\gamma$
Σ^- (sigma −)	1/2	+	−1	−1	1	−1	1197.4	1.6×10^{-10}	$n+\pi^-$
Ξ^0 (Xi 0 または cascade 0)	1/2	+	0	−2	1/2	1/2	1314.7	3.0×10^{-10}	$\Lambda^0+\pi^0$
Ξ^- (Xi− または cascade −)	1/2	+	−1	−2	1/2	−1/2	1321.3	1.6×10^{-10}	$\Lambda^0+\pi^-$

Anti-Baryon

p, n, Λ^0, Σ^+, Σ^0, Σ^-, Ξ^0, Ξ^- の反粒子をそれぞれ $\bar{p}$, $\bar{n}$, $\bar{\Lambda}^0$, $\bar{\Sigma}^+$, $\bar{\Sigma}^0$, $\bar{\Sigma}^-$, $\bar{\Xi}^0$, $\bar{\Xi}^-$ と書く．これらはパリティ P, 荷電 Q, Strangeness S, および I_3 の符号が粒子と逆になっている．スピン，質量，寿命，荷電スピンは同一で，崩壊の仕方はたとえば $n\to p+e^-+\bar{\nu}$ に対し $\bar{n}\to\bar{p}+e^++\nu$ である．

Meson									
π^+	0	−	1	0	1	1	139.6	2.6×10^{-8}	$\mu^++\nu$
π^0 (pi meson または pion)	0	−	0	0	1	0	135.0	0.9×10^{-16}	2γ
π^-	0	−	−1	0	1	−1	139.6	2.6×10^{-8}	$\mu^-+\bar{\nu}$
K^+ (K meson または kaon)	0	−	1	1	1/2	1/2	493.8	1.2×10^{-8}	$\begin{cases}\mu^++\nu,\ \pi^++\pi^0,\\ \pi^0+\mu^++\nu\\ \pi^0+e^++\nu,\\ \pi^++\pi^++\pi^-\\ \pi^++\pi^0+\pi^0\end{cases}$
K^- $(=\bar{K}^+)$	0	−	−1	−1	1/2	−1/2	493.8	1.2×10^{-8}	$\begin{cases}\mu^-+\bar{\nu},\ \pi^-+\pi^0,\\ \pi^0+\mu^-+\bar{\nu}\\ \pi^0+e^-+\bar{\nu},\\ \pi^-+\pi^-+\pi^+\\ \pi^-+\pi^0+\pi^0\end{cases}$
K^0	0	−	0	1	1/2	−1/2	497.8	$K_1{}^0$ 0.86×10^{-10}	$\begin{cases}\pi^0+\pi^0\\ \pi^++\pi^-\end{cases}$
$\bar{K}^0$	0	−	0	−1	1/2	1/2	497.8	$K_2{}^0$ 5.3×10^{-8}	$\begin{cases}3\pi^0,\\ \pi^++\pi^-+\pi^0,\\ \pi^\pm+e^\mp+\binom{\bar{\nu}}{\nu}\\ \pi^\pm+\mu^\mp+\binom{\bar{\nu}}{\nu}\end{cases}$

〔(K^+, K^0) の反粒子は $(K^-, \bar{K}^0)$, π^+ の反粒子は π^-, π^0 の反粒子は π^0 自身である．K^0, $\bar{K}^0$ と $K_1{}^0$, $K_2{}^0$ の関係については § 12 参照〕

Lepton									
e^- (electron)	1/2	+	−1				0.51	安定	——
μ^- (μ meson)	1/2	+	−1				105.7	2.2×10^{-6}	$e^-+\nu+\bar{\nu}$
ν_e (neutrino)	1/2	+	0				0	安定	——
ν_μ (neutrino)	1/2	+	0				0	安定	——

Anti-lepton

e^-, μ^-, ν_e, ν_μ の反粒子として e^+, μ^+, $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$ が存在する．〔Strangeness S, I, I_3 は lepton に対し定義されてない〕ニュートリノは2種類あり，それぞれ ν_e, ν_μ と書いた．

光子 γ	1	−	0				0	安定	——

1-3 表 加　速　器

	軌道	電　場	エネルギー
A）陽子加速器			
陽子ライナック	直線	一定周期の高周波	約 200 MeV まで*
サイクロトロン	渦巻	一定周期の高周波	約 15 MeV まで
シンクロ・サイクロトロン	渦巻	可変周波の高周波	約 800 MeV まで*
プロトン・シンクロトロン	円	可変周期の高周波	約 70 GeV まで*
B）電子加速器			
電子ライナック	直線	一定周期の高周波	約 20 GeV まで*
電子シンクロトロン	円	一定周波の高周波	約 10 GeV まで*
β-トロン	渦巻	(磁場の変化による加速)	約 300 MeV まで*

〔* 現存する加速器の最高エネルギー〕

第2章　量　子　力　学

§2.1　Schrödinger 方程式

この章ではあとで必要な量子力学の復習をすることにする．電子，陽子，その他の素粒子の運動，つまりミクロの現象を取扱うのには Newton の力学ではだめで，量子力学によらなければならない．Newton の力学，もっと一般に古典物理学では，ある時刻で物理量は確定した値を持っていた．たとえば質点の位置・運動量は同時にいくらでも精確に測定することが可能で，また位置と運動量を与えればその粒子の状態が定まったと考える．これに反してミクロの世界では，ある状態で物理量を測定したとき，確定した値が得られるとは限らない．したがって状態と物理量は区別して考えなくてはならない．

粒子がポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ の中で運動している場合を例にとろう．量子力学ではこの系の状態は $\boldsymbol{r}$ を変数とし，複素数値をとる関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ で表わされる．これを**波動関数**という．物理量は波動関数に作用する演算子で表わされる．この演算子の決め方は次の通りである．まずすべての量を座標 $\boldsymbol{r}$ とこれに正準共役な運動量 $\boldsymbol{p}$ で書く．たとえばこの系のエネルギーは，

$$H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V(\boldsymbol{r}). \tag{2.1}$$

全エネルギーを座標と運動量で書いたものを **Hamiltonian** という． 次に運動量を微分演算子で置き換える：

$$p_x,\ p_y,\ p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.2}$$

ただし，$\hbar$ は Planck の作用量子を 2π で割った定数である（$\hbar=1.054\times10^{-27}$ erg sec)．この置き換えによって物理量は演算子となるが，それが**エルミット量**であることが必要である．一般に演算子 A と $A^\dagger$ が，任意の二つの波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$，$\varphi(\boldsymbol{r})$ に対して，

$$\int\varphi(\boldsymbol{r})^*\{A\psi(\boldsymbol{r})\}d\boldsymbol{r}=\int\{A^\dagger\varphi(\boldsymbol{r})\}^*\psi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \tag{2.3}$$

の関係にあるとき，$A^\dagger$ は A の**エルミット共役量**であるという．ただし * は複素共役量をとることを意味し，積分は全空間について行なうものとする．$A^\dagger=A$ のとき A はエルミット量であるという．上の Hamiltonian はエルミット量だろうか．そのためには，たとえば，

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^*\psi\,dx \tag{2.4}$$

が成り立つことが必要である．部分積分を二回行なうと，

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x}dx=-\varphi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx$$

$$=\left(-\varphi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\psi\right)\bigg|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^*\psi\,dx.$$

したがって，すべての波動関数が無限遠方で0になるならば，右辺の第1項は0であり，(2.4) は成り立っている． y, z についても同様で， H はエルミット量であることがわかる (§ 2.4 参照).

状態は時間がたつにしたがって変化するが，それは，

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi \tag{2.5}$$

によって与えられる． H は系の Hamiltonian である．これが量子力学の基礎方程式で **Schrödinger 方程式** とよばれる．

多数の粒子があるときにも同様で， n 個の粒子があるならば，おのおのの座標 $\boldsymbol{r}_j$ ($j=1, 2, \cdots, n$) と運動量 $\boldsymbol{p}_j$ を用いて Hamiltonian は，

$$H=\sum_j\frac{\boldsymbol{p}_j{}^2}{2m_j}+V(\boldsymbol{r}_j) \tag{2.6}$$

である．ある時刻の状態は $3n$ 個の変数 $\boldsymbol{r}_j$ を持つ波動関数 $\psi(\boldsymbol{r}_j)$ で表わされ，量子力学的な Hamiltonian は，

$$\boldsymbol{p}_j\to\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_j}$$

と置き換えて得られる．したがって Schrödinger 方程式は，

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}_j, t)}{\partial t}=\left[-\sum_j\frac{\hbar^2}{2m_j}\Delta_j+V(\boldsymbol{r}_j)\right]\psi(\boldsymbol{r}_j, t) \tag{2.7}$$

である． Δ は $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ で定義される量である．すなわち古典力学から量子力学に移るには，

$$E=H(\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{r}_j)$$

という古典的な式で，

$$\boldsymbol{p}_j=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_j},\qquad E=i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.8}$$

と置き，波動関数に作用させればよい．

〔問題 2.1〕 直交座標の代りに極座標 (r, θ, φ) を使うと，Hamiltonian (2.1) は

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r{}^2+\frac{p_\theta{}^2}{r^2}+\frac{p_\varphi{}^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+V(r)$$

である．これを量子化して，

$$p_r = -i\hbar\,\partial/\partial r,\quad p_\theta = -i\hbar\,\partial/\partial\theta,\quad p_\varphi = -i\hbar\,\partial/\partial\varphi,$$

二つの波動関数 ψ，φ の内積を，

$$<\varphi, \psi> = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \varphi^*(r, \theta, \varphi)\psi(r, \theta, \varphi)$$

としたとき，p_r^2，p_θ^2 はエルミット量だろうか．これらをエルミットにするにはどうしたらよいだろうか．

[ヒント] p_r^2 がエルミット量でないならば，$f(r)^{-1}p_r f(r)p_r$ の形を試みよ．

§ 2.2 状態と物理量

量子力学では，ある時刻での粒子の位置は一般には確定していない．同じ状態の粒子を測定しても，ある点に見出されることもあり，他の点に見出されることもある．一粒子の波動関数を $\psi(\boldsymbol{r})$ とするとき，x と $x+dx$，y と $y+dy$，z と $z+dz$ で囲まれた体積 $dxdydz$ ($=d\boldsymbol{r}$) の内にこの粒子が見出される確率は，

$$P(\boldsymbol{r})\,dxdydz = |\psi(\boldsymbol{r})|^2\, dxdydz \tag{2.9}$$

で与えられている．全空間のどこかに存在する確率の総和は1であるから，波動関数は

$$\int |\psi(\mathbf{r})|^2\, d\mathbf{r} = 1 \tag{2.10}$$

という**規格化条件**を満たしていなければならない．多粒子系では波動関数を $\psi(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n)$ とすると，

$$P(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n)d\boldsymbol{r}_1 \cdots d\boldsymbol{r}_n = |\psi(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n)|^2 d\boldsymbol{r}_1 \cdots d\boldsymbol{r}_n \tag{2.11}$$

は第1番目の粒子が $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_1 + d\boldsymbol{r}_1$ の間に，$\cdots$，第 n 番目の粒子が $\boldsymbol{r}_n$ と $\boldsymbol{r}_n + d\boldsymbol{r}_n$ の間に存在する確率である．規格化の条件は，

$$\int |\psi(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n)|^2\, d\tau = 1 \tag{2.12}$$

で与えられている．ただし $d\tau$ は $d\boldsymbol{r}_1 \cdots d\boldsymbol{r}_n$ の略で，積分範囲は各変数の全領域である．

一般に量 A の測定をしたときは次のような結果となる．A の**固有値**を a_n，**固有状態**を ψ_n としよう．すなわち，

$$A\psi_n = a_n\psi_n \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.13}$$

が成り立っているとする．もしある一つの固有状態 ψ_n で A の測定をすれば，常に確定した値 a_n が得られる．固有状態でない一般の状態 ψ ではそうはならない．ψ を固有状態 ψ_n で展開して，

$$\psi = \sum_n C_n \psi_n \tag{2.14}$$

になったとする．この状態で A を測定すると，a_1 が得られることも，a_2 が得られることもあり，a_n という値が得られる確率は，

$$P_n = |C_n|^2/\sum_n |C_n|^2 \tag{2.15}$$

で与えられる．すなわちある状態 ψ がいくつかの状態 ψ_n の重ね合わせでできているとき，ψ は部分的に ψ_1，部分的に ψ_2，$\cdots$ の状態にあると考えられ，そのうちの一つ ψ_n の状態が見出される確率が，重ね合わせての係数 C_n の２乗 $|C_n|^2$ に比例するのである．

A がエルミット量ならば，その固有値は実数である．それは ψ_n が規格化されているとき，

$$a_n = a_n \int \psi_n^* \psi_n \, d\tau = \int \psi_n^* (A\psi_n) d\tau = \int (A\psi_n)^* \psi_n \, d\tau = a_n^*$$

からわかる．また異なる固有値に属する固有関数は互に直交する．なぜなら，

$$\int \psi_m^* (A\psi_n) d\tau = \int (A\psi_m)^* \psi_n \, d\tau$$

から，

$$(a_n - a_m) \int \psi_m^* \psi_n \, d\tau = 0.$$

すなわち，

$$\int \psi_m^* \psi_n \, d\tau = 0, \quad (a_m \neq a_n)$$

となる．同じ固有値に属する固有状態が二つ以上ある時，これらを**縮退**した状態という．この場合二つの固有状態は $a_n = a_m$ のため直交するとは限らないが，適当な１次結合をとってやれば直交するようになる．したがって，すべての固有状態に対して，

$$\int \psi_m^* \psi_n \, d\tau = \delta_{mn} \tag{2.16}$$

という**規格直交条件**が成り立つ．

$$\delta_{mn} \begin{cases} = 1 & m = n \\ = 0 & m \neq n. \end{cases} \tag{2.17}$$

(2.14) に ψ_m^* を掛けて積分すると規格直交条件により $C_m = \int \psi_m^* \psi \, d\tau$ が得られ，

$$\psi = \sum_n \left(\int \psi_n^* \psi \, d\tau \right) \psi_n.$$

ψ が規格化されているときは $\sum_n |C_n|^2 = 1$ であり，したがって ψ で A を測定したとき，a_n が得られる確率は，

$$P_n = \left| \int \psi_n^* \psi \, d\tau \right|^2 \tag{2.18}$$

で与えられる．ψ で A を測定したとき得られる値の平均値（**期待値**）は，

$$< A > = \sum_n a_n P_n = \sum_n a_n C_n{}^* C_n$$

である．一方，

$$\int \psi^* A \psi \, d\tau = \int \psi^* A (\sum_n C_n \psi_n) d\tau = \sum_n a_n C_n \int \psi^* \psi_n \, d\tau = \sum_n a_n C_n C_n{}^*.$$

したがって，ψ での A の期待値は，

$$< A > = \int \psi^* A \psi \, d\tau \tag{2.19}$$

で与えられる．

確率，期待値など測定にかかる量は，(2.18)，(2.19) よりわかるように，ψ を $\psi e^{i\varphi}$，したがって同時に ψ^* を $\psi^* e^{-i\varphi}$ (φ は $\mathbf{r}$ によらない定数) としても変らない．したがって ψ と $\psi e^{i\varphi}$ は同じ状態を表わしている．

状態は Schrödinger 方程式，

$$i\hbar \dot{\psi} = H\psi$$

にしたがって変るが (˙ は時間微分の意味)，もし ψ が H の固有状態ならば ψ は，

$$\psi(\mathbf{r}_j, t) = e^{-iEt/\hbar} u(\mathbf{r}_j), \quad Hu = Eu \tag{2.20}$$

と書ける．このときは確率密度，

$$P(\mathbf{r}_j, t) = |\psi(\mathbf{r}_j, t)|^2 = |u(\mathbf{r}_j)|^2$$

や，t を含まない量 A の期待値，

$$< A > = \int \psi^* A \psi \, d\tau = \int u^* A u \, d\tau$$

は時間がたっても変化しない．したがって (2.20) の形の状態は **定常状態** と呼ばれる．この状態ではエネルギーが確定した値 E を持っていることはいうまでもない．

§ 2.3 物理量の交換関係

微分の法則から任意の関数 $\psi(x)$ に対して，

$$\frac{\partial}{\partial x}\{x\psi(x)\} - x\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = \psi(x)$$

である．この両辺に $-i\hbar$ を掛けると (2.2) の置き換えの規則により，演算子としての p と x の間に，

$$px - xp = -i\hbar$$

の関係があることがわかる．量子力学での物理量は掛け算の順序に関係し，一般に二つの量のどちらを先に掛けるかで結果が違ってくる．

$$AB - BA \equiv [A, B]$$

という量は量子力学で重要なものでしばしば現われる．これを A, B の間の **交換積** (com-

mutator）という．座標と運動量について**交換関係**は，

$$[p, x] = -i\hbar \tag{2.21}$$

である．多粒子系の場合 x_j, y_j, z_j を x_{1j}, x_{2j}, x_{3j} と書き，p_{xj}, p_{yj}, p_{zj} を p_{1j}, p_{2j}, p_{3j} と書くことにすれば，交換関係は，

$$[p_{\mu j}, x_{\nu k}] = -i\hbar\,\delta_{\mu\nu}\delta_{jk} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, \ j, k = 1, \cdots, n)$$
$$[p_{\mu j}, p_{\nu k}] = 0, \qquad [x_{\mu j}, x_{\nu k}] = 0 \tag{2.22}$$

である．

演算子の性質はそれらの間の交換関係を与えると，かなり決まってしまう．たとえば Hamiltonian (2.1) の固有値は (2.22) で定まってしまい，この交換関係を満たすようなどんな演算子を持ってきても，H の固有値は同じであることがわかっている．したがって古典力学から量子力学に移るのに，必ずしも (2.2) の置き換えに限ることなく，もっと一般な，(2.22) を満足する演算子を考えてもよい．その時は状態 ψ も $\boldsymbol{r}_j$ の関数 $\psi(\boldsymbol{r}_j)$ でなく，もっと一般のものである．たとえば波動関数を p_j の関数 $\psi(\boldsymbol{p}_j)$ とし，$\boldsymbol{r}_j$ を演算子 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_j}$ としてもよく，また § 2.4 の例題におけるようにいろいろの演算子を行列で表わすこともできる．一般に波動関数の変数を λ としたとき，φ と ψ の**内積**は，

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \varphi^*(\lambda)\psi(\lambda)\,d\lambda \tag{2.23}$$

で，この量で $\int \varphi^*\psi\,d\tau$ を置き換えれば，いままでの式はそのまま成立する．

たとえば，A の期待値は，

$$\langle A \rangle = \langle \psi, A\psi \rangle \tag{2.24}$$

である．

二つの量 A と B が積の順序に対し交換可能かどうかは，A, B の測定に重要な関係がある．A と B が可換のとき，すなわち，

$$[A, B] = 0$$

ならば，A の固有状態 ψ に B を作用させた結果も，同じ固有値に属する A の固有状態である．すなわち，

$$A\psi = a\psi$$

ならば
$$A(B\psi) = BA\psi = a(B\psi).$$

もし固有値 a に属する固有状態が一つしかないならば，$B\psi$ は ψ に比例しなければならない．

$$B\psi = b\psi.$$

もし a が縮退していて a に対する固有状態が二つ以上あるときは，ただちに上式は出てこないが，適当な1次結合をとって上式が成り立つようにすることができる．したがって，A と B が可換のときは，A の固有状態が同時に B の固有状態となるようにすることができる．互に可換な三つ以上の量 $A, B, C, \cdots$ があるときも同様で，これらの**同時固有状態**を作ることができる．この状態を指定するのには A が a の値，B が b の値，$\cdots$ をとる状態というように，固有値で名前をつけるのが便利である．すなわち ψ_{abc} は

$$A\psi_{abc}=a\psi_{abc},\quad B\psi_{abc}=b\psi_{abc},\quad C\psi_{abc}=c\psi_{abc} \tag{2.25}$$

をみたす状態である．

固有状態 ψ_{ab} では A も B も確定した値 a, b を持っている．すなわち可換な二つの量 A, B は同時に測定することができ，一方の測定が他に影響を与えることはない．これに反し A と B が非可換のときは，A の固有状態は一般に B の固有状態でなく，A を精密に測定しようとすると，B の測定は確定した値を与えない．非可換な量の例として位置 x と運動量 p_x を考えてみよう．ある状態で x がかなりはっきりした値を持つためには，波動関数がある点の近くだけで大きな値を持たねばならない．しかしこのときは波動関数の勾配がこの領域内で急激に変化することになり，運動量 $-i\hbar\,\partial/\partial x$ は一定の値とならない．原点の近くに集中した波動関数の例として規格化された関数，

$$\psi=\sqrt{\alpha}\,e^{-\pi\alpha^2x^2/2}$$

をとってみよう．この状態で x, p_x の平均値はいずれも0であるが，それからの2乗偏差は，

$$(\Delta x)^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\psi^2\,dx=\frac{1}{2\pi\alpha^2},$$

$$(\Delta p_x)^2=\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2dx=\frac{\pi\alpha^2}{2}\hbar^2.$$

したがって，

$$\Delta p_x\cdot\Delta x=\sqrt{(\Delta p_x)^2\cdot(\Delta x)^2}=\frac{\hbar}{2}$$

となり，α を大きくして位置を正確に測ろうとすると $(\Delta p_x)^2$ が大きくなり，また逆に α を小さくして運動量を正確に測ろうとすると $(\Delta x)^2$ が大きくなることを示している．

一般に A と B が，

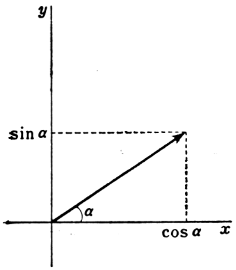
$$[A,B]=ic \qquad (c\ \text{は実数}) \tag{2.26}$$

のときは A と B を同時に精確に測ることは不可能で，平均値からの偏差を ΔA, ΔB とすると，どんな状態でも，

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{c}{2} \tag{2.27}$$

であることを示すことができる． 上に述べた位置と運動量はこの例で，**不確定性原理**とよばれる．

いままでに述べた状態の重ね合わせ，その状態での測定問題の一例として，光子の偏りを考えてみよう．光の直線偏光は電気石の結晶で測ることができる．電気石は結晶軸と垂直方向に偏った光はそのまま通すが，軸方向に偏った光は完全に吸収してしまって通さない．いま光が z 方向（紙面に垂直）に進むとして， x 方向に直線偏光した光子を考えると，これは x 方向の直線偏光を測るという測定，すなわち y 方向に軸を向けた電気石を通すという操作（これを A ということにする）の固有状態である．なぜならその結果は必ず通過するという確定したものだからである（これを固有値が1の状態といってよい）． A のもう一つの固有状態は y 方向に直線偏光した光子で，この状態で A を測ると必ず通さないというやはり確定した結果が得られる（固有値0の状態）．



2-1 図 直線偏光の分解

つぎに x 軸と α の角をなす方向に偏った光子を考えると，これは A の固有状態ではない．これは，

$$\psi_\alpha = \cos\alpha\psi_x + \sin\alpha\psi_y$$

と分解され， x 方向の偏りの状態 ψ_x と y 方向の偏りの状態 ψ_y の重ね合わせの状態である．ここで A の測定を行なうと $\cos^2\alpha$ の確率で1が， $\sin^2\alpha$ の確率で 0 が得られる．すなわち α 方向に偏った光子が電気石に入射するとき， $\cos^2\alpha$ の確率で通過し， $\sin^2\alpha$ の確率で吸収される．このような光子がたくさん入射した時は，通過後の光子数すなわち光の強度は $\cos^2\alpha$ 倍になることになり，これは古典電磁気学で得られる結果と同じである．

x 軸と 45° の方向に軸を向けた電気石を通す操作を A' とすると， A と A' は可換でなく，同時固有値を持たない． A' の固有状態を ψ_1, ψ_2 とすると，

$$A'\psi_1 = 0, \quad A'\psi_2 = \psi_2,$$

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_x + \psi_y), \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_x - \psi_y),$$

$$\psi_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2), \quad \psi_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_2)$$

で，一方の固有状態は他のものの二つの固有状態を1対1で重ね合わせたものである． A を通して得られた x 方向の直線偏光 ψ_x を A' に入射させると，1/2 の確率で A' の固有状態 ψ_1 が得られ，それを再び A に入射させると 1/2 の確率で ψ_x が通過して出てくる．強度でいえば最後の光はもとのものの 1/4 になっている．

§ 2.4 例　題

1）1 次元の調和振動子　質量が m，角周波数 ω の振動子の Hamiltonian および交換関係は，

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}x^2,$$

$$[p,\ x]=-i\hbar \tag{2.28}$$

である．この系のエネルギー固有値を求めるには，p を微分演算子で置き換え，Schrödinger 方程式を解けばよいが，あるいは交換関係だけを使って，次のように求めることもできる．

$$a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x+\frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,p,$$

$$a^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x-\frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,p \tag{2.29}$$

という互にエルミット共役な量を使うと，

$$a^\dagger a=\frac{p^2}{2m\omega\hbar}+\frac{m\omega}{2\hbar}x^2-\frac{i}{2\hbar}(px-xp)=\frac{1}{\omega\hbar}H-\frac{1}{2}.$$

同様にして，

$$aa^\dagger=\frac{1}{\omega\hbar}H+\frac{1}{2}.$$

したがって（2.28）のかわりに，

$$H=\hbar\omega a^\dagger a+\frac{\hbar}{2}\omega, \tag{2.30}$$

$$[a,\ a^\dagger]=1 \tag{2.31}$$

という問題を考えればよい．

$$N=a^\dagger a \tag{2.32}$$

の固有状態を u_n，固有値を ν_n とする．

$$Nu_n=a^\dagger au_n=\nu_n u_n. \tag{2.31'}$$

交換関係（2.31）から，

$$N(a^\dagger u_n)=a^\dagger aa^\dagger u_n=a^\dagger(a^\dagger a+1)u_n=(\nu_n+1)(a^\dagger u_n),$$

$$N(au_n)=a^\dagger aau_n=(aa^\dagger-1)au_n=(\nu_n-1)(au_n).$$

したがって $a^\dagger u_n$，au_n も N の固有状態で固有値はそれぞれ ν_n+1，ν_n-1 である．u_n から出発して次々に a を掛けてやると，固有値が ν_n-1，ν_n-2，$\cdots$ の固有状態が得られ，しまいには負の固有値を持つ固有状態も得られることになる．しかし N の行列の対角線要素を作ってみると，

$$\nu_n = \langle u_n, Nu_n \rangle = \langle u_n, a^\dagger a u_n \rangle = \langle au_n, au_n \rangle \geq 0$$

で，N のすべての固有値は 0 または正である．このむじゅんをさけるには最小の固有値に属する u_0 に対しては，

$$au_0 = 0 \tag{2.33}$$

になっていることが必要である．そのときは，

$$Nu_0 = 0.$$

すなわち，最小の固有値は 0 である．u_0 から出発して次々に $a^\dagger$ を掛けてやると，固有値が，

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

の固有状態 u_0，u_1，u_2，$\cdots$ が得られる．もしこれら以外に固有値があるとすれば，その状態に a を次々に掛けて得られる状態の系列は (2.33) のようにして切れるわけにいかないので，負の固有値というむじゅんを生ずる．したがって N の固有値は正整数値 0, 1, 2, $\cdots$ に限られる．u_n は規格化されている ($\langle u_n, u_n \rangle = 1$) とし，

$$au_n = c_n u_{n-1},$$
$$a^\dagger u_{n-1} = d_n u_n$$

と書くと a，$a^\dagger$ は互にエルミット共役であるから，

$$c_n = \langle u_{n-1}, au_n \rangle = \langle a^\dagger u_{n-1}, u_n \rangle = d_n^*$$

である．また，

$$nu_n = Nu_n = a^\dagger a u_n = c_n a^\dagger u_{n-1} = |c_n|^2 u_n.$$

したがって，

$$c_n = \sqrt{n}\, e^{i\varphi_n} \qquad (\varphi_n \text{ は任意の実数}).$$

c_n は絶対値が 1 の量 $e^{i\varphi_n}$ だけ不定だが，状態 u_n に適当な位相 $e^{i\chi_n}$ ($\chi_n - \chi_{n-1} = \varphi_n$) を掛けておけば，$c_n$ を実数にとることができる．N，a，a^* は次の行列で表わされる．

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

もとの問題にかえって，H は固有値，

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{2.35}$$

を持つ．x の行列要素は，

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^\dagger) \tag{2.36}$$

から計算され，$\langle u_m, xu_n \rangle$ を $\langle m|x|n \rangle$ と書くことにすると，

$$\langle n|x|n+1 \rangle = \langle n+1|x|n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{n+1}. \tag{2.37}$$

これ以外の行列要素はすべて0である．

2）平面波　力がぜんぜん働かないとき，すなわちポテンシャルが 0 のときの Schrödinger 方程式の解は，

$$\psi = Ce^{i(\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}-Et)/\hbar}, \qquad E=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{2.38}$$

で，これが自由粒子の状態を表わす．C は規格化の条件，

$$\int |\psi|^2 d\mathbf{r} = 1$$

から決められるのであるが，無限に拡がった空間では $C=0$ となってしまうので，十分大きいけれども有限な大きさの空間内にとじ込めなければならない．この粒子を一稜が L の箱の中に入れたとすると，

$$C = \frac{1}{L^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{V}}. \tag{2.39}$$

V は箱の体積 L^3 である．

この場合運動エネルギー $\boldsymbol{p}^2/2m$ はエルミトになるだろうか．これをためすために，x 成分について部分積分をしてみると，(2.4) のときと同様にして，

$$-\int_{-L/2}^{L/2}\varphi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx = \left(-\varphi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\psi\right)\Bigg|_{-L/2}^{L/2} - \int_{-L/2}^{L/2}\left(\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2}\right)\psi\, dx.$$

$p_x^2 = -\hbar^2(\partial/\partial x)^2$ がエルミットであるためには，右辺の第1項が 0 でなければならない．

$$(\varphi^*\psi' - \varphi^{*\prime}\psi)\Big|_{-L/2}^{L/2} = 0.$$

これを満足させるには波動関数に次のような条件をおけばよい．(′ は x 微分)

i）第一の可能性はすべての波動関数が，

$$\psi\left(\frac{L}{2}\right)=0, \qquad \psi\left(-\frac{L}{2}\right)=0 \tag{2.40}$$

という条件である．(2.38) は決して0にならないのでこの条件は適当でない．(2.38) のかわりに $\sin p_x x/\hbar \sin p_y y/\hbar \sin p_z z/\hbar$ の形の解のときは (2.40) が用いられる．

ii) もう一つの可能性はすべての波動関数が，

$$\psi\left(\frac{L}{2}\right)=\psi\left(-\frac{L}{2}\right),\qquad \psi'\left(\frac{L}{2}\right)=\psi'\left(-\frac{L}{2}\right) \tag{2.41}$$

の条件をみたすとすることである．すなわち波動関数が L を周期とする周期関数であるという条件をおく． y, z 方向についても同様に周期的であるとすれば $\boldsymbol{p}^2$ がエルミットとなる．この条件を**周期性の境界条件**という．

周期性の境界条件から，(2.38) の $\boldsymbol{p}$ は勝手な値は許されなくなり，

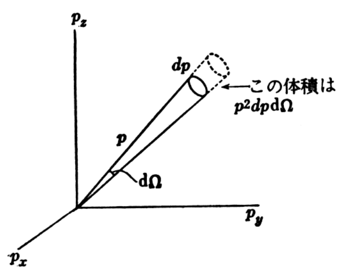
$$p_x=\frac{2\pi\hbar}{L}n_x,\quad p_y=\frac{2\pi\hbar}{L}n_y,\quad p_z=\frac{2\pi\hbar}{L}n_z,\quad n_n,\ n_y,\ n_z=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots \tag{2.42}$$

という離散的な値だけが許される．三つの整数の組 $(n_x, n_y, n_z)=\boldsymbol{n}$ を与えると一つの固有状態が対応し，

$$\int \psi_n{}^*\psi_{n'}\,d\boldsymbol{r}=\delta_{nn'} \tag{2.43}$$

の規格直交関係がある．$\delta_{nn'}$ は $\delta_{n_x n_x'}\delta_{n_y n_y'}\delta_{n_z n_z'}$ の略である． この固有状態が $\boldsymbol{p}$ 空間で一稜が $2\pi\hbar/L$ の格子の各点に対応して存在する．したがって運動量が p_x と p_x+dp_x, p_y と p_y+dp_y, p_z と p_z+dp_z の間にあるような固有状態の数は，

$$\rho\,d\boldsymbol{p}=\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 d\boldsymbol{p} \tag{2.44}$$



2-2 図

で与えられる． ρ は $\boldsymbol{p}$ 空間における**状態密度**である．これは次のように書き直すこともできる．運動量の方向が立体角 $d\Omega$ の範囲内にあり，大きさが p と $p+dp$ の間にあるような固有状態の数は，

$$\rho\,d\boldsymbol{p}=\rho p^2dpd\Omega=\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 p^2dpd\Omega$$
$$=\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 pmdEd\Omega \tag{2.45}$$

である (2-2 図参照)．最後の式は $E=p^2/2m$ の関係を使って，運動量の方向が $d\Omega$, エネルギーが E と $E+dE$ の間にある固有状態の数を求めたものである．

いままで (2.38) の解をとったが，Schrödinger 方程式，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u=Eu$$

の解としては，

$$C\sin(\boldsymbol{kr}),\quad C\cos(\boldsymbol{kr}),\quad E=\frac{\hbar^2k^2}{2m},\quad (\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}) \tag{2.46}$$

の形の定在波をとってもよい．やはり周期性の境界条件をおくと，$\boldsymbol{k}$ として許されるのは

$$k_x=\frac{2\pi}{L}n_x,\quad k_y=\frac{2\pi}{L}n_y,\quad k_z=\frac{2\pi}{L}n_z,$$
$$n_x,\ n_y=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\quad n_z=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{2.47}$$

となる．n_z として正の整数しかとらないのは，$\boldsymbol{k}$ を $-\boldsymbol{k}$ にしても $\cos(\boldsymbol{kr})$ は変らず，$\sin(\boldsymbol{kr})$ は符号を変えるだけで，状態としては同じものである．したがって $\boldsymbol{k}$ の空間のうち半分だけにしないと，同じ状態を二重に数えてしまうからである．

(2.38) のような進行形の平面波は運動量の固有状態であり，定まった運動量で飛んでいる粒子を表わす．定在波 (2.46) はこれに反し運動量の固有状態ではないが，波動関数が実数であるという特長がある．もちろん一方（たとえば定在波）を重ね合わせて他方の状態（進行波）を作ることができる．

ポテンシャルが0のときの Schrödinger 方程式の解としては，直交座標 x, y, z のかわりに極座標 r, θ, φ を用いて，

$$R(r)\Theta(\theta,\varphi) \tag{2.48}$$

の形のものをとることもできる．このときは立方体の箱にとじ込めてはだめで，原点を中心にする十分大きな半径 R_0 の球をとり，この表面で波動関数が0になるとする．この境界条件で Hamiltonian はエルミット量となる（問題 2.1 参照)．

§ 2.5 摂　動　論

量子力学では Hamiltonian と交換関係が与えられたとき，固有値，固有状態を求め，また状態の時間的変化を調べることが問題となる．しかし解が正確に求められる例はきわめて少なく，実際には何らかの近似をして解を求める必要がある．しばしば出合うのは Hamiltonian H が二つの部分 H_0 と H' に分れ，H_0 は簡単でその Schrödinger 方程式が解かれていて，H' は小さくその影響を補正としてとり入れれば十分という場合である．この時 H_0 を**無摂動系**，H' を**摂動系**として扱うわけである．以下この節では定常の場合，すなわち固有状態のエネルギーが摂動によってずれるのを計算する問題と，非定常の場合，すなわち状態が摂動によって遷移を起こすという問題に分けて摂動論を取り扱う．

1) 定常状態の摂動論　問題は，

$$H\psi=W\psi,\qquad H=H_0+H' \tag{2.49}$$

という固有値方程式を解くことである．H_0 の固有値問題は解けていて，その規格化された固有状態を u_n，固有値を E_n とする．

$$H_0 u_n = E_n u_n, \qquad \langle u_m, u_n \rangle = \delta_{mn}. \tag{2.50}$$

さらにこの固有状態は縮退していないとする．すなわち $n \neq m$ なら $E_n \neq E_m$ とする．

ψ および W を H' のべき級数に展開する．

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \cdots, \\ W &= W_0 + W_1 + W_2 + \cdots. \end{aligned} \tag{2.51}$$

ただし，ψ_i, W_i は H' の i 乗を含む項である．これを (2.49) に入れ，

$$(H_0 + H')(\psi_0 + \psi_1 + \cdots) = (W_0 + W_1 + \cdots)(\psi_0 + \psi_1 + \cdots).$$

この両辺で H' の0乗の項，1乗の項，$\cdots$ を拾い出すと，

$$\begin{aligned} H_0\psi_0 &= W_0\psi_0, \\ H_0\psi_1 + H'\psi_0 &= W_0\psi_1 + W_1\psi_0, \\ H_0\psi_2 + H'\psi_1 &= W_0\psi_2 + W_1\psi_1 + W_2\psi_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned} \tag{2.52}$$

最初の方程式は H_0 の固有値方程式で W_0 は E_n のうちどれかである．$n = 0$ の場合を考える．

$$\psi_0 = u_0, \qquad W_0 = E_0.$$

これを (2.52) の第2の式に入れ，u_n との内積を作ると，

$$\langle u_n, H_0\psi_1 \rangle + \langle u_n, H'u_0 \rangle = E_0\langle u_n, \psi_1 \rangle + W_1\delta_{n0}. \tag{2.53}$$

H_0 のエルミット性から左辺の第一項は，

$$\langle u_n, H_0\psi_1 \rangle = \langle H_0 u_n, \psi_1 \rangle = E_n\langle u_n, \psi_1 \rangle$$

となる．したがって (2.53) は，

$$(E_0 - E_n)\langle u_n, \psi_1 \rangle = \langle n|H'|0 \rangle - W_1\delta_{n0}. \tag{2.54}$$

ただし，

$$\langle n|H'|0 \rangle = \langle u_n, H'u_0 \rangle$$

である．(2.54) で $n = 0$ とすると，

$$W_1 = \langle 0|H'|0 \rangle. \tag{2.55}$$

すなわち，第1次の補正は摂動項の対角線要素に等しい．

$n \neq 0$ ならば (2.54) から，

$$\langle u_n, \psi_1 \rangle = \frac{\langle n|H'|0 \rangle}{E_0 - E_n}. \qquad n \neq 0 \tag{2.56}$$

したがって，ψ_1 を u_n で展開すると，

$$\psi_1 = \sum_n c_n u_n = \sum_n \langle u_n, \psi_1 \rangle u_n = \sum_{n \neq 0} \frac{\langle n|H'|0 \rangle}{E_0 - E_n} u_n. \tag{2.57}$$

(2.55), (2.57) を (2.52) の第3式に入れ, u_0 との内積をとると,

$$W_2 = \sum_{n\neq 0} \frac{\langle 0|H'|n\rangle\langle n|H'|0\rangle}{E_0 - E_n}$$

が得られ, u_n との内積を作ると ψ_2 が求められる. まとめると,

$$W = E_0 + \langle 0|H'|0\rangle + \sum_{n\neq 0} \frac{\langle 0|H'|n\rangle\langle n|H'|0\rangle}{E_0 - E_n} + \cdots \tag{2.58}$$

$$\psi = u_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{\langle n|H'|0\rangle}{E_0 - E_n} u_n + \cdots. \tag{2.59}$$

(2.58) はエネルギー固有値が摂動によりどれだけずれるかを与え, (2.59) は摂動系 ψ の中に n という状態が,

$$\left|\frac{\langle n|H'|0\rangle}{E_0 - E_n}\right|^2$$

の確率でまざってくることを示している.

[問題 2.2] エネルギー固有値のずれを H' の4次の項まで求めよ.

2) 状態間の遷移 系が初めに u_0, E_0 という状態にあったところに摂動が加わると, 時間がたつにしたがって, しだいに他の状態に移っていく. これを取扱うのに解くべき方程式は,

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi, \qquad H = H_0 + H',$$

である. ψ を無摂動系の固有状態 $u_n \exp(-iE_n t/\hbar)$ で展開し,

$$\psi = \sum a_n(t) u_n e^{-iE_n t/\hbar}. \tag{2.60}$$

これを (2.60) に入れ u_n との内積を作ると, a_n に対する微分方程式が得られる.

$$i\hbar\dot{a}_n(t) = \sum_m \langle n|H'|m\rangle a_m(t) e^{i(E_n - E_m)t/\hbar}. \tag{2.61}$$

初期条件として, $t=0$ で ψ が u_0 という状態にあったとすると,

$$a_0(0) = 1, \quad a_n(0) = 0, \quad n \neq 0 \tag{2.62}$$

である.

H' が t を含まないならば, (2.61) の解は H' のべき級数として次のように求められる. 最初の近似として (2.61) の右辺の a に, $t=0$ の値 (2.62) を入れ積分をして a_n を求められる. その結果を右辺に入れて積分すれば第2近似の a_n が得られる. 以下同様である. 第1近似の a_n は (2.61) の右辺の a_0 を 1, 他の a_n を0とおき, 初期条件を使って積分する.

$$a_n(t) = \frac{\langle n|H'|0\rangle}{E_0 - E_n}\left(e^{i(E_n - E_0)t/\hbar} - 1\right) \qquad (n \neq 0) \tag{2.63}$$

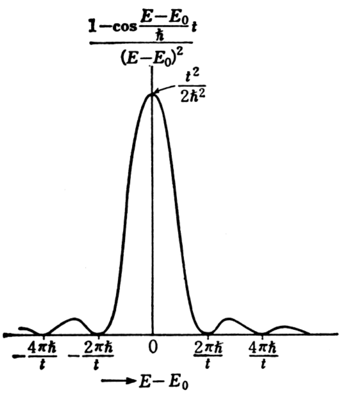
したがって, t という時刻で n の状態が見出される確率は,

$$|a_n(t)|^2 = \frac{2|\langle n|H'|0\rangle|^2}{(E_0 - E_n)^2}\left(1 - \cos\frac{E_n - E_0}{\hbar}t\right) \tag{2.64}$$

で，t とともに周期的に変化する．

素粒子論で出てくる問題では，終りの状態 n が連続スペクトルに属する場合，すなわち，ほとんど同じエネルギーの状態が n の近くに非常にたくさんあることが多い．たとえば散乱の問題で $\boldsymbol{k}$ という運動量で入射した粒子が $\boldsymbol{p}$ という運動量で出ていくとき，$\boldsymbol{p}$ の状態の近くには (2.44) で与えられるきわめてたくさんの状態が存在する（L は散乱の起こる領域にくらべてずっと大きくとってある)．このような時は，ある一つの n という状態にある確率というものはあまり意味がなく，それよりも n の近くのどれかの状態にある確率というものの方が物理的に測定されうるものであり，意味のあるものである．したがって (2.64) のかわりに，これを n の近くのすべての状態について加え合わせたものを考える．状態がたくさんあるから，和のかわり積分で置き換えてよい．エネルギーが E と $E+dE$ の間にある状態の数を $\rho(E)dE$ とすると，

$$\sum |a_n(t)|^2 = 2\int |\langle n|H'|0\rangle|^2 \frac{1 - \cos\dfrac{E - E_0}{\hbar}t}{(E - E_0)^2}\rho(E)dE. \tag{2.65}$$



2-3 図 (2.65) の被積分関数

ただし積分は $E=E_n$ の近くの小さい領域について行なう．t が $\hbar/E_0$ にくらべて大きいときは，被積分関数は $E=E_0$ に鋭い極大を持ち，$E-E_0$ が $\hbar/t$ の程度となるとほとんど 0 になってしまう．すなわち $t \gg \hbar/E_0$ だけ時間がたった後には，エネルギーがはじめのエネルギー E_0 と等しいような状態だけが 0 でない存在確率を持つことになる．これは**エネルギーの保存則**であり，エネルギーの等しい状態間の遷移のみが起こることを示している．

エネルギーが保存している状態に移る確率を求める際に，(2.65) の積分で $|\langle n|H'|0\rangle|^2$ および $\rho(E_n)$ は E_n についてゆっくり変化する関数であるから，ほとんど一定値としてよい．そうすると，

$$\sum |a_n(t)|^2 = 2|\langle n|H'|0\rangle|^2\rho(E_0)\int \frac{1 - \cos\dfrac{E - E_0}{\hbar}t}{(E - E_0)^2}dE.$$

積分は $E=E_0$ を含む小さい領域内で行なうのであるが，被積分関数は $E=E_0$ 以外で

はほとんど 0 であるから，積分範囲を $-\infty$ から $+\infty$ まで拡げても同じことである．積分は$\pi t/\hbar$ となり，

$$\sum|a_n(t)|^2=2|\langle n|H'|0\rangle|^2\rho(E_0)\frac{\pi}{\hbar}t$$

である．すなわち終状態の確率は時間に比例して増大する．したがって始状態 0 から終状態 n（正しくは n の近くのどこか）への単位時間あたりの**遷移確率** w_{n0} を定義すると，それは，

$$w_{n0}=\frac{2\pi}{\hbar}|\langle n|H'|0\rangle|^2\rho(E_n) \tag{2.66}$$

で与えられる．ただし $E_n=E_0$ である．

問題によっては第一近似の遷移が起こらないことがある．エネルギーが保存するような状態 $n(E_n=E_0)$ に対しては $\langle n|H'|0\rangle=0$ となる場合である．この時は a_n を第 2 近似まで求めないといけない．第 1 近似（2.63）を（2.61）の右辺に入れて積分すると，

$$a_n(t)=\sum_m\frac{\langle n|H'|m\rangle\langle m|H'|0\rangle}{E_0-E_m}\left[\frac{e^{i(E_n-E_0)t/\hbar}-1}{E_0-E_n}-\frac{e^{i(E_n-E_m)t/\hbar}-1}{E_m-E_n}\right]. \tag{2.67}$$

このうち括孤のなかの第 1 項による部分は（2.63）と同じ形であり，(2.63) の $\langle n|H'|0\rangle$ のかわりに，

$$\sum_m\frac{\langle n|H'|m\rangle\langle m|H'|0\rangle}{E_0-E_m}$$

で置き換えたものである．したがって終状態 n の遷移確率は前と同様に求められる．この際（2.67）の括孤内の第 2 項は分母が決して 0 にならないので（$E_m=E_n=E_0$ のときは $\langle m|H'|0\rangle=0$ の場合を考えている)，第 1 項のような鋭い極大を生ぜず，確率の計算にはぜんぜん影響を与えない．

結局，0 から n（の近く）への単位時間毎の遷移確率 w_{n0} は，

$$w_{n0}=\frac{2\pi}{\hbar}|T_{n0}|^2\rho(E_n). \tag{2.68}$$

ただし，

$$T_{n0}=\langle n|H'|0\rangle. \tag{2.69}$$

あるいは，これが 0 のときは，

$$T_{n0}=\sum_m\frac{\langle n|H'|m\rangle\langle m|H'|0\rangle}{E_0-E_m} \tag{2.70}$$

で与えられる．

このように $\langle n|H'|0\rangle$ が 0 でなければ遷移は第一近似で起こるが，$\langle n|H'|0\rangle=0$ なら

ば 0 から n の遷移は中間の状態 m を通して行なわれる．この中間状態のエネルギーは始状態（あるいは終状態）のエネルギーと等しくないにもかかわらずこの遷移が可能なのは，エネルギーが保存しない状態でも不確定性関係から $t \sim \hbar/|E_0 - E_m|$ というごく短い時間ならば存在し得るからである（(2.65) および 2-3 図参照）．こうして遷移はエネルギーの保存しない仮想的な中間状態を通して行なわれることがあり，これは量子力学で**トンネル効果**とよばれるものである．

〔例 題〕 Rutherford 散乱　上に求めた遷移確率の公式の応用として，荷電粒子が Coulomb ポテンシャルで散乱される場合を考える．この現象は Rutherford が研究したので **Rutherford 散乱**と呼ばれる．自由粒子を無摂動系とし，これにポテンシャル，

$$H' = a\frac{1}{r} \tag{2.71}$$

が摂動として加わったとする．a はポテンシャルを作る粒子の電荷 Q と，散乱される粒子の電荷 Q' の積である（$a = QQ'/4\pi$）．

運動量 $\boldsymbol{k}$ で入射した粒子が散乱されて $\boldsymbol{p}$ の運動量で出てくる確率を求める．始状態および終状態はそれぞれ，

$$\psi_0 = e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}/\hbar}/L^{3/2}, \qquad \psi_n = e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}/\hbar}/L^{3/2}. \tag{2.72}$$

遷移の行列要素は，

$$\langle n|H'|0\rangle = \frac{a}{L^3}\int\frac{e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{r}/\hbar}}{r}d\boldsymbol{r} = \frac{4\pi a}{L^3}\frac{\hbar^2}{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2}. \tag{2.73}$$

この計算をもう少しくわしく調べよう．$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})/\hbar$ を用いると，

$$\int\frac{e^{iqr}}{r}d\boldsymbol{r} = 2\pi\int\frac{e^{iqr\cos\theta}}{r}d\cos\theta\, r^2 dr = \frac{4\pi}{q}\int_0^\infty \sin qr dr. \tag{2.74}$$

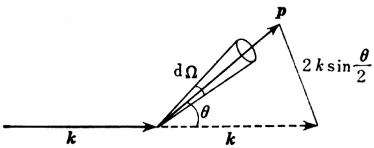
この最後の積分は不定である．これは Coulomb 場が無限の遠方まで拡がっているためである．実際問題ではこのようなことはなく，たとえば原子核の Coulomb 場については，核の近くではポテンシャルが (2.71) で与えられるが，まわりの電子のために遮蔽され，原子の外ではポテンシャルは 0 になっている．したがって実際には (2.71) のかわりに，たとえば，

$$a\frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

といった形のポテンシャルを用いるべきである．この関数は $\alpha r \ll 1$ の時は (2.71) と同じであるが，$\alpha r > 1$ になると r が増すと共に急激に減る．したがって $1/\alpha$ は原子の大きさを表わすと考えてよい．これを用いると (2.74) の積分のかわりに，

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r}\sin qr dr = \frac{q}{q^2+\alpha^2}$$

であるが，もし粒子の運動量変化が大きく，波長 $1/q$ が原子の大きさに比して小さいなら（$1/q \ll 1/\alpha$ なら），上の積分は $1/q$ となる．この場合 (2.73) が得られる．



2-4 図　入射運動量 $\boldsymbol{k}$ と散乱後の運動量 $\boldsymbol{p}$ との関係

運動量が $\boldsymbol{p}$ の近くの立体角 $d\Omega$ の内にあり，エネルギーがEと $E+dE$ の間にある状態の数は (2.45) により，

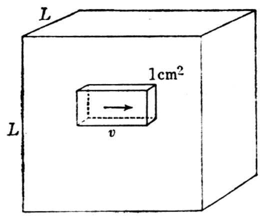
$$\rho(E)dE=\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 pmd\Omega\, dE$$

で与えられるから，単位時間に起こる遷移確率は (2.68), (2.69) により，

$$w_{n0}=\frac{2\pi}{\hbar}\frac{(4\pi a)^2}{L^6}\frac{\hbar^4}{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^4}\frac{pmL^3}{(2\pi\hbar)^3}d\Omega$$

$$=\frac{a^2}{L^3}\frac{km}{4k^4\sin^4\dfrac{\theta}{2}}d\Omega. \qquad (2.75)$$

エネルギーの保存から，$k=p$ であり，θ は散乱角である．



2-5 図　$v\times 1\,\mathrm{cm}^2$ の直方体の中にある粒子は，1秒の間に右端の $1\,\mathrm{cm}^2$ の断面を通過する．

散乱問題では確率のかわりに**断面積**ということばが用いられる．(2.75) は入射粒子が L^3 の箱の中に1個存在するとき，毎秒 $\boldsymbol{p}$ 方向の $d\Omega$ 内に散乱される粒子の数(もちろん1より小さい)を与える．もし粒子が進行方向に垂直な $1\,\mathrm{cm}^2$ あたり毎秒1個の割合で入射するときは，毎秒出てくる粒子数はどうなるだろうか．それを出すには L^3 内に1個という粒子密度を v(速度)$\times 1\,\mathrm{cm}^2$ 内に1個という密度に直せばよい．すなわち (2.73) に L^3/v を掛けてやる．$v=k/m$ であるから，

$$d\sigma=a^2\frac{m^2}{4k^4\sin^4\dfrac{\theta}{2}}d\Omega. \qquad (2.76)$$

これを $\boldsymbol{p}$ 方向に散乱される**微分断面積**という．

$d\sigma$ は cm^2，すなわち面積の次元を持っている．$d\sigma$ の物理的意味は次のとおり，入射方向に垂直に $d\sigma$ の大きの標的を書いておき，古典的に考えて入射粒子がこれにあたったなら $\boldsymbol{p}$ 方向に散乱されて出てくるとする．こうすると散乱粒子の数はちょうど量子論で計算したものと一致しているのである．

〔問題 2.3〕 陽子が湯川ポテンシャル，

$$V(r)=\frac{g^2}{4\pi}\frac{e^{-r/\lambda}}{r}$$

で散乱される時の微分断面積を摂動論により求めよ．特に入射エネルギーが非常に小さいときの全断面積を cm² で求めよ． 全断面積とは微分断面積をあらゆる散乱方向について加え合わせたものである．また，

$$\lambda = \frac{\hbar}{\mu c}, \quad \mu = \pi^0 \text{ の質量}, \quad \frac{g^2}{4\pi\hbar c} = 0.3$$

とする．

〔解〕 0 エネルギーの時の全断面積は，

$$\sigma = 16\pi\left(\frac{g^2}{4\pi\hbar c}\right)^2\left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2\left(\frac{M}{\mu}\right)^2 \doteqdot 4 \times 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2 = 4\mathrm{b}.$$

ただし M は陽子の質量， $10^{-24}\,\mathrm{cm}^2$ のことを **1 バーン (1 b)** という． またその千分の1を 1 **ミリバーン (1 mb)**， 100 万分の1を 1 **マイクロバーン (1 μb)** という．

$$10^{-24}\,\mathrm{cm}^2 = 1\,\mathrm{b},$$
$$10^{-27}\,\mathrm{cm}^2 = 1\,\mathrm{mb},$$
$$10^{-30}\,\mathrm{cm}^2 = 1\,\mu\mathrm{b}.$$

0 エネルギーの全断面積を，

$$\sigma|_{E=0} = 4\pi a^2$$

と書いたとき， a を **散乱の長さ (scattering length)** という． いまの場合，

$$a = \frac{g^2}{4\pi\hbar c}\frac{\hbar}{\mu c}\frac{2M}{\mu} = 5.6 \times 10^{-13}\,\mathrm{cm}.$$

§ 2.6 保 存 則

古典力学ではエネルギー，運動量の保存などの定理があったが，量子力学でも同様の保存則が存在する．

ある物理量 A が系の Hamiltonian H と可換であるとする．

$$[A, H] = 0. \tag{2.77}$$

ある時刻 t で状態 $\psi(t)$ が A の固有状態ならば， ψ が，

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi$$

にしたがって変化しても，いつまでも A の固有状態であり，同じ固有値に属する．それは

$$A\psi(t) = a\psi(t)$$

ならば，

$$\psi(t+\Delta t) = \psi(t) + \frac{\Delta t}{i\hbar}H\psi(t)$$

に対して，

$$A\psi(t+\Delta t) = A\psi(t) + \frac{\Delta t}{i\hbar}AH\psi(t) = a\psi(t) + \frac{\Delta t}{i\hbar}HA\psi(t)$$

$$= a\left\{\psi(t) + \frac{\Delta t}{i\hbar}H\psi(t)\right\} = a\psi(t+\Delta t).$$

したがって，$\psi(t+\Delta t)$ も A の固有状態で，ψ はいつまでも A の固有値 a に属する固有状態である．特に衝突の前に状態が A の固有状態にあったならば，その固有値は反応の後でも保存されている．

H は自分自身と可換だから保存する量である．エネルギーの保存則については前の節でも述べた．この他多くの保存量については以下の章でくわしく論ずる．

いままでは物理量を表わす演算子は時間がたっても変らず，状態が変化するという立場（**Schrödinger 表示**）をとってきた．ある物理量 A を考えると，実際に観測される量は $\langle\psi, A\psi\rangle$ という平均値であるので ψ が時間的に変化し，A が時間によらぬ演算子と考える代りに，別の立場として ψ は一定で A が時間的に変る量と考えることもできる（**Heisenberg 表示**）．ある量の期待値の時間的変化は Schrödinger 表示では，

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle=\langle\dot{\psi}, A\psi\rangle+\langle\psi, A\dot{\psi}\rangle=\frac{i}{\hbar}\langle H\psi, A\psi\rangle-\frac{i}{\hbar}\langle\psi, AH\psi\rangle$$

$$=\frac{i}{\hbar}\langle\psi, [H, A]\psi\rangle$$

と計算される．一方これが Heisenberg 表示での，

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle=\langle\psi, \dot{A}\psi\rangle$$

に等しくなるためには，

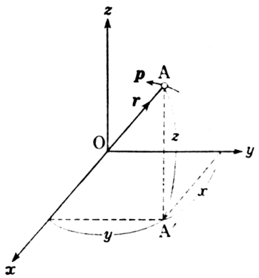
$$\frac{dA}{dt}=\frac{i}{\hbar}[H, A] \tag{2.78}$$

となっていればよい．これが Heisenberg 表示での運動方程式である．保存量は Heisenberg 表示で時間がたっても変らない量で，(2.77) が A が保存量であるための条件になることは (2.78) より明らかである

第3章　素粒子のスピン

§ 3.1　軌道角運動量

古典力学において質点 A が中心 O（座標原点）のまわりを回転している系を考えよう．その系の中心 O のまわりの**軌道角運動量** $\boldsymbol{M}$ は質点の座標 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$，その運動量 $\boldsymbol{p}(p_x, p_y, p_z)$ の時，次のように書ける．



3-1 図　原点 O のまわりの質点 A の回転

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}. \tag{3.1}$$

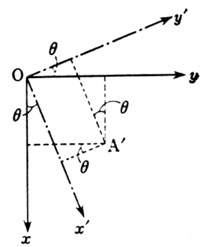
あるいは各成分に分けて書くと，

$$M_x=yp_z-zp_y,\quad M_y=zp_x-xp_z,$$
$$M_z=xp_y-yp_x. \tag{3.1′}$$

量子力学では運動量 $\boldsymbol{p}$ は波動関数に働く演算子 $\boldsymbol{p}=-i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{r}$ ((2.2)) になるから，したがって (3.1) で表わされる軌道角運動量 $\boldsymbol{M}$ も同様に演算子である．$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ はそれぞれエルミット量であるから $\boldsymbol{M}$ もエルミットのことを容易に示しうる．この $\boldsymbol{M}$ の物理的意味をはっきりさせるために座標系を z 軸のまわりにある角度 θ ラジアンだけ回転してみよう．回転前の質点 A の座標 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ と回転後の座標 $\boldsymbol{r}'(x', y', z')$ との関係式は，

$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta,\quad y'=-x\sin\theta+y\cos\theta,$$
$$z'=z \tag{3.2}$$

である．



3-2 図　z 軸のまわりの角度 θ の座標回転

特に回転角 θ の小さい微小回転 ($|\theta|\ll 1$) に対しては θ^2 以上の θ の高いべきに比例する項を省略できる．この場合，微小回転のことを示すために θ の代りに $\Delta\theta$ と書くと，(3.2) 式は次のようになる．

$$x'=x+y\Delta\theta,\quad y'=-x\Delta\theta+y,\quad z'=z. \tag{3.3}$$

(3.2), (3.3) は質点を固定して座標系を軸のまわりに角度 θ，または $\Delta\theta$ だけ回転した時の座標変換と考える代りに，座標系はそのままにして質点 A を z 軸のまわりに角度 $-\theta$，または $-\Delta\theta$ だけ回転した時の A の新しい座標を与える式と考えてもよい．

さて，系の状態を表わす波動関数 $\psi(x, y, z)$ はこの変換により $\psi'(x, y, z)$ に移る．

$\psi'(x', y', z') = \psi(x, y, z)$ であるから，z 軸のまわりの微少回転の場合には，

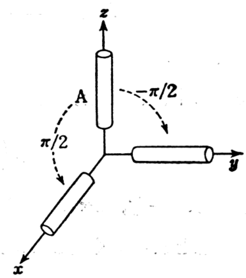
$$\begin{aligned}\psi'(x, y, z) &= \psi(x - y\Delta\theta,\ y + x\Delta\theta,\ z)\\ &= \psi(x,y,z) - \Delta\theta\left(y\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\\ &= \psi(x, y, z) + i\frac{\Delta\theta}{\hbar}M_z\psi(x, y, z)\\ &= \left(1 + i\frac{\Delta\theta}{\hbar}M_z\right)\psi(x, y, z).\end{aligned} \tag{3.4}$$

したがって角運動量の z 成分 M_z は系を z 軸のまわりに微小角度回転する演算子ということができる．z 軸のまわりに座標系を有限な角度 θ だけ回転するには，あるいは座標系を固定し系を $-\theta$ だけ回転するには，(3.3) の微小回転を多数回くり返して行なえばよい．θ だけの回転を n 回 ($n \gg 1$) の等角度の微小回転 $\Delta\theta(=\theta/n)$ のくり返しとして行なうと，この回転の演算子は，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + i\frac{\Delta\theta}{\hbar}M_z\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + i\frac{\theta}{n\hbar}M_z\right)^n = \exp\left(i\frac{\theta}{\hbar}M_z\right) \tag{3.5}$$

となり，座標系を角度 θ または系を $-\theta$ 回転させる演算子は $\exp\left(i\dfrac{\theta}{\hbar}M_z\right)$ で与えられる．

同様に x，y 軸のまわりの角度 θ の座標系回転を起こす演算子はそれぞれ $\exp\left(i\dfrac{\theta}{\hbar}M_x\right)$，$\exp\left(i\dfrac{\theta}{\hbar}M_y\right)$，また任意の軸のまわりの回転はその軸方向の軌道角運動量の成分を用いて同様な式で表わされる．



3-3 図　物体 A の回転

さて，次に異なる軸のまわりに次々に座標系，または系自身を回転した時を考えよう．一例として z 軸上に横たわっている細長い物体 A を初め x 軸のまわりに $-\pi/2$，次に y 軸のまわりに $\pi/2$ 回転してみよう．(座標系の回転の代りに系を回転する．) その結果は 3-3 図の通りで物体 A は y 軸の上に乗る (y 軸のまわりの回転は A を移動しない)．この二つの回転を順序を交換して行なうと，こんどは A は x 軸の上にくる．これから明らかなように

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2\hbar}M_y\right)\exp\left(-i\frac{\pi}{2\hbar}M_x\right) \neq \exp\left(-i\frac{\pi}{2\hbar}M_x\right)\exp\left(i\frac{\pi}{2\hbar}M_y\right).$$

一般に異なる軸のまわりの回転を次々に行なうと，その順序によって結果が異なってくる．このことは異なる方向への角運動量の成分が相互に可換でないことに相当する．(3.1′)

を用いて確かめられるように，交換関係は，

$$[M_x,\ M_y]=i\hbar M_z,$$
$$[M_y,\ M_z]=i\hbar M_x, \qquad (3.6)$$
$$[M_z, M_x]=i\hbar M_y$$

である.

角運動量の大きさの平方 $\boldsymbol{M}^2$ は,

$$\boldsymbol{M}^2=M_x{}^2+M_y{}^2+M_z{}^2. \qquad (3.7)$$

(3.6) を用いてわかるように $\boldsymbol{M}$ の各成分と可換である.

$$[\boldsymbol{M}^2,\ M_x]=[\boldsymbol{M}^2,\ M_y]=[\boldsymbol{M}^2,\ M_z]=0. \qquad (3.8)$$

したがって一つの系の回転の固有状態は，(2.25) よりわかるように，互に可換な量の同時の固有状態として表わされるから角運動量の大きさと，その一つの成分，たとえば M_z の値を与えることで決まり，その場合 M_x，M_y の値は定まらない．そこで角運動量の大きさが $k\hbar$，M_z の値が $m\hbar$ を持つ固有状態を $\psi_{k,m}$ で表わし，k，m がどのような値をとれるかを調べよう.

$\psi_{k,m}$ が $\boldsymbol{M}^2$，M_z の固有状態であることから，

$$\boldsymbol{M}^2\,\psi_{k,m}=(k\hbar)^2\psi_{k,m},\quad M_z\,\psi_{k,m}=m\hbar\psi_{k,m}$$

とおく．後にわかるように k^2 は或る整数 l との間に $k^2=l(l+1)$ の関係があるので，$k\hbar$ の代りに $l\hbar$ を**角運動量の大きさ**とよび，$\psi_{k,m}$ の代りに $\psi_{l,m}$ と書く.

$$\boldsymbol{M}^2\psi_{l,m}=l(l+1)\hbar^2\psi_{l,m},\quad M_z\psi_{l,m}=m\hbar\psi_{l,m}. \qquad (3.9)$$

まず m のとり得る値を考えてみよう．$\psi_{l,m}$ で表わされる系を z 軸のまわりに 2π (360°) 回転すると，回転後の状態は (3.5)，(3.9) を用い，

$$\exp\left(-i\frac{2\pi}{\hbar}M_z\right)\psi_{l,m}=\exp(-i\,2m\pi)\psi_{l,m}$$

となる．一方，2π の回転はまったく回転しないことと同一であるから，新しい状態は元の状態とまったく同じでなければならない．したがって，

$$\exp(-i\,2m\pi)=1. \qquad (3.10)$$

これより m は整数値 $m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ でなければならない.

$\psi_{l,m}$ は M_x，M_y の固有状態ではないので，これらを $\psi_{l,m}$ に働かすと他の固有状態に移る．いま，M_x，M_y の代りに次の演算子を考えよう.

$$M_\pm=M_x\pm iM_y. \qquad (3.11)$$

$M_\pm$，M_z の間の交換関係は (3.6) を用いると，

$$[M_z, M_\pm] = \pm \hbar M_\pm, \quad [M_+, M_-] = 2\hbar M_z. \tag{3.12}$$

また $M_\pm$ と $\boldsymbol{M}^2$ は可換である．

$M_\pm$ の $\psi_{l,m}$, $\psi_{l',m'}$ 状態間の行列要素，

$$\langle l'm' | M_\pm | l, m \rangle = \int \psi^*_{l',m'} M_\pm \psi_{l,m} d\boldsymbol{r} \tag{3.13}$$

を調べると，まず $M_\pm$ が $\boldsymbol{M}^2$ と可換のことから $l = l'$ でなければ行列要素は 0 となる．そこでこの場合に限ると，(3.12) の第一式を用い，

$$\begin{aligned}\hbar \langle l, m' | M_\pm | l, m \rangle &= \pm \langle l, m' | [M_z, M_\pm] | l, m \rangle \\ &= \pm \hbar (m' - m) \langle l, m' | M_\pm | l, m \rangle.\end{aligned}$$

これより，

$$(m' - m \mp 1) \langle l, m' | M_\pm | l, m \rangle = 0.$$

したがって，次の条件が得られる．

$$\begin{aligned} &m' \neq m + 1 \text{ の時} \quad \langle l, m' | M_+ | l, m \rangle = 0, \\ &m' \neq m - 1 \text{ の時} \quad \langle l, m' | M_- | l, m \rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

$M_\pm$ はそれぞれ $m' = m \pm 1$ の時のみ行列要素を持ち，M_+ は m を 1 だけ増す回転の演算子，M_- は 1 だけ減らす演算子である．

そこで次のように書く．

$$M_+ \psi_{l,m} = \hbar c_m \psi_{l,m+1}, \quad M_- \psi_{l,m+1} = \hbar d_m \psi_{l,m}. \tag{3.15}$$

M_+ と M_- は M_x, M_y がエルミット量のことを用いると，(3.11) から次式をみたすことが示される．

$$\langle l, m+1 | M_+ | l. m \rangle = \langle l, m | M_- | l, m+1 \rangle^*.$$

したがって，

$$c_m = d_m^*. \tag{3.16}$$

交換関係 (3.12) の第 2 式の両辺の $\psi_{l,m}$ 状態での期待値を計算すると (3.15), (3.16) により次の関係式が得られる．

$$|c_{m-1}|^2 - |c_m|^2 = 2m.$$

このような関係をみたす $|c_m|^2$ は簡単にわかるように，

$$|c_m|^2 = A - m(m+1).$$

ここで A は m によらない任意の定数である．

M_+ をくり返し $\psi_{l,m}$ に働かせると (3.15) により次々に m の大きな状態 $\psi_{l,m+1}$, $\psi_{l,m+2}$, $\cdots$ が得られるが，M_z の値がある値を越すと $m(m+1)$ が A より大きくなり $|c_m|^2$ が負になるというむじゅんを生ずる．これをさけるためにはどこかで c_m が 0 に

なり $\psi_{l,m}$ にそれ以上 M_+ を働かせても新しい状態が得られないようになっているべきである．この M_z の値の最大値をいま l としよう．したがって，

$$|c_m|^2 = l(l+1) - m(m+1) \tag{3.17}$$

で，$m=l$ の時 $|c_m|^2=0$ となり $\psi_{l,l+1}$, $\psi_{l,l+2}$, $\cdots$ の状態は得られなくなる．同様に M_- を $\psi_{l,m}$ にくり返し働かすと順次 m の一つずつ小さい状態が得られるが $\psi_{l,-l}$ が最後で $|c_{-l-1}|^2=0$ より $\psi_{l,-l-1}$, $\psi_{l,-l-2}$, $\cdots$ の状態は存在しない．

$\boldsymbol{M}^2$ を $M_\pm$ と M_z で表わすと，

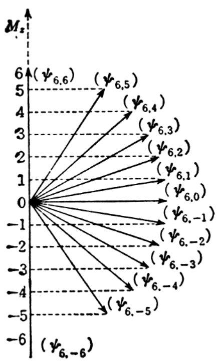
$$\boldsymbol{M}^2 = \frac{1}{2}(M_+M_- + M_-M_+) + M_z^2. \tag{3.18}$$

これを用いて，

$$\boldsymbol{M}^2\psi_{l,m} = \hbar^2\left(\frac{1}{2}|c_m|^2 + \frac{1}{2}|c_{m-1}|^2 + m^2\right)\psi_{l,m} = l(l+1)\hbar^2\psi_{l,m}. \tag{3.19}$$

(3.9) と比較して (3.17) で定義された整数値 l は角運動量の大きさ（$\hbar$ を単位にして）と一致することがわかる．

量子力学で記述される系の角運動量は，このように $\hbar$ を単位にして整数値 $l(=0, 1, 2 \cdots)$ をとり，その成分 M_z は l, $l-1, \cdots -l$ の $(2l+1)$ 個の異なる値をとる．



3-4 図　固有状態 $\psi_{l,m}$ における角運動量 $\boldsymbol{M}$ の方向（$l=6$ の場合）

l の値が同一で m の異なる状態は角運動量の大きさが同じで回転の向きの異なる回転状態と考えられる．もし回転系に外から力が加わっていない場合，また外からの力が方向性を持たず回転系の中心（原点）に対し球対称の時は，座標系または系を回転しても系と外力との相対的な関係は変らない．したがって回転の向きの異なる $(2l+1)$ 個の状態は同一のエネルギーを持ち縮退した状態を作っている．

［問題 3.1］ 座標原点のまわりを回転している質点の回転の固有状態 $\psi_{l,m}$ を極座標を用いて求めよ．

［解］ 極座標 (r, θ, φ) を用いると，角運動量およびその成分は次のようになることを示せ．

$$\begin{aligned}
M_x &= i\hbar(\sin\varphi\,\partial/\partial\theta + \cot\theta\cos\varphi\,\partial/\partial\varphi),\\
M_y &= i\hbar(-\cos\varphi\,\partial/\partial\theta + \cot\theta\sin\varphi\,\partial/\partial\varphi),\\
M_z &= -i\hbar\,\partial/\partial\varphi,\\
\boldsymbol{M}^2 &= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].
\end{aligned} \tag{3.20}$$

次に $M_z\psi_{l,m}=m\hbar\psi_{l,m}$ を解いて，$\psi_{l,m}$ が次のように書ける．

$\psi_{l,m}(\theta,\ \varphi)=\varphi_{l,m}(\theta)e^{im\varphi}$，さらに $\psi_{l,m}(\theta,\ \varphi)=\psi_{l,m}(\theta,\ \varphi+2\pi)$ より $m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$ を示す．

次に $M^2\psi_{l,m}=l(l+1)\hbar^2\psi_{l,m}$ より，$\psi_{l,m}$ のみたす式が出る．

$$-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\varphi_{l,m}(\theta)=l(l+1)\varphi_{l,m}(\theta).$$

この式とルジャンドル倍関数の微分方程式，

$$\left\{(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\right\}P_l^m(x)=0$$

との比較から，$\varphi_{l,m}=C_{l,m}P_l^m(\cos\theta)$ が得られる．$C_{l,m}$ は θ によらぬ定数である．

$\psi_{l,m}$ を規格化すると　$\int|\psi_{l,m}|^2 d\Omega=1\quad(d\Omega=\sin\theta\, d\theta d\varphi)$，

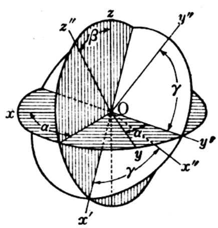
$C_{l,m}$ の値が定まり，結局，

$$\psi_{l,m}=Y_l^m(\theta,\ \varphi)=\frac{(-1)^{m+l}}{2^l l!}\left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right]^{1/2}\sin^m\theta\frac{d^{l+m}}{d(\cos\theta)^{l+m}}(\sin^{2l}\theta)e^{im\varphi}. \tag{3.21}$$

$C_{l,m}$，したがって $\varphi_{l,m}$ は規格化の条件から完全にきまらず任意の位相因子 $e^{i\eta_{lm}}$ を掛けてもよい．η_{lm} は $\theta,\ \varphi$ によらない実数である．このような波動関数の位相の任意性は多くの場合物理的に異なる結果を与えないが，特別な場合には意味を持ってくる．上のようにとることは (3.17) の $c_m=\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}$ ととることに相当する．

〔問題 3.2〕 座標系を Euler 角度 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 回転するときの回転の演算子を求めよ．回転前の座標系での M^2, M_z の固有状態 $\psi_{l,m}$ がこの変換で新しい座標系での M^2, M_z の固有状態 $\psi_{l'',m''}$ に移る行列要素を $l=1$ に対して求めよ．

〔解〕 Euler 角度 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の回転は，1) z 軸のまわりの角度 α の回転，2) 新しい y 軸（y' 軸）のまわりの角度 β の回転，3) 新しい z 軸（z'' 軸）のまわりの角度 γ の回転を順次行なって得られる (3-5 図)．



3-5 図

回転の演算子は (3.5) より

$$D(\gamma,\beta,\alpha)=\exp\frac{i\gamma}{\hbar}M_z\exp\frac{i\beta}{\hbar}M_y\exp\frac{i\alpha}{\hbar}M_z$$

である．元の座標系での $\psi_{l,m}$ 状態と新しい座標系での $\psi_{l'',m''}$ 状態の間の行列要素を $\langle l''m''|D(\gamma,\ \beta,\ \alpha)|l,\ m\rangle=D^l_{m'',m}(\gamma,\ \beta,\ \alpha)$ と書く．M^2 は $D(\gamma,\ \beta,\ \alpha)$ と可換なので $l''=l$ である．(3.9) より $D^l_{m'',m}(\gamma,\ \beta,\ \alpha)$ $=\exp im\gamma d^l_{m'',m}(\beta)\exp im\alpha$，ただし $d^l_{m'',m}(\beta)=\langle l,\ m''|\exp\frac{i\beta}{\hbar}M_y|l,\ m\rangle$ である．

これを求めるには指数関数をべき展開し，$M_y=(-i/2)(M_+-M_-)$ に対し $\langle 1,\ m+1|M_+|1,\ m\rangle=\langle 1,\ m|M_-|1,\ m+1\rangle=\sqrt{2-m(m+1)}$

$d^1_{m'',m}(\beta)$ の行列要素

m'' \ m	$+1$	0	-1
$+1$	$(1+\cos\beta)/2$	$\sin\beta/\sqrt{2}$	$(1-\cos\beta)/2$
0	$-\sin\beta/\sqrt{2}$	$\cos\beta$	$\sin\beta/\sqrt{2}$
-1	$(1-\cos\beta)/2$	$-\sin\beta/\sqrt{2}$	$(1+\cos\beta)/2$

を用いればよい．結果は表に示す通りである．

§3.2　素粒子のスピン

素粒子は単なる質点でなく，一般にある種の回転をしている系と考えよう．この回転の角運動量を素粒子の**スピン**とよぶ．この回転は軌道角運動量と同様に量子力学的なものと考えられ，したがって回転軸の向きはスピンの大きさ $S\hbar$ の場合に $2S+1$ 個の異なる方向をのみとり得る．このことから素粒子のスピンの大きさを知るには，一定の運動量 $\boldsymbol{P}$，たとえば静止（$\boldsymbol{P}=0$）している素粒子がいくつの異なる状態（内部状態）に存在し得るかを調べればよい．

もし（$2S+1$）個の異なる状態があれば，そのスピンの大きさは $S\hbar$ で，それぞれ S_z が S, $S-1$, $\cdots$, $-S$（$\hbar$ を単位にして）の状態に対応する．

π 中間子，K 中間子等はスピン 0 の粒子で内部回転のない素粒子のことが実験的に確かめられ，また光子や ρ 粒子（第11章参照）はスピン1の粒子である．素粒子のスピンは軌道角運動量の場合と異なり，その大きさは必ずしも整数値をとるとは限らず，自由度 $2S+1$ が 2, 4, $\cdots$ の粒子も存在する．これはスピンがそれぞれ 1/2, 3/2, $\cdots$ 等の半整数値をとる素粒子である．今日知られている素粒子は光子を除いてスピン 0，または 1/2 で，スピンの大きな素粒子は見つかっていない（1-2 表参照）．第 11 章で述べるようにスピン 1（ρ, ω 粒子等），スピン 3/2（Y_1^*, N_1^* 粒子等）等の高いスピンを持つ粒子も見つかっているが，これらは Ω^- を除いて寿命が非常に短く（$\lesssim 10^{-22}$ sec）素粒子世界の時間単位で測ってもきわめて不安定なものである．したがって素粒子の励起状態といわれている．一般にスピンの大きくなるほど粒子の質量は重くかつ不安定になっており，多分将来スピンの大きく寿命の長い素粒子は新には見つからないであろう．しかしこれら励起状態の粒子と 1-2 表の素粒子といずれが基本的であるかについては必ずしもはっきりした解答はなく，現在における一つの重要な問題になっている．

さて，電子，陽子，中性子等スピン 1/2 の素粒子のスピンについて調べてみよう．これらは S_z の値がそれぞれ $+\hbar/2$, $-\hbar/2$ の二つの異なる状態をとるから，その内部状態を表わす波動関数には二つの固有状態 u_+, u_- が存在する．これを表わすのに2行1列の行列を用いよう．

$$u_+=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad u_-=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

一般の内部状態は，S_z が $+\hbar/2$, $-\hbar/2$ の固有状態 u_+, u_- が適当に重なり合った

もので，

$$u = au_+ + bu_- = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

$|a|^2$, $|b|^2$ はそれぞれ S_z が $+\hbar/2$, $-\hbar/2$ の値を持つ確率である．S_z はこのいずれかの値をとるから，

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{3.24}$$

さて，$\boldsymbol{S}$ が実際に角運動量と考えられるためには，座標系の回転に対して軌道角運動量 $\boldsymbol{M}$ と同様な性質を示さなければならない．単に二つの固有状態が存在するだけでは，S_z が角運動量の z 成分であるということにはならない．このためには座標系をある軸，たとえば z 軸のまわりに角度 θ だけ回転したとき，$\exp\left(i\dfrac{\theta}{\hbar}S_z\right)$ が回転の演算子になっていなければならない．

$$u \to u' = \exp\left(i\frac{\theta}{\hbar}S_z\right)u. \tag{3.25}$$

また $\boldsymbol{S}$ の各成分の間には（3.6）と同じ交換関係が成立する必要がある．$\boldsymbol{S}$ の代りに，

$$\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} \tag{3.26}$$

と書くと，この関係は，

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y.$$

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{S})$ は $u_\pm$ で表わされる2次元の内部状態 u を再び2次元の内部状態に移す演算子で，したがって，2行1列の u を他の2行1列の u' に移す2行2列の行列で書くことができる．

$u_\pm$ が σ_z の固有値 ± 1 固有状態であることから，

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

σ_x, σ_y から作られる，

$$\sigma_\pm = \frac{\sigma_x \pm i\sigma_y}{2} \tag{3.27}$$

は軌道角運動量の $M_\pm$ と同様に上の σ の交換関係から σ_z の値を ± 1 だけ変える演算子（行列）であることがわかる．したがって，

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これより，

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

が得られる．この σ を **Pauli のスピン行列**とよぶ．

(3.28) から直接確かめられるように，σ の成分間には次の関係がある．

$$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z, \quad \sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x, \quad \sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$$

$$\sigma_x{}^2 = \sigma_y{}^2 = \sigma_z{}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv 1. \tag{3.29}$$

スピン角運動量の大きさ $\left(\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)^2$ は，

$$\left(\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_x + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2) = \hbar^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}$$

となり，ちょうどスピンの大きさが $\frac{1}{2}$ になっている．

スピン1以上の粒子についても同様に内部座標に働くスピン演算子を導入することができる．上の例からわかるように，素粒子のスピンは必ずしも大きさを持った素粒子の回転と考える必要はなく，質点と考えても上述のように内部自由度を導入できる．運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー E で運動している $\sigma_z = \pm 1$ のスピン 1/2 粒子の状態は，

$$\psi_\pm = u_\pm \exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr} - Et) \tag{3.30}$$

で表わされ，$u_\pm$ は粒子の空間運動とは独立の内部自由度の状態である．

スピンの大きさ S は素粒子の内部自由度の数 f が $2S+1$ に等しいことより，$f=0$, 1, 2, $\cdots$ に対応して $S=0$, 1/2, 1, $\cdots$ が得られる．したがって S は整数，または半整数値をとらねばならない．例外として質量0の粒子である光子（γ）およびニュートリノ（ν_e, ν_μ）はこの関係をみたさず，光子のスピンは1であるが $f=2$，ニュートリノ（ν_e, ν_μ）のスピンは 1/2 であるが $f=1$ で，$(2S+1)$ 個の自由度のうちの一部の状態にのみこれらの粒子が存在しうる．この特別な事情については第 6，7 章で論ずる．3-1 表は各素粒子に対する f と S の値である．

3-1 表　素粒子のスピンと内部自由度の数

	S	f
p, n, Λ, $\Sigma^{\pm,0}$, $\Xi^{0,-}$	1/2	2
μ, e	1/2	2
π, K	0	1
ν_e, ν_μ	1/2	1
γ	1	2

以上の議論では内部自由度の数 f から素粒子のスピンのとりうる値を議論したが，$f=2S+1$ の関係は S が整数値および 1/2（一般に半整数）の場合に成立したことを示したにすぎないから，他の可能な S の値があるかもしれない．この点をさらにここで調べるために，§3.1 の議論を吟味し直すことにする．

S は §3.1 の M と同じ交換関係にしたがうとするので，そこでの議論はほとんどそ

のまま使える．S^2 S_z の固有値を $S(S+1)\hbar^2$, $m\hbar$ とし，その固有状態を $\psi_{s,m}$ とする．z 軸のまわりに角度 2π だけ回転すると $\psi_{s,m} \to \exp(i2\pi S_z/\hbar)\psi_{s,m} = \exp(i2\pi m)\psi_{s,m}$. 一方，$2\pi$ の回転は系を回転しないことと同じだから，回転前後の状態は等しくなければならない．しかし系の状態には任意の位相 $\exp(i\alpha)$（α は定数）の不定性があるから，一般には (3.10) は成り立たず，

$$\exp(i2\pi m) = \exp(i\alpha) \tag{3.10'}$$

であればよい．α は r 等の変数を含まない定数である．

(3.10) のかわりに，(3.10)′ が成立しているとすると，m は整数である必要はない．そこで $m = m_0$ で与えられたある固有値を持つ固有状態 ψ_{s,m_0} から出発し，これから $S_\pm = S_x \pm iS_y$ を用いて $m = m_0 \pm 1$, $m_0 \pm 2$, $\cdots$ の固有状態を順次作ってみる．

$$S_+\psi_{s,n+m_0} = \hbar c_n \psi_{s,n+1+m_0},$$
$$S_-\psi_{s,n+1+m_0} = \hbar d_n \psi_{s,n+m_0} \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

とおくと，

$$c_n = d_n^*, \quad |c_n|^2 = A - (n+m_0)(n+1+m_0)$$

が得られる．A は n によらない定数，$|c_n|^2$ は $|n|$ が大きくなると負になるので，このようなむじゅんがおきないためには，ある正整数 n_+ と負整数 n_- に対し $|c_n|^2 = 0$ となり，$m > n_+ + m_0$ および $m < n_- + m_0 + 1$ の状態は $S_\pm$ を用いて作れなくなっていればよい．すなわち，

$$A = (n_+ + m_0)(n_+ + 1 + m_0) = (n_- + m_0)(n_- + 1 + m_0).$$

この式から $2m_0 = -n_+ - n_- - 1$ が導かれる．したがって m_0 は整数または半整数でなければならぬ．$m_0 + n_+ (= -m_0 - n_- - 1)$ を S とおくと S（整数または半整数）はスピンの大きさで，m は S, $S-1$, $\cdots$, $-S$ の $(2S+1)$ 個の値をとる．したがって，スピンは整数または半整数に限ることがわかる．(3.10)′ の α の値はスピンが整数か半整数かに応じてそれぞれ $\exp(i\alpha) = +1$, -1 である．

§ 3.1 では軌道角運動量 $\boldsymbol{M}$ が作用する波動関数は，r の一価関数であり，(3.10) が成り立つとしたので整数の固有値 l, m が得られた．しかし波動関数が一価である必然性はないので，θ, φ のもっと一般の波動関数（(3.10) の成り立たない関数も含めて）を考えてみよう．こうして半整数の軌道角運動量も得られるなら，軌道角運動量とスピン角運動量を区別せずにひとまとめにして考えることができるかもしれない．だがこの考えはうまくいかない．

波動関数が一価という制限をやめると，M_z の固有値 m は整数でなくてもよい．l がある正の実数とすると，

$$\varphi_{l,l}=\sin^l\theta\, e^{il\varphi}$$

という関数は (3.20) の M_z, M^2 に対し,

$$M_z\varphi_{l,l}=l\hbar\,\varphi_{l,l}$$
$$M^2\varphi_{l,l}=\hbar^2 l(l+1)\,\varphi_{l,l}$$

の微分方程式を満足する．しかしこの $\varphi_{l,l}$ に M_- を次々に掛けて新しい関数を作っていくと，l が整数でない限り $\sin\theta$ の負のべきが生じて，その関数の2乗に $\sin\theta$ を掛けて θ で積分したものが収束しなくなる．したがって (2.10) のように規格化ができず，波動関数として許されないものである．このために § 3.1, § 3.2 でやったように M_- を何回掛けても，やはり波動関数になるとした議論は使えない．この意味で，軌道角運動量の大きさは整数に限られ，スピン半整数の状態を $l=$ 半整数 の球関数で表わすことはできない．

〔問題 3.3〕 次の条件をみたす Pauli スピン σ_x, σ_y, σ_z を求めよ．

(i) $\boldsymbol{\sigma}$ は交換関係 (3.29) をみたす，

(ii) σ_x, σ_y, σ_z はそれぞれエルミット量，

(iii) $u_\pm$ (3.22)は σ_z の固有値 ±1 の固有状態．

〔解〕 $\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & e^{i\varphi}\\ e^{-i\varphi} & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -ie^{i\varphi}\\ ie^{-i\varphi} & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. ただし φ は任意の実数．

(3.28) は特に $\varphi=0$ ととった場合である．φ による違いは内部座標系の位相のとり方の違いで物理的な相異はない．．

〔問題 3.4〕 スピン 1/2 粒子の内部状態 ψ は系を任意の軸のまわりに 2π 回転した時 $-\psi$ に移ることを示せ．

§ 3.3 スピンの偏りとヘリシティ

スピン 1/2 の粒子の状態は2行1列の $u=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ で表わされる．$u_+=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ は σ_z の固有状態で固有値は $+1$ であり，この状態ではスピンは z 軸の正の方向に向いている．同様に $u_-=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ ではスピンの向きは z 軸の負の方向である．一般の状態 u では，この状態での Pauli スピンの期待値を $\boldsymbol{n}$ とすると

$$\boldsymbol{n}=\langle u,\ \boldsymbol{\sigma}u\rangle.$$

これが u の状態のスピンの向きを与える．実際に u が，$\boldsymbol{\sigma}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向の成分 $\sigma_n=(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})$ の固有値 $+1$ の固有状態であることを確かめることができる．

スピン 1/2 の粒子の多数の集まりを考えると，各粒子のスピンはいろいろの方向を向いている．その方向を全体の粒子で平均したものを $\boldsymbol{P}$ とする．

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{N}\sum_i\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_i. \tag{3.31}$$

$\langle\sigma\rangle_i$ は i 番目の粒子の状態での $\boldsymbol{\sigma}$ の期待値，N は全粒子数である．多くの場合 $\boldsymbol{P}$ は 0 で，このような集団は**偏りがない**（unpolarized）という．これに反して空間に特別の向きがあって，スピンがその方向に向きやすくなっていれば，その方向に向いているスピンを持つ粒子数が他方向のより多くなっている．このような場合は $\boldsymbol{P}$ は 0 でなく，集団は偏っている．この方向を z 軸として $\boldsymbol{P}$ の z 成分を**偏り**（polarization）という．一般にスピンが S の粒子の集まりに対しては，偏りの大きさは，

$$P=\frac{1}{NS}\sum_{i=1}^{N}\langle S_z\rangle_i \tag{3.32}$$

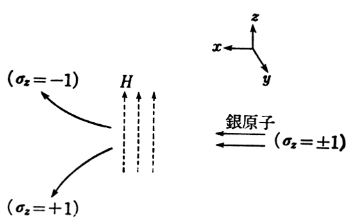
で定義される．

スピン 1/2 粒子の場合，スピンの z 方向の成分が 1/2 および $-1/2$ を持つ固有状態の間に僅かなエネルギー差ができて，縮退がとれた場合を考える．σ_z の固有値 $+1$ の状態にある粒子数を n_+，-1 にある粒子数を n_- とすると，$n_+\neq n_-$ のときは偏った状態で，(3.32) は，

$$P=\frac{n_+-n_-}{n_++n_-}$$

となる．$n_+>n_-$ ($P>0$) のときは偏りの向きは z 軸の正方向，$n_->n_+$ ($P<0$) のときは偏りの向きは z 軸の負方向である．n_+ または n_- の一方が 0 のときは偏りは完全 ($P=\pm1$) で，これに対して $n_+=n_-$ ($P=0$) なら偏りのない状態である．

粒子に偏りを持たせる一方法として **Stern-Gerlach の実験**（1922 年）をあげよう．いま，銀の原子の流れを x 方向に作り，それと垂直な z 方向に不均一な強さの磁場 H をかける．この H がたとえば z の関数で z の大きいほど強くなる磁場としよう．この流れが磁場中に入ると，磁場 H と原子内の電子の間に力が働きこのため電子は余分のエネルギー ΔE を持つ（第 8 章参照）．



3-6 図 Stern-Gerlach の実験

$$\Delta E=\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\frac{e\hbar}{2mc}H\sigma_z. \tag{3.33}$$

（m は電子の静止質量）．スピンが H の方向に向いている電子 ($\sigma_z=+1$) は $\Delta E>0$ でかつ H の大きいほど系のエネルギーは高くなるから，H の弱い z の小さい方向に原子は曲げられる．反対にスピンが逆向きのもの ($\sigma_z=-1$) は $\Delta E<0$ で z の大きい方向に曲げられ，二つの異なる方向に進む原子の流れが得られる．この一方の流れの中の原子

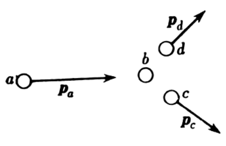
だけを集めると z 方向にほとんど完全に電子のスピンの偏った原子の流れを作り得る．

以上の議論では電子のスピンが z 方向または $-z$ 方向に向いているとした．流れのなかの一つの原子の電子は一般に勝手な方向を向いている $\left(u=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)$． H が働くと $\sigma_z=+1$ の状態が $|a|^2$ の確率で，$\sigma_z=-1$ の状態が $|b|^2$ の確率で見出され，z の大きい方に曲げられる確率は $|a|^2=(1+\langle\sigma_z\rangle)/2$， z の小さい方に曲げられる確率が $|b|^2=(1-\langle\sigma_z\rangle)/2$ である．流れのなかのたくさんの原子について平均すると z の大きい方向に曲げられる粒子の割合は，

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(1+\langle\sigma_z\rangle i)}{2}=\frac{1+P}{2}.$$

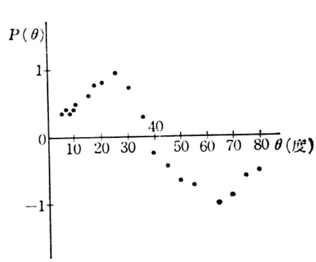
同様に z の小さい方に曲げられる割合は $\dfrac{1-P}{2}$ である．磁場に入る前の流れが偏りがなければ $(\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle=0)$ どちらの方向にも同じ数だけ曲げられる．

この例でも見られるように，スピン 1/2 粒子の流れで或る実験をしたとき，偏り $\boldsymbol{P}$ (3.31) が等しい二つの流れに対しては同じ結果が得られる．偏りのない流れといっても，スピンの向きがまったく不揃いの場合もあるし，スピンはみな z 軸に平行であるが $+z$ 方向のものの数と $-z$ 方向のものの数が等しい場合もある．この二つの流れである反応を測ったとき（たとえばある粒子との散乱をさせたとき），まったく同じ結果で区別がない．すなわちスピン 1/2 粒子の流れのスピンの方向についての性質は，偏り $\boldsymbol{P}$ を与えるだけできまってしまい，それ以上に各粒子のスピン方向について云々する必要はない．ただし，スピンが1以上の粒子の場合は必ずしもそうではなく，$\boldsymbol{P}$ が同じ流れでも結果の異なることがある（たとえば偏ったスピンを持つ標的で散乱させた場合）．



3-7 図 衝突 a＋b → c＋d ($p_b=0$)

スピンの偏りを持たせるには，必ずしも外から特定方向に向いている力を加える必要はなくいろいろの方法がある．一般に粒子 a, b が衝突して c, d が作られる現象 $(a+b\to c+d)$ を考えよう．(c, d はそれぞれ a, b と同一でもよい)．a, b, c, d の運動量はそれぞれ p_a, p_b, p_c, p_d とすると通常の実験では $p_b=0$，したがって p_a, p_c, p_d は同一平面内にある．この衝突の起こった平面（3-7 図）（すなわち紙面）に垂直な方向はこの衝突に固有の方向で，したがって初め a, b 粒子が偏りのないスピン状態にあっても衝突の際に働く力が，この特別な方向に対し方向性を持てば衝突後の粒子 c, d のスピンはこの方向に偏ることができる．



3-8 図 $\alpha+p\to\alpha+p$ における反跳陽子の偏り $P(\theta)$

一例として α 粒子と陽子（p）の弾性散乱（$\alpha+p\rightarrow\alpha+p$）をとろう（$a=c=\alpha$, $b=d=p$）. エネルギー 146 MeV の α 粒子の散乱で θ 方向に反跳を受けた陽子のスピンの偏りの大きさを測ると衝突面に垂直な方向に $P(\theta)$ だけ偏ってくる（3-8 図）. 偏りの大きさは θ の関数で，$P(\theta)>0$ は偏りの方向が 3-7 図で紙面の下から上に向かうことを意味している.（α 粒子はスピン 0 で偏りを持たない）

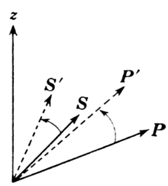
いろいろな素粒子のスピン状態を表わすのに空間に固定した一つの方向（z 軸と名づけよう）をとり，その方向のスピン成分の値で状態を区別するのが普通である. 別の方法としてその素粒子の運動方向のスピン成分の値で状態を表わすこともできる. この量をその粒子の**ヘリシティ**（helicity）とよぶ. 粒子のスピン $\boldsymbol{S}$, 運動量 $\boldsymbol{p}$ を用いてヘリシティを表わすと，

$$h=\frac{(\boldsymbol{S},\boldsymbol{p})}{|\boldsymbol{p}|} \tag{3.34}$$

である.

スピン $\dfrac{1}{2}$ 粒子のヘリシティの固有値は $\hbar$ を単位にして $\pm\dfrac{1}{2}$, スピン 1 粒子のそれは ±1, 0 のいずれか，一般にスピン S 粒子の h の固有値は $\pm S$, $\pm(S-1)$, …, ±1, 0 の $(2S+1)$ 個の値のいずれかをとる.（スピン $\dfrac{1}{2}$ 粒子のヘリシティを (3.34) の代りに $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p})/|\boldsymbol{p}|$ で定義することがある. このとき h の固有値は ±1 になる. 第 7 章以下ではこのように定義することにしよう）.

外力が特定の方向に働いている場合，たとえば z 軸方向に磁場が働いている時には (3.33) 式で示されるように σ_z の値により系のエネルギーが変るので，σ_z の値で状態を記述するのが有効であるが，ヘリシティは空間に固定した軸方向の成分（σ_z）の持たない特長を持っている. すなわち座標系（または系）に対して任意の回転を行なっても二つのベクトル $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{p}$ の間の角度，したがって粒子のヘリシティは変らない. 一方，固定した軸（z 軸）に対する角度は系を回転すると変るので σ_z は回転により変ってくる. さらに質量のない素粒子（光子およびニュートリノ）の場合には，座標系の回転のみならず Lorentz 変換（第 4 章参照）を行なってもヘリシティが変らない. このことはスピンの大きさ S と内部自由度の数（3-1 表）の関係が $f=2S+1$ にしたがわない理由になっている.（第 7 章参照）



3-9 図

§ 3.4 角運動量の合成則

古典力学で同一の中心のまわりに回転している二つの質点 a, b があり，そのそれぞれ

の軌道角運動量が $\boldsymbol{M}^a$, $\boldsymbol{M}^b$ の時，a, b 全体からなる合成系の全角運動量 $\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{M}^a$, $\boldsymbol{M}^b$ の和で与えられる．同じ問題を量子力学系の場合に考えてみよう．二つの質点の状態を表わす波動関数を ψ_a, ψ_b とすると，全系の状態 ψ はそれらの積である ($\psi=\psi_a\psi_b$).

いま，z 軸のまわりに座標系を微小角度 $\Delta\theta$ だけ回転すると (3.4) からわかるように

$$\psi\to\left(1+i\frac{\Delta\theta}{\hbar}M_z{}^a\right)\psi_a\left(1+i\frac{\Delta\theta}{\hbar}M_z{}^b\right)\psi_b=\left\{1+i\frac{\Delta\theta}{\hbar}(M_z{}^a+M_z{}^b)\right\}\psi_a\psi_b$$

となる．ここで $|\Delta\theta|\ll1$ であるから $(\Delta\theta)^2$ 以上の項は省略した．$M_z{}^a$, $M_z{}^b$ はそれぞれ a, b の角運動量の z 成分で，$M_z{}^a$ は ψ_a にのみ，$M_z{}^b$ は ψ_b にのみ作用する演算子である．

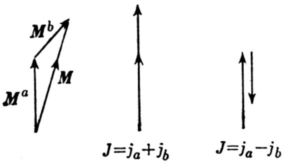
上の式は合成系の角運動量の z 成分 M_z は $M_z{}^a$ と $M_z{}^b$ の和になることを示しており，一般に次式が得られる．

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}^a+\boldsymbol{M}^b. \tag{3.35}$$

$\boldsymbol{M}^a$ と $\boldsymbol{M}^b$ はそれぞれ異なる系 a, b に作用する演算子であるから，初めに系 a を回転し次に系 b を回転するのと，順序をかえてこれらの回転を行なうのと最後の状態は同じになる．したがって $\boldsymbol{M}^a$ の各成分と $\boldsymbol{M}^b$ の各成分は可換である．このことから全角運動量 $\boldsymbol{M}$ の各成分の間には交換関係 (3.6) が成立することを導くことができる．たとえば

$$[M_x,\ M_y]=[M_x{}^a+M_x{}^b,\ M_y{}^a+M_y{}^b]=[M_x{}^a,\ M_y{}^a]+[M_x{}^b,\ M_y{}^b]$$
$$=i\hbar(M_z{}^a+M_z{}^b)=i\hbar M_z.$$

合成系の回転の状態は部分系 a, b の回転状態を $(\boldsymbol{M}^a)^2$, $M_z{}^a$; $(\boldsymbol{M}^b)^2$, $M_z{}^b$ の固有値を与えて指定することにより決まる．これら固有値を $j_a(j_a+1)$, m_a, $j_b(j_b+1)$, m_b としよう．四つの物理量は相互に可換なので，全系の状態に対しこれら固有値を同時に与えることができる．この状態を $|j_a,\ m_a,\ j_b,\ m_b>$ または略して $|m_a,\ m_b>$ と書こう．$M_z{}^a$, $M_z{}^b$ の代りに $\boldsymbol{M}^2$, M_z を用いて $\boldsymbol{M}^2$, M_z, $(\boldsymbol{M}^a)^2$, $(\boldsymbol{M}^b)^2$ を一組の量と考えると，これらも相互に可換なのでそれらがそれぞれ固有値 $J(J+1)$, m, $j_a(j_a+1)$, $j_b(j_b+1)$ をとる固有状態が存在する．これを $|J,\ m,\ j_a,\ j_b>$ あるいは略して $||J,\ m>$ と書こう．$\boldsymbol{M}(=\boldsymbol{M}^a+\boldsymbol{M}^b)$ が交換関係 (3.6) をみたすことより，J は正整数または半整数値をとり，また M_z は J, $J-1$, …, $-J$ の $(2J+1)$ 個の中のいずれかの値をとる．



3-10 図　2図の角運動量の合成

次に j_a, j_b と J の間の関係を調べよう．古典力学では 3-10 図よりわかるように J の値は $\boldsymbol{M}^a$, $\boldsymbol{M}^b$

の間の角度に関係し，その角度を変えると j_a+j_b から j_a-j_b（$j_a>j_b$ の場合）の間の任意の値をとる．量子力学の場合にも J は j_a, j_b が与えられたとき，いろいろな値をとりうるが，この値は連続的なものではなく，j_a, j_b で決まるある有限個の値のいずれかをとる．

任意の j_a, j_b の値に対して議論する代りに，ここでは $j_a=1$, $j_b=1/2$ の時を例にとって論ずる．合成系の状態 $|m_a, m_b\rangle$ を $m(=m_a+m_b)$ の同じものに分類すると 3-2 表のようになる．

3-2 表

$m=3/2$	$\|1,\ 1/2\rangle$
$m=1/2$	$\|0,\ 1/2\rangle$, $\|1,\ -1/2\rangle$
$m=-1/2$	$\|0,\ -1/2\rangle$, $\|-1,\ 1/2\rangle$
$m=-3/2$	$\|-1,\ -1/2\rangle$

これら 6 個の状態がどのような状態 $\|J, m\rangle$ に対応するかを調べよう．m の値の最大値は 3/2 であるから，J の値の最大のものも 3/2 でなければならない．なぜなら与えられた J の値に対し $m=J$ の状態が存在するから，$J>3/2$ なら $m>3/2$ の状態がなければならない．そこで J が最大値をとる四つの状態 $\|3/2, 3/2\rangle$, $\|3/2, 1/2\rangle$, $\|3/2, -1/2\rangle$, $\|3/2, -3/2\rangle$ と 3-2 表の状態の対応を調べよう．表中には $m=3/2$ 状態は一つしかないから，

$$\|3/2,\ 3/2\rangle=|1,\ 1/2\rangle,\quad \text{同様に}\ \|3/2,\ -3/2\rangle=|-1,\ -1/2\rangle. \tag{3.36}$$

次に § 3.1 で定義した M_- を用いると (3.15)～(3.17) より，

$$M_-{}^a\psi_a(j_a,\ m_a+1)=\hbar\sqrt{j_a(j_a+1)-m_a(m_a+1)}\,\psi_a(j_a, m_a),$$

$$M_-{}^b\psi_b(j_b,\ m_b+1)=\hbar\sqrt{j_b(j_b+1)-m_b(m_b+1)}\,\psi_b(j_b, m_b).$$

これより，

$$M_-|1,\ 1/2\rangle=M_-{}^a|1,\ 1/2\rangle+M_-{}^b|1,\ 1/2\rangle=\hbar(\sqrt{2}\,|0,\ 1/2\rangle+|1,\ -1/2\rangle).$$

一方において，

$$M_-\|3/2,\ 3/2\rangle=\hbar\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}\,\|3/2,\ 1/2\rangle=\sqrt{3}\,\hbar\|3/2,\ 1/2\rangle.$$

したがって，両式が同一の式を表わすことより，

$$\|3/2,\ 1/2\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\,|0,\ 1/2\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,\ -1/2\rangle \tag{3.37}$$

が得られる．$\|3/2, 1/2\rangle$ にさらに M_- を掛けるか，$\|3/2, -3/2\rangle$ に M_+ を掛けると同様にして，

$$\|3/2,\ -1/2\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\,|0,\ -1/2\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\,|-1,\ +1/2\rangle. \tag{3.38}$$

このようにして $J=3/2$, $m=\pm3/2$, $\pm1/2$ の 4 個の状態が得られる．

さて，$m=+1/2(-1/2)$ の状態は 3-2 表中に2個存在するから $\|3/2, 1/2\rangle$ ($\|3/2, -1/2\rangle$) の他に，さらに1個 $m=+1/2(-1/2)$ の状態がなければならない．この状態として $\|3/2, 1/2\rangle$ ($\|3/2, -1/2\rangle$) に直交する次の状態をとろう．

$$-\sqrt{\frac{1}{3}}\,|0,\ 1/2\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,\ -1/2\rangle,\quad \sqrt{\frac{1}{3}}\,|0,\ -1/2\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\,|-1,\ 1/2\rangle. \tag{3.39}$$

これらの m 値はそれぞれ $+1/2$, $-1/2$, またこれと対になるような m の異なる状態はないので $J=1/2$ と推論される．

事実，前者に M_+, 後者に M_- をかけてそれぞれ m の一つ大きい，または一つ小さい状態を作ろうとすると0となり $m=\pm 1/2$ 以外の状態を作れないことがわかる．あるいは J の値を直接求めても $J=1/2$ が確かめられる．このようにして $j_a=1$, $j_b=1/2$ の系 a, b の合成系の状態は $J=3/2$ および $J=1/2$ の状態をそれぞれ一つずつ含むことがわかる．

一般に角運動量の大きさが j_a, j_b (j_a, j_b は整数または半整数) の二つの系 a, b があった時，合成系の角運動量の大きさ J は $J=j_a+j_b$, j_a+j_b-1, $\cdots$, $|j_a-j_b|$ の値をとる．たとえば，スピンを持った素粒子が中心 O のまわりに回転している時，そのスピンの大きさ S, O のまわりの回転の軌道角運動量を L とすると，その系の全角運動量の大きさ J は $S+L$, $S+L-1$, $\cdots$, $|S-L|$ の値のいずれかをとる．

状態 $|j_a, m_a, j_b, m_b\rangle$ と状態 $|J, m, j_a, j_b\rangle$ を結びつける係数 $\langle j_a, m_a, j_b, m_b|J, m, j_a, j_b\rangle$ を **Clebsch-Gordan 係数**とよぶ．

$$|J,\ m,\ j_a,\ j_b\rangle=\sum_{\substack{m_a, m_b\\(m_a+m_b=m)}}\langle j_a,\ m_a,\ j_b,\ m_b|J,\ m,\ j_a,\ j_b\rangle\,|j_a,\ m_a,\ j_b,\ m_b\rangle. \tag{3.40}$$

付録に簡単な場合の Clebsch-Gordan 係数を表にしておく．

§3.5 角運動量の保存則

素粒子の集まりがあった時，素粒子間に働く力は素粒子相互の相対的距離や，素粒子のスピン角運動量，軌道角運動量の相対的向き等に関係する．したがって系全体を空間の任意の点を通る任意の軸のまわりに回転しても系で働く力は変らない．

したがってポテンシャルエネルギーの平均値，および Hamiltonian の平均値は座標系を回転しても，すなわち異なる観測者に対して同一でなければならない．(運動エネルギーは座標系の回転で不変である)．座標系を z 軸のまわりに微小角度 $\Delta\theta$ だけ回転した時，系の状態 ψ は次の ψ' に移る (3.4)．

$$\psi \to \psi' = \left(1 + i\frac{\Delta\theta}{\hbar} M_z\right)\psi$$

Hamiltonian H のこの状態での値は，したがって次のように変る．

$$\langle\psi,\ H\psi\rangle \to \langle\psi',\ H\psi'\rangle = \left\langle\left(1 + i\frac{\Delta\theta}{\hbar} M_z\right)\psi,\ H\left(1 + i\frac{\Delta\theta}{\hbar} M_z\right)\psi\right\rangle$$

$$= \langle\psi,\ H\psi\rangle + i\frac{\Delta\theta}{\hbar}\langle\psi,\ [H,\ M_z]\psi\rangle. \qquad (3.41)$$

任意の ψ に対し $\langle\psi,\ H\psi\rangle$ がこの座標系の回転で変らないためには，

$$[H,\ M_z] = 0.$$

同様に他の軸のまわりの回転に対する不変性から H は $\boldsymbol{M}$ の各成分と，したがってまた $\boldsymbol{M}^2$ とも可換になる．

$$[H,\ \boldsymbol{M}] = 0, \quad [H,\ \boldsymbol{M}^2] = 0. \qquad (3.42)$$

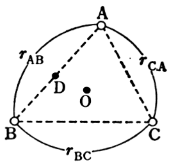
§ 2·6 で示したように H と可換な量は時間と共に変らないから，素粒子相互の衝突で $\langle\psi,\ \boldsymbol{M}\psi\rangle$，$\langle\psi,\ \boldsymbol{M}^2\psi\rangle$ は時間がたっても変らない．特に衝突前の系が $\boldsymbol{M}^2$，M_z がそれぞれ固有値 $J(J+1)\hbar^2$，$m\hbar$ を持つ角運動量の固有状態にあった時は，衝突後の状態も同じ固有値を持った状態になる（§ 2.6 参照）．このように衝突前後で系の全角運動量およびその成分の値が不変のことを**角運動量の保存則**という．

これに反し，外からある特定方向に力が加わっている時は，必ずしも角運動量は保存しない．たとえば z 軸の方向に外から磁場が働いている時，系を z 軸以外の軸のまわりに回転すると(ただし磁場は外から与えられたものであるから回転しない)，磁場と素粒子の角運動量，スピン等との相対的方向が変ってくるので系に働く力は変化し衝突のようすが変ってくる．しかしこの場合でも，z 軸（磁場方向）のまわりの回転に対してのみは，前と同様な議論が成立し M_z の値は保存される．さらに系を磁場を作る物質まで含めた系まで拡張すると，その全系の角運動量は保存されている．

［問題 3.5］ 2 個の角運動量 $j_1\hbar$，$\frac{1}{2}\hbar$ を合成した時，全系の角運動量の大きさ J は $J = j_1 \pm 1/2$（ただし $j_1 \neq 0$）の二つの値をとり，その時の Clebsch-Gordan 係数 $\langle j_1,\ m_1,\ \frac{1}{2},\ m_2 \mid J,\ m,\ j_1,\ 1/2\rangle$ は上表で与えられることを示せ．

J \ m_2	$+1/2$	$-1/2$
$j_1 + 1/2$	$\sqrt{\dfrac{j_1 + m + 1/2}{2j_1 + 1}}$	$\sqrt{\dfrac{j_1 - m + 1/2}{2j_1 + 1}}$
$j_1 - 1/2$	$-\sqrt{\dfrac{j_1 - m + 1/2}{2j_1 + 1}}$	$\sqrt{\dfrac{j_1 + m + 1/2}{2j_1 + 1}}$

（特別な場合として $j_1 = 1$ ととると式 (3.36)〜(3.39) が得られる）



3－11 図

〔問題 3.6〕 3個の同一質量の質点 A, B, C からなる系で，粒子相互間の力がそれぞれ相互の距離 r_{AB}，r_{BC}，r_{CA} のみによるポテンシャル $V_{AB}(r_{AB})$，$V_{BC}(r_{BC})$，$V_{CA}(r_{CA})$ で与えられるとしよう．この系の重心 O のまわりの全角運動量は保存されることを示せ．他の点，たとえば A, B の中点 D のまわりの全角運動量は一般には保存しないが，系全体の運動量が 0 のとき（重心静止系）は保存することを示せ．またこの場合は O のまわりの全角運動量と D のまわりの全角運動量は等しくなる．

第4章 Lorentz 変換, 時空の反転, 素粒子のパリティ

§4.1 相対性理論と Lorentz 変換

いろいろな物理現象を記述するのにわれわれは時間空間の座標を決め，ある現象が何時何処で起こったかを記述していく．この座標軸のとり方はそれぞれの観測者によって異なるので，たとえば，ある座標系（観測者）からみて点（x, y, z）に静止している物体は，この座標系に対し z 軸方向に v の速度で動いている座標系（観測者）からみると，

$$x'=x, \quad y'=y, \quad z'=z-vt \tag{4.1}$$

の値を持つようにみえる．この座標変換を **Galilei 変換** という．

Newton の運動方程式,

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F} \tag{4.2}$$

（m は物体の質量，$\boldsymbol{F}$ は物体に働く力）に対して，この Galilei 変換を行なってみよう．力 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャル・エネルギー $V(\boldsymbol{r})$ から導かれるものと考えると（$\boldsymbol{F}=-\partial V/\partial \boldsymbol{r}$），

$$V'(\boldsymbol{r}')=V(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r}')=-\frac{\partial V'(\boldsymbol{r}')}{\partial \boldsymbol{r}'}=-\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}'}=-\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}),$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}\quad\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\neq\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}\right).$$

したがって，新しい座標系での運動方程式も（4.2）とまったく同じ形になる．

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}=\boldsymbol{F}'. \tag{4.2'}$$

一般に Newton 力学（古典力学）の法則は，相互に一定速度で運動している異なる座標系から眺めても不変で，**Galilei 変換に対する不変性**とよぶ．

相対性理論では，物体の空間座標が座標系（観測者）により変るだけでなく時間座標（時計の進み方）まで変ってくる．ある座標系で測った現象の位置，時刻が（x, y, z, t）の時，その座標系に対し，ある方向（この方向を z 方向としよう）に速度 v で動いている座標系で同一の現象を測定すると，その座標（x', y', z', t'）は次のようになる．

$$x'=x, \; y'=y, \; z'=\frac{z-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \; t'=\frac{t-(v/c^2)z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{4.3}$$

（ただし，二つの座標系の原点は一致するようにとった）この座標変換を **Lorentz 変換**とよぶ．（任意の方向への Lorentz 変換については付録参照.）

c は光速度で（$c=2.99793\times10^{10}$ cm/sec），変換の速度 v が c にくらべて非常に小さ

い時は v/c の項を省略できるから，Lorentz 変換 (4.3) は Galilei 変換 (4.1) になる．

われわれ日常世界の巨視的現象では，多くの場合に物体や観測者の速度は c にくらべてはるかに小さいので Galilei 変換を問題にすればよい．しかし素粒子世界の微視的現象では光速度に近い速度で走る素粒子間の力や衝突を扱うので，多くの場合この相対論的 Lorentz 変換を問題にしなければならない．

一般に Lorentz 変換した時に $(x,\ y,\ z,\ ct)$ と同様に変換する成分を持つ量を**ベクトル**（**4次元ベクトル**）という．すなわち，任意の4次元ベクトル $a_\mu(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_0)$ は，z 軸方向へ一様な速度で動いている座標系への Lorentz 変換を行なうとつぎのようになる．

$$a_1' = a_1,\quad a_2' = a_2,\quad a_3' = \frac{a_3-(v/c)a_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad a_0' = \frac{a_0-(v/c)a_3}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{4.4}$$

時空座標 $x_\mu\ (x,\ y,\ z,\ ct)$ はもちろん一つのベクトルであり，また粒子の運動量，エネルギー $p_\mu\ (p_x,\ p_y,\ p_z,\ E/c)$ も一つのベクトルである．($\boldsymbol{p},\ E/c$ は量子力学ではそれぞれ $-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}},\ i\hbar\dfrac{\partial}{\partial(ct)}$ なる微分演算子であるから $\boldsymbol{r},\ ct$ と同様に変換する．)

(4.4) 式を用いて確かめられるように，任意の2個の4次元ベクトル $a_\mu,\ b_\mu$ の内積，

$$a\cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_0b_0 \tag{4.5}$$

は Lorentz 変換の前後で不変である．このような量を Lorentz 変換に対する**スカラー量**（あるいは単に**スカラー**）という．$a_\mu,\ b_\mu$ として特に x_μ をとると，座標原点からの4次元的距離の平方（したがって距離自身も），

$$x_\mu{}^2 = \boldsymbol{r}^2 - c^2t^2 \tag{4.6}$$

はスカラー量になる．x_μ と原点の距離 $x_\mu{}^2$ の代りに，任意の2点 $x_{1\mu},\ x_{2\mu}$ の間の4次元的距離 $(x_{1\mu}-x_{2\mu})^2$ もスカラー量である．これが負のとき $x_{1\mu}$ と $x_{2\mu}$ は時間的に離れているといい，正のときは空間的に離れているという．

また $a_\mu,\ b_\mu$ として粒子の運動量・エネルギーベクトル p_μ をとると，

$$p_\mu{}^2 = \boldsymbol{p}^2 - E^2/c^2 \tag{4.7}$$

はスカラー量となる．この量を定数 $-m^2c^2$ に等しいとおくと，m は粒子の静止質量に等しく (4.7) はエネルギー，運動量と質量の間の関係式になる．

$$E^2 - c^2\boldsymbol{p}^2 = m^2c^4. \tag{4.8}$$

粒子の速度 $\boldsymbol{v} = \dfrac{c\boldsymbol{p}}{E}$ の大きさが光速度 c にくらべて小さい時 (4.8) は，

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\boldsymbol{p}^2} = mc^2 + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \cdots \tag{4.9}$$

となり，右辺の第1項は粒子の静止質量エネルギー，第2項が運動のエネルギー，第3項以下が運動エネルギーの相対論的補正項になる．

c^2 は質量をエネルギーに換算する係数になり，この換算を行なうと次のようになる（4-1 表）．3次元空間でのベクトルの場合と同様に，二つの4次元ベクトル a_μ, b_ν の積 $c_{\mu\nu}=a_\mu b_\nu$ と同様に変換する量を2次の **4 次元テンソル** という．特に $c_{\mu\nu}=c_{\nu\mu}$ のときを **対称テンソル**，$c_{\mu\nu}=-c_{\nu\mu}$ のときを **反対称テンソル** という．同様に高次のテンソルも定義できる．

4-1 表　質量とエネルギーの換算表

	質量	エネルギー
電子の質量	9.11×10^{-28} g	0.51 MeV
陽子の質量	1.67×10^{-24} g	938 MeV

特に次の対称テンソルを **Kronecker の δ** という．

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\delta_{33}=-\delta_{00}=1,\ \delta_{\mu\nu}=0\ (\mu\neq\nu\ \text{の時}). \tag{4.10}$$

素粒子の性質や素粒子世界での現象をいろいろ異なる座標系（観測者）で眺めた時に，その間の関係が Lorentz 変換で移り変ることは実験の精度内でよく確かめられている．一例として素粒子の寿命を例にとって調べてみよう．素粒子 A が不安定で，ある時間たつと，より質量の小さい何個かの素粒子 B, C, … に崩壊するとする．A → B + C + ….この系が時刻 t で素粒子 A である確率を $P_A(t)$，崩壊した状態 B + C + … である確率を $P_B(t)$ としよう．系はどちらかの状態になければならぬから $P_A(t)+P_B(t)=1$ である．時間 t の増すと共に素粒子 A が崩壊していく割合は $P_A(t)$ に比例するから，

$$-\frac{dP_A(t)}{dt}=\lambda P_A(t). \tag{4.11}$$

λ は崩壊の速さをあらわす定数で，1個の素粒子 A が単位時間あたりに崩壊する確率を意味している．$t=0$ で $P_A(t)=1$ であったとすると，(4.11) を解いて $P_A(t)$ が得られる．

$$P_A(t)=\exp(-\lambda t). \tag{4.12}$$

この式から $t=1/\lambda$ 時間後に素粒子 A に系が見出される確率は $\frac{1}{e}$ に減る．この時間を粒子 A の **寿命** とよんでいる．

さて時間の進み方は座標系によって異なるので，素粒子の寿命もそれを測る座標系で変ってくる．素粒子が常に静止している系，つまり素粒子と共に同じ速度で動いている座標系で測った寿命を τ_0 としよう．これが 1-2 表にかかげた素粒子の寿命である．素粒子が速度 v で走っている座標系に移ると元の座標系で素粒子の座標 x_μ が $x_\mu=(0,0,0,ct)$

であったのが（素粒子は座標系の原点に静止している），新しい Lorentz 座標系では次の x'_μ になる．

$$x'_\mu=\left(0,\ 0,\ \frac{vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ \frac{ct}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

ここで素粒子は z 方向に走っているとした．

x'_μ を用いて (4.12) を書き直すと，

$$P_\mathrm{A}(t')=\exp(-\lambda\sqrt{1-v^2/c^2}\,t') \tag{4.13}$$

となり，寿命 τ_v は，

$$\tau_v=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{4.14}$$

となり，粒子が静止している時にくらべ γ 倍 $\left(\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$ に大きくなっている．この寿命の延びを表わす係数を **Lorentz 因子** とよぶ．

$\mu^\pm$ 中間子の崩壊を例にとって，いろいろなエネルギー（速度）の μ 中間子の寿命を表にすると 4-2 表の通りである．

4-2 表　μ 中間子の寿命

運動エネルギー	速　度	寿　命	寿命の間に走る距離
0	0	2.21×10^{-6} sec	0
10^8 eV（100 MeV）	0.86 c	4.30×10^{-6}	0.129 km
10^9 eV（1 GeV）	0.994 c	2.31×10^{-5}	6.93 km
10^{10} eV（10 GeV）	0.99994 c	2.09×10^{-4}	62.7 km

この寿命の延びはある精度の範囲内で実験的に確かめられている．また地球に入ってくる1次宇宙線（主に陽子）が大気の上層で π 中間子を作り，これが短い寿命で μ 中間子とニュートリノにこわれるが，この μ 中間子が地上に到達するまでには平均して約 20 km も大気中を走らねばならない．これが可能なのは高エネルギー μ 中間子の寿命が延びて，このような μ 中間子が崩壊せずに地上に到達するからである．

Newton 力学で Galilei 変換で相互に移るどの座標系で眺めても同一の運動法則が成立したように，すべての物理法則は Lorentz 変換で移り変るどの座標系で観測しても同一になっている．このことを物理法則の **Lorentz 不変性** とよぶ．たとえば自由粒子のエネルギー・運動量と質量の関係式 (4.8) は Lorentz 不変であり，また第6章，7章で議論する電磁場の Maxwell 方程式や Dirac 方程式も Lorentz 不変性を持っている．

〔問題 4.1〕 ある大きさのある物体が z 方向に v の速度で走っている時，物体が静

止している時にくらべて z 方向の長さが $\frac{1}{\gamma}$ $(=\sqrt{1-v^2/c^2})$ 倍に減ることを示せ.

§ 4.2 エネルギー・運動量の保存則

ある一つの座標系で素粒子の時空座標が (x, y, z, t) の時，座標系の原点を $x, y, z,$ t 方向にそれぞれ微少距離 $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \Delta\tau$ だけ動かす変換（素粒子の位置を $-\Delta a,$ $-\Delta b, -\Delta c, -\Delta\tau$ だけずらす変換）を考えよう.

$$x'=x-\Delta a, \quad y'=y-\Delta b, \quad z'=z-\Delta c, \quad t'=t-\Delta\tau. \tag{4.15}$$

系の状態 $\psi(x, y, z, t)$ はこの変換で,

$$\psi'(x, y, z, t)=\psi(x, y, z, t)+\left(\Delta a\frac{\partial\psi}{\partial x}+\Delta b\frac{\partial\psi}{\partial y}+\Delta c\frac{\partial\psi}{\partial z}+\Delta\tau\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

に移る $(\psi'(x', y', z', t')=\psi(x, y, z, t))$.

一方，$\boldsymbol{p}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}$, $E=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ であるから，たとえば,

$$\left(1-i\frac{\Delta a}{\hbar}p_x\right)\psi(x, y, z, t)=\psi(x, y, z, t)-\Delta a\frac{\partial\psi(x, y, z, t)}{\partial x}$$

等が得られる．上の2式の比較から,

$$\psi'(x, y, z, t)=\left\{1+\frac{i}{\hbar}(\Delta a\cdot p_x+\Delta b\cdot p_y+\Delta c\cdot p_c-\Delta\tau\cdot E)\right\}\psi(x, y, z, t) \tag{4.16}$$

となり，$\frac{i}{\hbar}p_x$, $\frac{i}{\hbar}p_y$, $\frac{i}{\hbar}p_y$, $-\frac{i}{\hbar}E$ はそれぞれ x, y, z, t 方向に座標系を微少距離ずらす演算子である.

系の回転の場合と同様に（(3.5) 参照）有限の距離だけ系を動かすには，微少距離の移動をくり返して行なえばよい．このようにして x, y, z, t 方向に有限な距離 a, b, c, τ だけ座標系を動かす演算子としてそれぞれ次のものが得られる.

$$\exp\left(i\frac{a}{\hbar}p_x\right), \ \exp\left(i\frac{b}{\hbar}p_y\right), \ \exp\left(i\frac{c}{\hbar}p_z\right), \ \exp\left(-i\frac{\tau}{\hbar}E\right). \tag{4.17}$$

p_x, p_y, p_z, E は相互に可換であるから,

$$[p_\mu, p_\nu]=0 \ (\mu, \nu=0, 1, 2, 3). \tag{4.18}$$

したがって，座標系の並進の演算子 (4.17) も相互に可換で，異なる方向への並進をくり返し行なっても結果はその順序によらない．たとえば，初めに座標系を x 軸方向に a, 次に y 軸方向に b 移動させるのと，初めに y 軸方向に b, 次に x 軸方向に a 移動させるのと結果において同一になる.

$$\exp\left(i\frac{b}{\hbar}p_y\right)\exp\left(i\frac{a}{\hbar}p_x\right)=\exp\left(i\frac{a}{\hbar}p_x\right)\exp\left(i\frac{b}{\hbar}p_y\right).$$

この事情は系の回転の場合と本質的に異なっている.

素粒子間の衝突の際に働く素粒子間の力は素粒子の相対的位置にのみ関係し，もちろん座標原点をずらしても変らない．したがって，系の Hamiltonian H は角運動量の場合と同様に座標原点をずらす演算子と可換になる.

$$[H, \boldsymbol{p}]=0, \qquad [H, E]=0. \tag{4.19}$$

これより衝突前後で系の全エネルギー，全運動量が不変のことが導かれる.

素粒子がある運動をしている時，任意の点（この点を座標原点にとる）のまわりの軌道角運動量 $\boldsymbol{M}$ と，エネルギー・運動量ベクトル p_μ との交換関係を求めると（(3.1′) 参照),

$$\begin{aligned}
&[p_x, M_x]=[p_y, M_y]=[p_z, M_z]=0,\\
&[p_x, M_y]=-[p_y, M_x]=i\hbar p_z, \quad [p_y, M_z]=-[p_z, M_y]=i\hbar p_x,\\
&[p_z, M_x]=-[p_x, M_z]=i\hbar p_y,\\
&[p_x, \boldsymbol{M}^2]=2i\hbar(p_zM_y-p_yM_z), \quad [p_y, \boldsymbol{M}^2]=2i\hbar(p_xM_z-p_zM_x),\\
&[p_z, \boldsymbol{M}^2]=2i\hbar(p_yM_x-p_xM_y),\\
&[\boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{M}]=[\boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{M}^2]=[E, \boldsymbol{M}]=[E, \boldsymbol{M}^2]=0.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

これに対し素粒子のスピン $\boldsymbol{S}$ はその内部座標に関係し，その空間的運動とは独立な自由度であるから，内部座標の回転を行なう $\boldsymbol{S}$ の各成分と $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{M}$ の各成分とは可換と考えられる.

$$\begin{aligned}
&[\boldsymbol{S}, \boldsymbol{p}]=0, \ [\boldsymbol{S}, \boldsymbol{p}^2]=[\boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{p}]=[\boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{p}^2]=0,\\
&[\boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}]=0, \ [\boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}^2]=[\boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{M}]=[\boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{M}^2]=0.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

（素粒子のスピンの内部空間と軌道運動の空間とが独立であることは，あらかじめ自明ではなく，むしろ (4.21) 等から得られるいろいろな結論が実験事実と合うことから推論される.）

他から力を受けずに自由に運動している素粒子（自由粒子）状態として，その素粒子の持ついろいろな物理量の中で相互に可換な量の一組の同時の固有状態をとることができる．たとえば，$\boldsymbol{p}$ の各成分は相互に可換な物理量で，これらの同時の固有状態が平面波である．さらに，$\boldsymbol{S}^2$ と S_z は $\boldsymbol{p}$ の各成分と可換であり，またお互にも可換であるから，たとえば，スピン 1/2 粒子の平面波の固有状態として，

$$\psi_\pm=u_\pm\exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{pr}\right), \qquad u_+=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad u_-=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{4.22}$$

をとることができる．$\boldsymbol{p}$ は演算子でなく運動量の固有値，$u_\pm$ はそれぞれ $\sigma_z=\pm1$ のスピン状態である．

固有状態の別のとり方として，相互に可換な $\boldsymbol{p}^2$, $\boldsymbol{M}^2$, M_z, $\boldsymbol{S}^2$, S_z の組をとることもできる．これは一定の軌道角運動量を持つ球面波の状態で，その波動関数 ψ_{l,m,S,S_z} は $s_z=\pm\dfrac{1}{2}$ に対し，

$$\psi_{l,m,S,\pm1/2}=u_\pm f_{l,p}(r)Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{4.23}$$

と書ける．l, m はそれぞれ $\boldsymbol{M}$ の大きさと M_z の値，p は運動量の大きさであり，$Y_l^m(\theta,\varphi)$ は軌道運動の角部分，$f_{l,p}(r)$ は回転の中心からの距離による部分である．

$\boldsymbol{M}^2$, M_z, $\boldsymbol{S}^2$, S_z の代りに全角運動量 $\boldsymbol{J}(=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{S})$ を用い，$\boldsymbol{J}^2$, J_z, $\boldsymbol{M}^2$, $\boldsymbol{S}^2$ の同時の固有状態を用いることもできる．$\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{S}$ の大きさをそれぞれ J, l, S, J_z の値を J_z と書くと，

$$\psi_{J,Jz,l,S}=\sum_{m,s_z}\langle J,J_z,l,S|l,m,S,S_z\rangle\psi_{l,m,S,S_z}\quad(m+S_z=J_z) \tag{4.24}$$

が得られる．

自由粒子のエネルギー E は (4.9) で与えられ，$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{J}$ のすべてと可換であるから，時間変化まで含めた波動関数は (4.22)〜(4.24) のそれぞれに $\exp\left(-\dfrac{i}{\hbar}Et\right)$ を掛けたものになる．

〔問題 4.2〕 高エネルギー陽子が静止している陽子（たとえば水素泡箱中の陽子）に衝突して新しく π^0 中間子を作る時，それに必要な陽子の最小運動エネルギー（臨界値）を求めよ．陽子の静止質量エネルギー $Mc^2=938\,\mathrm{MeV}$，π^0 粒子の静止質量エネルギー $mc^2=135\,\mathrm{MeV}$ として計算せよ．

〔解〕 衝突前の入射陽子のエネルギー・運動量を E_1, $\boldsymbol{p}_1$, また相手の陽子のそれを E_2, $\boldsymbol{p}_2$ としよう．($E_2=Mc^2$, $\boldsymbol{p}_2=0$)．E_1, E_2, は全エネルギーでそれぞれの陽子の運動エネルギー K_1, K_2 はそれらから Mc^2 を差し引いて得られる．

エネルギーの保存則だけで運動量の保存則がなければ，入射粒子の運動エネルギー K_1 をそのまま π^0 中間子の質量 m に転化できるので $K_1>mc^2$ であれば π^0 中間子が作られる．実際には運動量の保存則のために衝突後の粒子（２個の陽子と π^0 中間子）の運動量の総和は衝突前の運動量の和 $\boldsymbol{p}_1$ に等しく，入射粒子の運動エネルギーの一部は衝突後の粒子の運動エネルギーに使われ，その残りが質量に転化しうる．

適当な Lorentz 変換を行なって $\boldsymbol{p}'_1+\boldsymbol{p}'_2=0$ にみえる新しい座標系に移ると（この系での量には $'$ をつけることにする），衝突前後の運動量は共に０で，この座標系では衝突前の粒子の全エネルギーをすべて質量に変えうる．元の系を**実験室系**，$\boldsymbol{p}'_1+\boldsymbol{p}'_2=0$ の系を**重心系**とよぶ．重心系では $|\boldsymbol{p}'_1|=|\boldsymbol{p}'_2|$，したがって $K'_1=K'_2$ であるから，mc^2 の静止質量を生み出す最小の $K'_1(=K'_2)$ は $K'_1=mc^2/2$ である．この K'_1 の値を元の実験室系に戻せば π^0 中間子を作るための臨界エネルギーが得られる．この変換を行なう

には次のようにする．

$\boldsymbol{p}$, E/c はベクトルである．重心系では，二つの陽子の4次元ベクトルは，

$$p_{1\mu}' = (\boldsymbol{p}_1', E_1'/c), \qquad p_{2\mu}' = (-\boldsymbol{p}_1', E_1'/c)$$

と書ける．その内積（にマイナスを掛けたもの）は，

$$-p_{1\mu}'p_{2\mu}' = \boldsymbol{p}_1'^2 + E_1'^2/c^2 = 2E_1'^2/c^2 - M^2c^2.$$

ただし（4.8）の式を使った．一方，実験室系では，

$$p_{1\mu} = (\boldsymbol{p}_1, E_1/c), \qquad p_{2\mu} = (0, Mc)$$

で，その内積は，

$$-p_{1\mu}p_{2\mu} = ME_1.$$

内積は Lorentz 不変であるから $-p_{1\mu}p_{2\mu} = -p_{1\mu}'p_{2\mu}'$ である．これから，

$$E_1 = 2E_1'^2/Mc^2 - Mc^2.$$

あるいは運動エネルギーで書くと $(E = K + Mc^2)$,

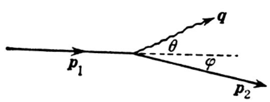
$$K_1 = 4K_1' + 2K_1'^2/Mc^2.$$

$K'_1 = mc^2/2$ を入れると，

$$\text{臨界値} = 2mc^2 + \frac{(mc^2)^2}{2Mc^2} \approx 280\ \text{MeV}. \tag{4.25}$$

〔問題 4.3〕 荷電粒子が屈折率 n の物質中をつき抜ける時，その速度 v が $v > \dfrac{c}{n}$ であれば光を放出することを示せ．この光を **Cerenkov 放射**という．

〔略解〕 屈折率 n の物質中での光の運動量 q, エネルギー ω との関係は $\omega = \dfrac{cq}{n}$ で表わされることが知られている．（真空中では $n=1$ でこの関係は質量 0 の自由粒子のエネルギー・運動量の関係式 $\omega = cq$ になる）．荷電粒子のエネルギー・運動量を E_1, $\boldsymbol{p}_1$, 光を出した後のそれを E_2, $\boldsymbol{p}_2$ とすると，エネルギー・運動量の保存則は，



4－1 図

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 + \omega = E_2 + \frac{c}{n}q, \\ p_1 &= q\cos\theta + p_2\cos\varphi, \\ 0 &= q\sin\theta + p_2\sin\varphi. \end{aligned} \tag{4.26}$$

q が p_1, p_2 にくらべて小さいので第3式より $|\varphi| \ll 1$, したがって最後の2式は，

$$p_1 \approx q\cos\theta + p_2, \qquad q\sin\theta + p_2\varphi \approx 0$$

となる．$E_1 = E_2 + \dfrac{c}{n}q$ と $p_1 = q\cos\theta + p_2$ を解くと $v\cos\theta = \dfrac{c}{n}$ $\left(v = \dfrac{p_1c^2}{E_1} \approx \dfrac{p_2c^2}{E_2}\right)$ が得られる．$|\cos\theta| \leq 1$ であるから $v \geq \dfrac{c}{n}$ の時にのみこのような輻射を出すことが可能で，この時の Cerenkov 放射は $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{c}{nv}\right)$ の方向に出る．粒子は $\varphi \approx -\dfrac{q}{p_2}\sin\theta$ だけ進行方向を変えるが $q \ll p_2$ のためほとんど直進する．粒子の速度は c より小さいから，真空中 $(n=1)$ ではこのような放射は起こらない．

§ 4.3　時間反転と反粒子

Lorentz 変換（4.3）で移り変る各 Lorentz 座標系の間では，時間の進む速さはそれぞれ異なるが時間の進む向きは変らない．すなわち，

$$dt' = \frac{dt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{4.27}$$

で，dt と dt' は同符号である．

これに対して，時間の進む向きを反転する変換，

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = -t \tag{4.28}$$

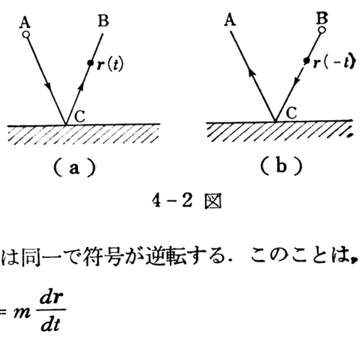
を考えよう．この座標変換を**時間反転**とよぶ．（4.3）と（4.28）の変換を組み合わすと，時間の進む向きの異なるいろいろな Lorentz 座標系が得られる．

時間の向きの反対の座標系はわれわれ世界とは異なる系で実際には存在せず，このような座標系に移って物理現象を観測することはできないが，普通の Lorentz 系で得られた物理法則の知識から，時間反転した系での物理法則を知ることができる．映画のフィルムを逆にまわして見ることを考えてもよい．

古典物理学では，ある物体の運動はその座標 $\boldsymbol{r}$ を時間 t の関数 $\boldsymbol{r}(t)$ として与えることにより決まる．もし時間の反転を行なうと，その運動 $\boldsymbol{r}'(t)$ は，

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(-t)$$

となる．いま，小球が点 A から C に向かって投げ下ろされ床 C で跳ね返って B 点までくる運動 $\boldsymbol{r}(t)$ を考えよう（4－2 a図）．時間反転した時の運動は t' がふえると t は減少するから，逆に B から A に行く運動になる（b図）．同一場所，たとえば黒点の位置での粒子の運動量，速度は図から明らかなように，大きさは同一で符号が逆転する．このことは，



（a）　（b）

4－2 図

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \qquad \boldsymbol{p} = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

が，時間反転（4.28）に対し符号を変えることからも確かめられる．同様に物体が回転している時に，その角運動量は時間反転によって符号を変える．

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{p}' = -\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{M}' = -\boldsymbol{M}. \tag{4.29}$$

ところで，時間反転した世界での運動（b図）は反転前の世界でも初期条件を適当に選ぶことによって実現することができる．このためには点 B から点 C に向かって小球を投げ下ろせばよい．一般にもっと複雑な物体の運動を考えても，時間反転した世界で実現

されるような運動は，元の座標系でも必ず実現することができる．このためには Newton の運動方程式 (4.2) の一つの解を $\boldsymbol{r}_a(t)$ としたとき，$\boldsymbol{r}_b(t)(=\boldsymbol{r}_a(-t))$ も t の関数として，この式の解でなければならない．4-2 a，b 図の運動をそれぞれ $\boldsymbol{r}_a(t)$，$\boldsymbol{r}_b(t)$ とすると黒点の位置 $\boldsymbol{r}_b(t)=(\boldsymbol{r}_a(-t))$ で，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}_b(t)}{dt^2}=m\frac{d^2\boldsymbol{r}_a(-t)}{dt^2}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_a(-t))$$

であるから，力 $\boldsymbol{F}$ が場所 $\boldsymbol{r}$ のみの関数ならば，$\boldsymbol{r}_a(-t)=\boldsymbol{r}_b(t)$ より，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}_b(t)}{dt^2}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_b(t)).$$

すなわち $\boldsymbol{r}_b(t)$ も Newton の運動方程式の解である．古典力学において系に働く力が $\boldsymbol{r}$ のみの関数で時間にはよらないときは，時間反転した世界での運動状態はわれわれの世界でも実現でき，二つの世界での区別はない（フィルムを逆にまわしても不自然に見えない，すなわちこんな運動も起こるはずである）．これを Newton の運動方程式の**時間反転に対する不変性**という．

時間と共に変る外力が働いている場合は，力 F は粒子の場所のみでなく，時間 t の関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$ になる．したがって $F(\boldsymbol{r},t)=F(\boldsymbol{r},-t)$ がみたされないと，運動法則は時間反転に対し不変にならない．しかし外力を作っている粒子までも含めて考えると $\boldsymbol{F}$ はそれら粒子の座標 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，… のみの関数で，F は $\boldsymbol{r}_1(t)$，$\boldsymbol{r}_2(t)$，… を通じてのみ時間 t に依存する．この場合 $\boldsymbol{r}_1(-t)$，$\boldsymbol{r}_2(-t)$，… も Newton の運動方程式の解になっている．

次に量子力学の場合を考えよう．系の運動状態はその波動関数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ を与えることで決まる．$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{M}$ 等は ψ に働く演算子であるが，古典力学との対応を保つためにはこれら物理量の状態 ψ での期待値は時間反転に対し (4.29) のように変らなければならない．

さて，時間反転 $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}$，$t\to-t$ ((4.28)) に対し $\psi(t)$ が $\psi'(t)$ に移るとしよう．Schrödinger の方程式，

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}=H\psi(t) \tag{4.30}$$

に，この時間反転 ($t=-t'$，$\psi(t)=\psi'(t')$) を行なうと，

$$-i\hbar\frac{\partial\psi'(t')}{\partial t'}=H\psi'(t'). \tag{4.31}$$

一方，(4.30) 式の複素共役な式を作り，そこで t の代りに t' と書くと，

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^*(t')}{\partial t'}=H^*\psi^*(t')=H\psi^*(t') \tag{4.32}$$

となる．ここで $H^*=H$，すなわち H が実の量であるとした．（H が Pauli スピンを含む場合などは H は実数ではないが（σ_y が虚数），スピンのある場合はあとで論ずる）．(4.31) と (4.32) の比較から $\psi'(t')$ と $\psi^*(t')$ とは同一の方程式をみたすことがわかる．そこで，

$$\psi'(t')=\psi^*(t')=\psi^*(-t) \tag{4.33}$$

とおくことができる．(4.32) で $t'=-t$ とおいた式と (4.30) の比較から，$\psi(t)$ と $\psi^*(-t)$ は変数 t の関数として同一の方程式をみたすから，初期条件さえ適当にとれば $\psi^*(-t)$ は (4.30) のある一つの解 $\psi(t)$ と等しい．すなわち時間反転した世界での状態 $\psi'(t)=\psi^*(-t)$ は，反転前の世界でも実現することができる．すなわち時間反転，

$$\psi(t)\to\psi^*(-t),\quad t\to-t \tag{4.34}$$

に対し物理法則は不変になる．

時間反転 (4.34) と，古典物理学での時間反転 (4.29) との対応をはっきりさせるために，平面波の解につき調べよう．運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー E の平面波の解，

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et) \tag{4.35}$$

に時間反転を行なうと，反転後の解は次式になる．

$$\psi(\boldsymbol{r},t)\to\psi^*(\boldsymbol{r},-t)=\exp\frac{i}{\hbar}(-\boldsymbol{pr}-Et). \tag{4.36}$$

この解は時間反転前の座標系における運動量 $-\boldsymbol{p}$，エネルギー E の解に等しく，時間反転により $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$ になることを示している．また角運動量の大きさ l，その z 成分の値 m の球面波の解，

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=f_l(r)Y_l^m(\theta,\varphi)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right) \tag{4.37}$$

に対し時間反転を行なうと，$Y_l^{m*}(\theta,\varphi)=(-1)^mY_l^{-m}(\theta,\varphi)$ より $m\to-m$．一般に $\boldsymbol{M}\to-\boldsymbol{M}$ になる．このようにして (4.29) は量子力学における時間反転に対しても成立する．

時間反転 (4.34) は **Wigner の時間反転** ともいわれ，この反転の演算子を W で表わそう．

$$\psi'(t)\equiv W\psi(t)=\psi^*(-t). \tag{4.38}$$

W は時間 t を $-t$ に，また任意の量をその複素共役量にする演算子である．

次に時間反転に対するスピンの変化を調べるために，スピン 1/2 粒子の平面波の解を考えよう（(4.22) 参照）．

$$\psi=u\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et),\quad u=au_++bu_-=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

時間反転に対し u は単に u^* に変換するだけでなく，次のように変換するとしよう．

$$u \to u' = UWu = Uu^*. \tag{4.40}$$

U は2行2列の行列で Wu を u' に移す．

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

さて，スピン $\boldsymbol{S}\left(=\dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)$ を内部座標空間における回転の角運動量と考えると，時間反転に対し $\boldsymbol{M}$ の場合と同様に $\boldsymbol{S} \to -\boldsymbol{S}$ であることが望ましい．時間反転に対して，

$$\boldsymbol{S} \to -\boldsymbol{S} \tag{4.42}$$

を要求して，U の形を定めよう．

(4.42) より σ_z の ± 1 の固有状態 $u_\pm$ (3.22) は時間反転により σ_z が ∓ 1 の状態 $u_\mp$ に移らなければならない．

$$\sigma_z(u_\pm)' = \mp(u_\pm)' = \mp(\pm\sigma_z u_\pm)' = -(\sigma_z u_\pm)'.$$

任意の内部自由度の波動関数 u は $u_\pm$ の1次結合であるから，$u_\pm$ のおのおのに対して成り立つ上式はそのまま任意の u に対し成り立つ．

$$\sigma_z u' = -(\sigma_z u)'.$$

同様に $\boldsymbol{S}$ のすべての成分に対し (4.42) が成立するためには，

$$\boldsymbol{\sigma} u' = -(\boldsymbol{\sigma} u)'. \tag{4.43}$$

(4.40) を用いて書き直すと，　$\boldsymbol{\sigma} UWu = -UW\boldsymbol{\sigma} u.$

これが任意の u に対し成立するためには，

$$\boldsymbol{\sigma} UW = -UW\boldsymbol{\sigma} \tag{4.43'}$$

が成立せねばならない．(3.28) より σ_x, σ_z は実，σ_y は虚数行列であるから，

$$W\sigma_x = \sigma_x W, \quad \sigma_y W = -W\sigma_y, \quad \sigma_z W = W\sigma_z \tag{4.44}$$

である．(4.43′), (4.44) の2式より，

$$\sigma_x U = -U\sigma_x, \quad \sigma_y U = U\sigma_y, \quad \sigma_z U = -U\sigma_z \tag{4.45}$$

が得られる．

一般に任意の2行2列の行列 U は単位行列 $1\left(=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ と $\boldsymbol{\sigma}$ の1次結合で表わされる．

$$U = \alpha 1 + \beta\sigma_x + \gamma\sigma_y + \delta\sigma_z. \tag{4.46}$$

簡単にわかるように (4.45) をみたす U は $\alpha = \beta = \delta = 0$．変換前の u が規格化されているとき，変換後の u' も規格化されるためには $|\gamma| = 1$．したがって，

$$U = \gamma\sigma_y \qquad (|\gamma| = 1). \tag{4.47}$$

時間反転 (4.28) を二度くり返すと元の座標系に戻るから，いろいろな物理量も元の値に戻らなければならない．実際 (4.29), (4.42) より明らかなように $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{S}$ 等は二度の時間反転により元に戻る．一方，波動関数 ψ は，ちょうど座標系の 2π の回転に対し，スピン 1/2 粒子の場合には $\psi \to -\psi$ になったように，元の座標系に戻る変換に対しても $\psi \to \pm\psi$ でよい．([問題 3.4] 参照)

スピン 1/2 粒子に対する時間反転 (4.40) を二度くり返した時に $\psi \to \pm\psi$ であるためには，

$$UWUW = UU^* = \pm 1. \tag{4.48}$$

(4.47) を用いると，

$$UU^* = \gamma^*\gamma\sigma_y\sigma_y{}^* = -\gamma^*\gamma = -1. \tag{4.49}$$

したがって，時間反転のくり返しで，

$$\psi \to -\psi \tag{4.50}$$

でなければならない．

この時 $\gamma^*\gamma = 1$ で通常 $\gamma = i$ ととっている．これより，

$$U = i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.51}$$

このようにして作られた時間反転 (4.40), (4.51) は (4.29), (4.42) を満足し，またそのくり返しは (4.50) をみたすことがわかった．第 7 章で議論するスピン 1/2 粒子の波動方程式 (Dirac 方程式) を用いると，時間反転した座標系での波動方程式は元の座標系のそれと同じことを証明でき，スピン 1/2 粒子に対してもその運動法則の時間反転に対する不変性が導かれる (第 7 章参照).

素粒子はスピンの他にも荷電 Q, strangeness S, 素粒子数 N 等の属性を持っており，これらが時間反転に対してどう変化するかは古典的対応がないのでただちには決められない．しかしこれらが時間反転に対してどう変換するかを一旦決めると，時間反転した世界での物理法則が反転前のそれと同一であるかどうかを調べることができる．そこでむしろ時間反転に対する不変性が保たれるようにこれらの量の時間反転を決めていこう．

われわれの知っている素粒子群の中には，ある荷電 Q, ストレンジネス S, $\cdots$ の属性を持つ素粒子に対し，同一質量，同一スピンでこれら属性の値が $-Q$, $-S$, $\cdots$ の素粒子が何時でも存在するようにみえる．スピン 1/2 粒子の場合には陽子，中性子，電子等々に対し反陽子，反中性子，反電子 (= 陽電子) 等々，スピン 0 粒子の場合には K^+, K^0 中間子に対して $\overline{K^+}$, $\overline{K^0}$ 中間子，π^+ 中間子に対し π^- 中間子というぐあいで，これらを

元の粒子の**反粒子**という．π^0 中間子や光子の場合のように $Q=S=N=\cdots=0$ の時には，それらが自分自身の反粒子になっている．

本書では時間反転に対し $Q\to Q$, $S\to S$, $\cdots$ で粒子と反粒子の間の入れ変りは起こらないとする．

$t\to -t$, $\boldsymbol{r}\to \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}\to -\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{M}\to -\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{S}\to -\boldsymbol{S}$, 粒子→粒子，反粒子→反粒子．

今日までのいろいろな素粒子についての実験は，実験誤差内でこの不変性を確かめている．例外として中性K中間子の崩壊の際に時間反転に対する不変性が破れていることが最近明らかにされ（第12章参照）素粒子物理学の今後の大きな問題の一つになっている

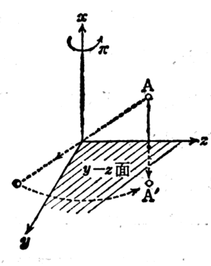
〔問題 4.4〕 スピン 1/2 粒子の波動関数 ψ が時間反転の二度のくり返しで $-\psi$ になることより，スピン整数粒子の ψ は同じ変換で $+\psi$ に，スピン半整数粒子の ψ は $-\psi$ に移ることを示せ．

§4.4　空間反転と素粒子のパリティ

空間座標系には右手座標系と左手座標系の二つがある．右手の親指，中指，人差指をお互に直角になるように開いた時，x, y, z 軸がそれぞれ親指，人差指，中指の方向を向いているときを**右手座標系**，これに対し左手を用いた時にx軸，y軸，z軸がそれぞれ親指，人差指，中指の方向を向いているときが**左手座標系**である．§3.1 で議論した空間座標系の回転や，§4.1 における Lorentz 変換では，初めの座標系が右手（左手）座標系ならば，変換後の座標系も同じく右手（左手）座標系になる．ここでは右（左）手座標系を左（右）手座標系に移す次の変換を考える．

$$x'=-x,\quad y'=-y,\quad z'=-z,\quad t'=t. \tag{4.52}$$

この変換を**空間反転**という．この変換では時間座標は元のままである．



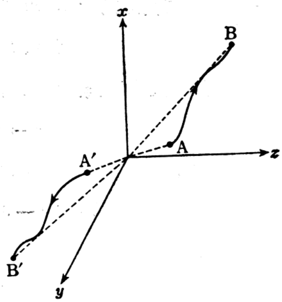
4－3 図

この空間反転と任意の空間回転や Lorentz 変換を組合わせた変換も，右手座標系と左手座標系を交換する変換になっている．たとえば，空間反転と x 軸のまわりの角度 π の回転を順次に行なうと，4－3 図より明らかなように y—z 平面（y. z 軸を含む平面）に対し座標系を鏡映する変換になっている．

座標回転や Lorentz 変換の場合と同様に，空間反転や鏡映を座標系の変換と考える代りに，座標系はそのままで粒子(系)をそれぞれ空間反転，または鏡映して得られる像の所に移す変換と考えることもできる．

古典力学（Newton 力学）における物体の運動 $\boldsymbol{r}(t)$ が 4-4 図の A→B である時，空間反転した世界での同じ運動はその反転像の運動 A′→B′ である．したがって，ただ $\boldsymbol{r}$ の符号が変るのみでなく物体の速度・運動量の符号も変る．これに対し，もし物体が回転しているときは，その角運動量 $\boldsymbol{M}$ は空間反転した系でも符号を変えない．

$$\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r},\ \ \boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p},\ \ \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}. \tag{4.53}$$



4-4 図

このことは，たとえば正の x 軸を正の y 軸に移す回転を考えてみるとわかる．空間反転した座標系では x' 軸（負の x 軸）を y' 軸（負の y 軸）に移す回転になるが，この回転の向きは反転前の回転の向きと明らかに同じである．これらの空間反転に対する性質は $\boldsymbol{v}=d\boldsymbol{r}/dt,\ \boldsymbol{p}=m\,d\boldsymbol{r}/dt,\ \boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ の座標変換（4.52）に対する変換を調べてもただちに導かれる．

さて，空間反転した世界での運動 A′→B′ が反転前の座標系でも実現される運動であるかどうかを調べよう．このためには Newton の運動法則（4.2）が空間反転（4.52）に対し不変であればよい．まず力のポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ が反転で変らない場合（たとえば $|\boldsymbol{r}|$ だけの関数）を考えよう．このとき $\boldsymbol{r}(t)$ が一つの解である時，$\boldsymbol{r}'(t)=-\boldsymbol{r}(t)$ も一つの解になっていればよい．$\boldsymbol{F}=-\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}$ は $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ と同様に $\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r}$ に対し，符号を変える．したがって $\boldsymbol{r}(t)$ も $-\boldsymbol{r}(t)$ も同時に Newton の方程式をみたしている．（一般のポテンシャルの場合は，$-\boldsymbol{r}(t)$ は反転されたポテンシャル $V(-\boldsymbol{r})$ のなかで実際に起こり得る運動である．）したがって，Newton の運動方程式は空間反転に対し不変である．

次に量子力学における空間反転を考えよう．量子力学系の状態は波動関数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ で表わされ，空間反転すると状態 $\psi(-\boldsymbol{r},t)$ に移る．空間反転の演算子 P を次のように定義しよう．

$$P\psi(\boldsymbol{r},t)=\psi(-\boldsymbol{r},t). \tag{4.54}$$

空間反転を二度くり返すと（4.54）より明らかのように元の状態に戻るから，

$$P^2=1. \tag{4.55}$$

$P^2=1$ よりの P 固有値は ±1 のいずれかでなければならず，$P=\pm1$ の固有状態

$$P\psi(\boldsymbol{r},t)=\pm\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{4.56}$$

を，それぞれ**正・負のパリティ状態**という．これらの状態は，したがって，

$$\psi(-\boldsymbol{r},t)=\pm\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{4.57}$$

であるから，それぞれ $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ に対し対称および反対称な状態である．

一例として角運動量 $l,\ m$ の球面波を考えよう．

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} f_l(r) Y_l^m(\theta) e^{im\varphi}. \tag{4.58}$$

空間反転に対し極座標 $r,\ \theta,\ \varphi$ は，

$$r \to r,\ \ \theta \to \pi - \theta.\ \ \varphi \to \varphi + \pi \tag{4.59}$$

であるから，球関数（3.21）の性質により，

$$Y_l^m(\pi - \theta) e^{im(\pi+\varphi)} = (-1)^l Y_l^m(\theta) e^{im\varphi}.$$

これより，

$$P\psi(\boldsymbol{r}, t) = (-1)^l \psi(\boldsymbol{r}, t),$$

すなわち $l = 0, 2, 4, \cdots$ の状態は正のパリティ状態で $P = 1$ の固有値，$l = 1, 3, 5, \cdots$ の状態は負のパリティ状態で $P = -1$ の固有値を持つことがわかる．

古典力学との対応を正しく保つためには，$\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{M}$ 等の演算子の期待値は（4.53）のように変換しなければならない．このことは $\boldsymbol{p} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}$，$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ 等を用いて容易に確かめられる．

$$P\boldsymbol{p}\psi(\boldsymbol{r}, t) = P\left(-i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial \boldsymbol{r}}\right) = -i\hbar\frac{\partial\psi(-\boldsymbol{r}, t)}{\partial(-\boldsymbol{r})},$$

$$\boldsymbol{p}P\psi(r, t) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}(P\psi(\boldsymbol{r}, t)) = -i\hbar\frac{\partial\psi(-\boldsymbol{r}, t)}{\partial \boldsymbol{r}}$$

より　$P\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{p}P$,　同様に　$P\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{r}P,\ P\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}P.$

$P^2 = 1$ を用いると，これらより次の関係が導れる．

$$P\boldsymbol{r}P = -\boldsymbol{r},\ \ P\boldsymbol{p}P = -\boldsymbol{p},\ \ P\boldsymbol{M}P = \boldsymbol{M}. \tag{4.60}$$

さて，空間反転した世界での状態 $\psi'(\boldsymbol{r}, t) = \psi(-\boldsymbol{r}, t)$ のしたがう運動法則が反転前の世界でのそれと同一であれば，$\psi(-\boldsymbol{r}, t)$ は反転前の世界でも実現される状態である．ψ を決める Schrödinger 方程式，

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{M})\right)\psi(\boldsymbol{r}, t)$$

で，もし，ポテンシャル $V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{M})$ が，

$$V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{M}) = V(-\boldsymbol{r}, -\boldsymbol{p}, +\boldsymbol{M}) \tag{4.61}$$

をみたす場合，$\psi(-\boldsymbol{r}, t)$ もこの式の解であることは明らかである．量子力学系に働く力は素粒子の崩壊の際に働くきわめて弱い力を別にすると，常にこの条件をみたしていることがいままでのところ確かめられている．したがって，素粒子が安定と考えてよい範囲の現象について，物理法則は空間反転に対して不変である．運動エネルギー（$\boldsymbol{p}^2/2m$）は空

間反転に対し不変であるから Hamiltonian H ($=V+$ 運動エネルギー) は (4.60) および (4.61) により,

$$PH(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{M})P=H(-\boldsymbol{r},\ -\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{M})=H(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{M})$$

をみたす. あるいは,

$$[P,\ H]=0 \tag{4.62}$$

と書くこともできる. 逆に (4.62) がみたされるときは運動法則は空間反転に対し不変である.

素粒子がスピンを持つときも, そのスピン波動関数は一般に空間反転に対して変換する. 空間反転を二度くり返すと元の状態に戻ると考えると, この内部座標の空間反転に対しても $P^2=1$ (4.55) が成立する.

[注意] げんみつにいうと, ある状態を表わす波動関数には位相因子だけの不定性があるので, 二度の空間反転に対し $\psi\rightarrow\exp(i\varphi)\psi$ であればよい. ただし, φ は互に干渉しうる ψ に対しては共通でなければならないので, $\varphi=0$ ととることができる.

したがって $P=\pm1$ のスピン状態が存在する. この P を素粒子の **パリティ** とよぶ. 軌道角運動量の場合には角運動量の大きさ l とパリティ P の間に $P=(-1)^l$ の関係があるが, 素粒子のスピンとパリティの間には必ずしもこの関係はなく, たとえばスピン 0 の π, K 中間子等のパリティは -1 である. さらに, スピン $\boldsymbol{S}$ が角運動量に対応するものであるためには, 空間反転に対して,

$$P\boldsymbol{S}P=\boldsymbol{S} \tag{4.63}$$

が成り立たねばならない. スピン 1/2 粒子の場合を例にとると, $\boldsymbol{S}=\dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ は 2 行 2 列の行列で (3.28) で表わされるが, $\boldsymbol{S}$ の各成分と可換で, かつ $P^2=1$ の P は,

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

である. 前者は常に $P=+1$, 後者は常に $P=-1$ の固有状態しか持たず, $P=\pm1$ の両方の状態が存在しうるためには 2 行 2 列の行列で P を表わすことはできない. 実際にはスピン 1/2 粒子には常にその反粒子が存在し, 合計 4 成分の ψ を導入することになり, P は 4 行 4 列の行列として表わされる. このようにして, $P=\pm1$ の両方の状態が同時に入ってくる (第 7 章参照).

いくつかの粒子から成る系のパリティ P は, それら粒子間の相対運動の軌道角運動量の大きさを $l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_N$ (粒子数 n 個の時, 独立な軌道角運動量の数 N は $N=n-1$) とし, それぞれの粒子のパリティを $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n$ とすると,

$$P=(-1)^{l_1+l_2+\cdots l_N}P_1P_2\cdots P_n. \tag{4.64}$$

一般にいくつかの素粒子から成る系の全パリティ P と Hamiltonian H は可換で(4.62)が成立する（崩壊等に効く弱い相互作用を H の中に含めない近似）．したがって，P の固有値は衝突前後で変らない．

初めに素粒子 a, b 間の弾性散乱 $a+b\to a+b$ を考えよう．a, b のパリティをそれぞれ p_a, p_b, $a-b$ 間の軌道角運動量を l とすると，全系のパリティは $P=(-1)^l p_a p_b$. 弾性散乱では衝突前後で粒子の種類は不変なので，$(-1)^l$ が衝突前後で同一ならパリティ保存が成立していることになる．一例として陽子・陽子散乱 $p+p\to p+p$ を考える．2個の陽子のスピン S_1, S_2 の和を S とすると，S_1 と S_2 が平行か反平行かにより $S=1$，または $S=0$，S と軌道角運動量 M との和，全角運動量の大きさを J と書くと，系の状態は S, L, J を与えて決まる．S, L, J 状態を ${}^{2S+1}L_J$ で表わす．特に $L=0$, 1, 2, $\cdots$ の時，これを S, P, D, $\cdots$ 状態とよぶ．たとえば，

$$S=1,\ L=0,\ J=1\cdots{}^3S_1,$$

$$S=0,\ L=1,\ J=1\cdots{}^1P_1.$$

さて，${}^1S_0$ 状態にある2個の陽子が弾性散乱を行なうと，衝突後の状態は角運動量の保存則から $J=0$，すなわち ${}^1S_0$ か ${}^3P_0$ のいずれかでなければならない．それぞれの状態の軌道運動のパリティは $+1$ および -1 であるから，もし ${}^3P_0$ 状態に系が見出されればパリティがこの衝突で保存されないことになる．実験をしてみると，${}^1S_0$ 状態のみに存在し，${}^3P_0$ 状態には系は見出されない．${}^3S_1$ 状態からは ${}^3S_1$, ${}^3D_1$ の二つの状態に移ることができるが P_1 にはいかない．

衝突前後で同一の粒子が同数個ずつ存在するときは，衝突に関与する素粒子のパリティ p_a, p_b, $\cdots$ の値は何であってもパリティ保存則に影響しない．これに反して一般の衝突 $a+b\to c+d$ では，もしパリティ保存則が成立すれば，

$$(-1)^l p_a p_b=(-1)^{l'} p_c p_d.$$

l, l' はそれぞれ $a-b$, $c-d$ 間の軌道角運動量である．もし粒子 a, b, c, d 中の3個のパリティがわかっているときは，l, l' を実験ではかることにより残りの1個のパリティが決まる．さらに，より一般の衝突 $a+b\to c+d+e+\cdots$ でも，衝突前後におけるいろいろな軌道角運動量の大きさを調べることにより，新しい粒子のパリティを実験的に決めることができる．衝突前後における軌道運動に関係したパリティが符号を変えるかどうかに応じて，

$$p_a p_b=\pm p_c p_d p_e\cdots. \tag{4.65}$$

これより，たとえば素粒子 c のパリティ p_c は p_a, p_b, p_d, p_e, … がわかっていれば決定される．またこの式よりわかるように素粒子のパリティは他の素粒子，または素粒子系のパリティを標準にして決まるもので，たとえば p_a の符号を変えれば (4.65) から決まる p_c も符号を変える．

素粒子間の衝突では，荷電 Q, strangeness S, 重粒子数 N の保存則等いくつかの保存則が知られている．したがって，ある系 A のパリティ P_A をあらかじめ決めて，これを標準にして別の系 B のパリティを実験的に決めようとする時，$A \to B$ という反応がこれら保存則に矛盾(むじゅん)するため決して起こらないならば B のパリティは決められない．その結果，系 B のパリティも任意に与えうる．このようにして独立な保存則の数だけパリティの決め方に任意性が生ずる．

Q, S, N の保存則に対応して，陽子・中性子・Λ 粒子のパリティをそれぞれ $+1$ と決めた時の，実験から得られる各素粒子のパリティは次の通りである (1-2 表中のパリティはこのようにして決めた)．

4-3 表　素粒子のパリティ

素　粒　子	p
陽子・中性子・Λ, Σ, Ξ 粒子	$+1$
反陽子・反中性子・$\bar{\Lambda}$, $\bar{\Sigma}$, $\bar{\Xi}$ 粒子	-1
$\pi^{\pm 0}$, $K^{\pm}$, $K_{1,2}{}^0$ 中間子	-1

一たん，ある衝突現象を用いて素粒子のパリティが決まると，別の衝突を用いてこのようにして決められたパリティが実際に保存しているかどうかを実験的に調べることができる．このようにして，素粒子間の衝突や電磁気的現象ではパリティ保存則が実験誤差内で確かめられている．

これに反し，素粒子の崩壊や，この崩壊をひき起こす弱い力によるいろいろな現象では一般にパリティが保存しない．この点については第12章で議論しよう．μ 中間子，電子，ニュートリノ等はこの弱い力のみを通じて相互に転化しうるので，これらの粒子のパリティはいまのところ相互に関連なく与えられている (通常 e^-. μ^-, ν に対し $p=+1$ としている)．

〔問題 4.5〕 座標系の空間回転 (3.2) および空間反転 (4.52) に対し，次の行列式 Δ の値はそれぞれ $+1$，および -1 のことを示せ．これより右手 (左手) 座標系の間の任意の座標変換に対し $\Delta=+1$，右手座標系と左手座標系を交換する任意の座標変換に対して $\Delta=-1$ になる．

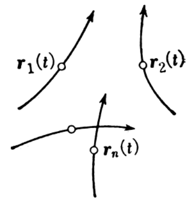
$$\Delta=\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x'}{\partial x} & \dfrac{\partial x'}{\partial y} & \dfrac{\partial x'}{\partial z}\\ \dfrac{\partial y'}{\partial x} & \dfrac{\partial y'}{\partial y} & \dfrac{\partial y'}{\partial z}\\ \dfrac{\partial z'}{\partial x} & \dfrac{\partial z'}{\partial y} & \dfrac{\partial z'}{\partial z}\end{vmatrix}.$$

〔問題 4.6〕 $\pi^{\pm,0}$ 中間子のみよりなる仮想的な世界を考え，この世界で起こるいろいろな衝突 $\pi^+\pi^0\to\pi^+\pi^0$, $\pi^+\pi^-\to\pi^0\pi^0$, $\cdots$, $\pi^+\pi^-\to\pi^+\pi^-\pi^0$, $\cdots$ 等を用い，$\pi^{\pm,0}$ のパリティを定めるとしよう．荷電保存則が成立するため，π^+, π^- の内の一つ，たとえば π^+ のパリティは任意に与えられ，残りの π^-, π^0 のパリティは実験から決まることを示せ．さらに反応前後の中間子数の変化が常に偶数 (0, 2, 4, $\cdots$) である時は，2個の π, π^+ と π^0 または π^- と π^0 のパリティは任意で，残りの一つ π^- または π^+ のパリティが実験から決まることを示せ．(実際には G パリティといわれる量の保存則から，π 中間子はこの条件をみたしている (第10章参照))．

〔略解〕 いま $\pi^{\pm,0}$ のパリティをそれぞれ $p_{\pm,0}$ で表わそう．$p_+=-1$ と決めて，p_0, p_- を実験から定めることを考えよう．$\pi^++\pi^-\to\pi^0+\pi^0$ の実験を行なうと，角運動量の保存則から衝突前の $\pi^+\pi^-$ 間の軌道角運動量 l と衝突後の $\pi^0\pi^0$ 間の軌道角運動量 l' は等しい(π 中間子のスピン0のため)．したがってパリティ保存則 $(-1)^l p_+p_-=(-1)^l p_0^2$ は $p_+p_-=p_0^2$ になる．π^0 のパリティ p_0 が ±1 のいずれでも $p_0^2=1$ であるから，これより $p_+p_-=1$, $p_+=-1$ ならば $p_-=-1$ である．これに反し，もし $p_-=+1$ ならばパリティ保存則より，$\pi^++\pi^-\to\pi^0+\pi^0$ という反応は起こらないはずである．次に $\pi^++\pi^-\to\pi^++\pi^-+\pi^0$ を調べよう．衝突前の角運動量 l，衝突後の角運動量を l', l'' としよう．l' はたとえば $\pi^+\pi^-$ の相対運動の角運動量，l'' は π^0 の $\pi^+\pi^-$ 重心のまわりの角運動量としてよい．実験により l, l', l'' を知ることができ，これにパリティ保存則を適用すると $(-1)^l p_+p_-=(-1)^{l'+l''}p_+p_-p_0$, したがって $p_0=(-1)^{l-l'-l''}$ で与えられる．(l, l', l'' の値は実験により異なっても，$l-l'-l''$ は常に奇数 ($p_0=-1$) または常に偶数 ($p_0=+1$) である) 以上の p_-, p_0 の決め方より明らかなように，パリティ保存則から得られる条件は常に p_+p_- の積に対する条件 ($p_+p_-=1$) で，p_+, p_- のそれぞれに対する条件を与えるような実験は存在しない．したがって p_+, p_- の一方は任意に決めうる．もし $p_+=1$ ととると，$p_-=1$, $p_0=(-1)^{l-l'-l''}$ である．(実際には $p+\bar{n}\to\pi^+$ 等の反応を調べることにより p_+ を決めうる．その結果は $p_+=-1$ である)．G パリティの保存則がある時は，衝突前後における π^0 の数の変化は常に偶数個で (0, 2, 4, $\cdots$) p_0 ではなく p_0^2 に対する条件 ($p_0^2=1$) が得られるだけである．したがって $p_0=\pm1$ のいずれであるかは決められないので p_+, p_0 または p_-, p_0 を自由にえらぶことができる (実際には p_0 は $\pi^0\to\gamma+\gamma$ 等を調べて $p_0=-1$ のことが実験的に求められた)．

第5章　Bose 粒子と Fermi 粒子 ——素粒子の統計——

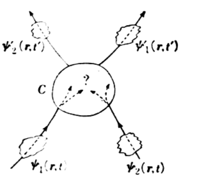
この章では2個以上の素粒子が集まった系を議論しよう．古典物理学では n 個の同一の質点からできている系の運動のようすは，個々の質点に番号 1, 2, ⋯, n をつけ，それぞれの番号 (i) を持った質点の座標 $\boldsymbol{r}_i$ ($i=1, 2, \cdots, n$) を時間 t の関数 $\boldsymbol{r}_i(t)$ として与えて決まる (5-1 図)．次に同一の素粒子の集まりを量子力学で記述するときを考えよう．簡単のために $n=2$ の場合を考え，ある時刻 t で2個の素粒子がそれぞれ波動関数 $\psi_1(\boldsymbol{r}_1, t)$, $\psi_2(\boldsymbol{r}_2, t)$ で表わされる状態にあるとしよう．素粒子に番号をつけ，状態 ψ_1 にある素粒子に番号 1, ψ_2 にある素粒子に番号 2 をつけよう．全系の波動関数 Ψ は ψ_1 と ψ_2 の積である．



5-1 図　古典力学における n-粒子系の運動

$$\Psi=\psi_1(\boldsymbol{r}_1, t)\psi_2(\boldsymbol{r}_2, t). \tag{5.1}$$

さて時刻 t は2個の粒子 1, 2 が互に衝突する以前の時間で，ψ_1 と ψ_2 は空間的に相互に重なっていない状態と考え，時間がたつにつれ ψ_1, ψ_2 が重なって粒子の衝突が起こると考えよう．さらに時間がたつ間に粒子間の衝突が終り時刻 t' ($>t$) には再び粒子 1, 2 は相互に重なっていない状態 $\psi_1'(\boldsymbol{r}_1, t')$, $\psi_2'(\boldsymbol{r}_2, t')$ に移る (5-2 図)．二つの状態 ψ_1, ψ_2 が空間的に重なっていない時刻では，ある場所 $\boldsymbol{r}$ にある粒子が粒子1であるか，あるいは粒子2であるかを区別することができるけれども，衝突が起こり二つの波が重なっている時刻では，衝突領域 C 中の点 $\boldsymbol{r}$ にある粒子が粒子1であるか2であるかを見分けることは，それらが同一粒子であることから原理的にできない．したがってそのような時刻を過ぎた後に衝突領域 C から現われる二つの波 ψ_1', ψ_2' のどちらがもとの粒子 1（または2）の波動関数に対応するかを決めることはできなくなってくる．そこで衝突後の系の状態は粒子1が ψ_1' に，2が ψ_2' に移ったと考えられる状態 $\psi_1'(\boldsymbol{r}_1, t')\psi_2'(\boldsymbol{r}_2, t')$ と，逆に粒子1が ψ_2' に，粒子2が ψ_1' に移ったと考えられる状態 $\psi_2'(\boldsymbol{r}_1, t')\psi_1'(\boldsymbol{r}_2, t')$ とが混っていると考えられる．



5-2 図　量子力学における同一粒子間の衝突

さらに衝突前の時刻 t を振り返って考えてみると，番号 1, 2 のつけ方は任意であるから状態 ψ_1 にいる粒子を粒子 2, ψ_2 にいるものを粒子 1 と名づけてもよく，全系の状態は一般に $\psi_1(\boldsymbol{r}_1, t)\psi_2(\boldsymbol{r}_2, t)$ と $\psi_1(\boldsymbol{r}_2, t)\psi_2(\boldsymbol{r}_1, t)$ の混った状態と考えてもよい．そこで

二つの異なる混り方としてそれぞれ二つの粒子に対し対称的および反対称的な混り方

$$\Psi_{\pm}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(\boldsymbol{r}_1, t)\psi_2(\boldsymbol{r}_2, t)\pm\psi_2(\boldsymbol{r}_1, t)\psi_1(\boldsymbol{r}_2, t)) \qquad (5.2)$$

を考える．任意の混り方の状態はこの二つの状態の1次結合で表わしうる．$\frac{1}{\sqrt{2}}$ は ψ_1 と ψ_2 が共通の領域を持たないときに，

$$\int d\boldsymbol{r}_1\int d\boldsymbol{r}_2|\Psi_{\pm}|^2=1 \qquad (5.3)$$

にするために導入した．

波動関数 ψ_1, ψ_2 はそれぞれ拡がりを持っており，2粒子間の衝突中の時刻のように二つの波が重なるときには，二つの波の間に干渉が起こり，またその干渉のようすは Ψ が対称であるか反対称であるかにより異なってくる．

$$|\Psi_{\pm}|^2=\frac{1}{2}\{|\psi_1(\boldsymbol{r}_1, t)|^2|\psi_2(\boldsymbol{r}_2, t)|^2+|\psi_2(\boldsymbol{r}_1, t)|^2|\psi_1(\boldsymbol{r}_2, t)|^2\}$$
$$\pm\frac{1}{2}\{(\psi_1^*(\boldsymbol{r}_1,t)\psi_2(\boldsymbol{r}_1,t))(\psi_2^*(\boldsymbol{r}_2,t)\psi_1(\boldsymbol{r}_2,t))$$
$$+(\psi_2^*(\boldsymbol{r}_1,t)\psi_1(\boldsymbol{r}_1,t))(\psi_1^*(\boldsymbol{r}_2,t)\psi_2(\boldsymbol{r}_2,t))\}. \qquad (5.4)$$

右辺の第2項が干渉項である．

2個の同一素粒子からなる系の状態 $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)$ が時間 t と共にどのように変るかを調べるため Schrödinger 方程式，

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)}{\partial t}=H(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) \qquad (5.5)$$

を考えよう．2粒子間の力がその距離 $r=|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$ のみの関数である場合，

$$H(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)=H(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1, t) \qquad (5.6)$$

で，$\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ の交換に対し H は不変である．一般に H が粒子の運動量，スピン等による複雑な系を考えても常に H は同一粒子 1，2 の交換，

$$\boldsymbol{r}_1\rightleftarrows\boldsymbol{r}_2,\ \ \boldsymbol{p}_1\rightleftarrows\boldsymbol{p}_2,\ \ \boldsymbol{S}_1\rightleftarrows\boldsymbol{S}_2, \cdots \qquad (5.7)$$

に対し不変になっている．

H がこのような性質を持っているときは，ある時刻 t で $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)$ が粒子 1，2 の交換（$\boldsymbol{r}_1\rightleftarrows\boldsymbol{r}_2$）に対し対称であれば，(5.5) を解いて得られるその後の状態も同じくこの交換に対して対称であり，また逆に，初め反対称の状態はいつまでたっても反対称である．このことは微少時間 Δt の間に起こる Ψ の変化 $\Delta\Psi$,

$$\Delta\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)=-\frac{i}{\hbar}\Delta tH(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) \qquad (5.8)$$

の $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ の交換に対する性質を調べるとわかる．H はこの交換に対し対称であるから

Ψ が対称か反対称かに応じて $\Delta\Psi$ も対称または反対称である．任意の時間経過した後の状態はこのような微少時間の間の状態変化をくり返すことにより得られるから，ある時刻で対称な状態は常に対称な状態であり，また逆にある時刻で反対称な状態は常に反対称である．

さて，スピン整数値を持った2個の同一素粒子からなる系の状態を実験的に調べると，常に2個の粒子の交換に対し対称な状態になっている．π 中間子，K 中間子，光子等はこの場合に相当し，**Bose 粒子**といわれる．この対称化は単に同一の Bose 粒子が2個集まった系にあてはまるだけでなく，多数個の同一の Bose 粒子からなる系でも全系の波動関数 $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n, t)$ は任意の 2 個の粒子 i, j の交換 $\boldsymbol{r}_i \rightleftarrows \boldsymbol{r}_j$ に対し対称になっている．(Ψ がスピン座標による場合も同様である)．この性質を **Bose 統計**という．

これに対し，スピン半整数の陽子・中性子・電子等を調べてみると常に反対称化が行なわれており，このような粒子を **Fermi 粒子**という．Bose 粒子の場合と同様に，同一の Fermi 粒子が多数個存在する系においては，その中のどの2個をとっても全系の波動関数は2粒子の交換に対して反対称である．この性質を **Fermi 統計**という．

以上の奇妙な性質は同一の素粒子の集まりからなる系のとりうる状態に興味ある制限を与える．まず初めに2個の同一粒子が同じ場所，同じスピン状態に同時に存在できるかどうかを調べよう．

a) Fermi 粒子

Fermi 粒子は必ずスピンを持っているので $\left(S=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots\right)$，$n$ 個の同一 Fermi 粒子からなる系の波動関数は $\Psi(\xi_1, \boldsymbol{r}_1; \xi_2, \boldsymbol{r}_2; \cdots; \xi_n, \boldsymbol{r}_n; t)$ で表わされる．$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ はそれぞれの粒子のスピン座標で，陽子や電子のようにスピン 1/2 粒子の場合には ± 1 のいずれかの値をとる．$\xi=+1$ は $\sigma_z=+1$，$\xi=-1$ は $\sigma_z=-1$ のスピン状態を表わし，たとえば $\Psi(+1, \boldsymbol{r}_1; \cdots)$ は第1番目の粒子が $\boldsymbol{r}_1$ に存在し，そのスピンが上を向いていることに対する確率振幅である．さて反対称な波動関数 Ψ は任意の2個の粒子，たとえば i 番目の粒子と j 番目の粒子の座標の交換 $\boldsymbol{r}_i \rightleftarrows \boldsymbol{r}_j$, $\xi_i \rightleftarrows \xi_j$ に対して反対称，すなわち Ψ の符号が変らねばならない．

$$\Psi(\cdots; \xi_i, \boldsymbol{r}_i; \cdots; \xi_j, \boldsymbol{r}_j; \cdots; t) = -\Psi(\cdots; \xi_j, \boldsymbol{r}_j; \cdots; \xi_i, \boldsymbol{r}_i; \cdots; t). \quad (5.9)$$

2個の同一 Fermi 粒子 i, j が同一の座標 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_j$, $\xi_i=\xi_j$ を持つ振幅は，(5.9) で右辺と左辺の Ψ は同一であるから，これより，

$$\Psi(\cdots; \xi_i=\xi, \boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}; \cdots; \xi_j=\xi, \boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{r}; \cdots; t)=0.$$

すなわち，同じスピン状態にある二つの同一 Fermi 粒子は同時に同じ場所に存在するこ

とはできない．これを **Pauli の禁制原理** という．

b）Bose 粒子

スピン 0 の Bose 粒子，たとえば π^+ 中間子を例にとろう．この場合，波動関数は位置座標 $\boldsymbol{r}_i$ だけの関数 $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n; t)$ である．これは任意の2個の座標 $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}_j$ の交換に対して対称であり，Fermi 粒子の場合と異なって $\Psi(\cdots, \boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}, \cdots \boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{r}, \cdots; t)$ は一般に 0 ではない．さらに $\Psi(\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}, \cdots, \boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{r}; t)$ も一般には0でない．したがって同時に同一の場所に任意の個数の Bose 粒子が存在できる．

実際には粒子相互間に力が働いており，もしその力が斥力であれば互に近づき難くなり粒子が同一の場所に存在する確率はきわめて小さくなるだろう．しかし無限の強さの斥力が働いていない限りは粒子は同一の場所に同時に存在しうる．

以上はスピン 0 の Bose 粒子を考えたが，スピンを持つ Bose 粒子も同一スピン状態，同一の場所に何個でも存在することができる．Fermi 粒子ならば 1 個までしか存在しえない．

スピン1/2粒子の中には陽子・中性子・電子等物質の構成にきわめて基本的な役割をしている素粒子が含まれるので，さらにくわしく2個のスピン1/2粒子からなる系の性質を調べよう．この系の波動関数 $\Psi(\xi_1, \boldsymbol{r}_1; \xi_2, \boldsymbol{r}_2; t)$ がスピン部分と空間部分の積，

$$\Psi(\xi_1, \boldsymbol{r}_1; \xi_2, \boldsymbol{r}_2; t) = U(\xi_1, \xi_2)\varphi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) \tag{5.10}$$

のときスピン部分を全スピン角運動量 $\boldsymbol{S}=\dfrac{\hbar}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)$ の個有状態で書いてみよう．

スピン1/2の二つの角運動量を合成して得られる $\boldsymbol{S}$ の大きさは1または0（$\hbar$を単位）で，$S=1$, $S_z=\pm1, 0$ および $S=S_z=0$ の4個の固有状態が存在する．これらの固有状態を § 3.4 の方法で求めると 5-1 表のようになる．

5-1 表　2個のスピン 1/2 粒子からなる系のスピン状態

S	S_z	固有状態 $u(\xi_1, \xi_2)$
1	$+1$	$u(1, 1)$
1	0	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{u(1, -1)+u(-1, 1)\}$
1	-1	$u(-1, -1)$
0	0	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{u(1, -1)-u(-1, 1)\}$

合成スピンの大きさ $S=1$ の状態では，U は ξ_1, ξ_2 の交換に対し対称，$S=0$ の状態では反対称になっている．全体の Ψ が粒子 1, 2 の交換に対し反対称であるためには，

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) = -\varphi(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1, t)\cdots S=1, \\ \varphi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) = +\varphi(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1, t)\cdots S=0\end{cases} \tag{5.11}$$

でなければならない．

これよりスピンが平行の状態（$S=1$）では，2個のスピン 1/2 粒子は同一の場所に存在し得ないが，スピン反平行の状態（$S=0$）では同一の場所に存在しうる．しかしこの場合でも2粒子間に斥力が働いているときは2粒子を同一の場所に見出す確率はきわめて小さくなるであろう．

同一の素粒子の集まりのしたがうこの特殊な法則から，同一の場所に同一の素粒子が2個以上存在しうるかどうかを議論したが，一般にある素粒子1がある状態 a，$\psi_a(\xi_1, \boldsymbol{r}_1)$ に見出されたとき，これと同一のもう一つの素粒子2が同じ状態 a，$\psi_a(\xi_2, \boldsymbol{r}_2)$ に存在しうるかどうかも同様に議論できる．2個の素粒子からなる系の波動関数，

$$\Psi = \psi_a(\xi_1, \boldsymbol{r}_1)\psi_a(\xi_2, \boldsymbol{r}_2) \tag{5.12}$$

は $\xi_1 \rightleftarrows \xi_2$, $\boldsymbol{r}_1 \rightleftarrows \boldsymbol{r}_2$ の交換に対し対称なので，これより Bose 粒子は同一状態に何個でも存在しうるが，Fermi 粒子はただ一個しか存在し得ない．後者が Pauli の禁制原理である．

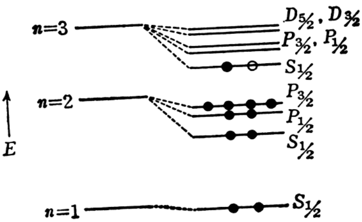
以上のことは原子や原子核の構造にきわめて重要な結果をもたらす．原子は荷電 Ze($Z=1,2\cdots$) を持つ重い原子核のまわりに Z 個の電子が量子力学的法則にしたがって回転している系である．これら電子の軌道は，原子核により作られる Coulomb の引力の働いているときの Schrödinger 方程式を解いて得られるが，ある飛び飛びのエネルギーを持った許された軌道の内のどれか一つをとる．電子のスピンに関係した力，電子間の力，相対論的な効果等を省略した近似では軌道角運動量 l の状態のエネルギーは（第8章参照）

$$E_{n,l} = -\left(\frac{Ze^2}{4\pi\hbar c}\right)^2\frac{mc^2}{2n^2}. \tag{5.13}$$

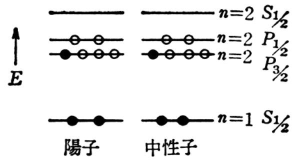
n は主量子数といわれ，与えられた l の値に対し $n=l+1$, $l+2$, $\cdots$ の整数値をとる．m は電子の静止質量，e は電子の荷電の大きさである．この近似の範囲内では $E_{n,l}$ は l によらない．さらに近似を進めると E は電子の軌道角運動量 l，全角運動量 j($\boldsymbol{j}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{S}$) にも関係してくる．たとえば Na 等のアルカリ原子のエネルギー準位は5-3図のようなものである．

原子核のまわりをまわる電子はなるべく安定なエネルギーの低い軌道に入ろうとするので，もし Pauli 禁制原理がなければ，すべての電子は結局 $l=0$, $n=1$ の状態に見出されるはずである．たまたま高いエネルギーの軌道 n, l, j にある電子は，いずれは光を出して，しだいに低いエネルギーの軌道に移り，最後に $l=0$, $j=1/2$, $n=1$ 軌道に移る．実際には Pauli 禁制原理のために一つの n, l, j 状態には $2j+1$ 個の電子しか存在し得ない．これは全角運動量 j の状態はその z 成分の値の異なる $2j+1$ 個の独立な

状態が存在し，一つのエネルギー準位が実は $2j+1$ 個の同一エネルギーの（縮退した）準位に相当するからである．したがって，Z 個の電子は 5-3 図のように低いエネルギー準位からだんだんに埋めていく．

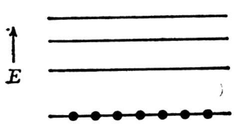


5-3 図　Na 原子のエネルギー準位．左側は（5.13）の近似，右側は正しい準位配列を示す．$S, P, D, \cdots$ は $l=0, 1, 2, \cdots$ の略，右下の数は j の値である．Na 原子内の 11 個の電子はエネルギーの低い状態に順次下から配置される（●は電子，○は空いている準位）



5-4 図　軽い核のエネルギー準位と Li^6 における陽子・中性子の配列

一方，原子核は陽子と中性子の集合体で陽子の個数は原子核の全荷電に等しく，陽子数と中性子数の和は核の質量数に等しい．陽子・中性子相互間に働く力は Coulomb 力よりも複雑であるが，近似的には個々の陽子・中性子があるポテンシャルの中を動いていると考えられ，それぞれの粒子の入っているエネルギー準位を決めることができる．陽子相互間，中性子相互間には Pauli の原理が働くので，原子中の電子の配列と同様な事情が認められる．5-4 図は軽い核のエネルギー準位と Li^6 の陽子・中性子の配列のようすを示してある．



5-5 図　Bose 凝集

これに反し Bose 粒子の場合には同一状態に何個でも粒子が存在しうるので最低エネルギー状態に粒子が集まる．このことを **Bose 凝集**という．5-5 図は凝集のようすを示している．

以上議論した Fermi 粒子および Bose 粒子系における各粒子のエネルギー準位に配列されるようすは，その系が孤立していて外からエネルギーを加えられていないときに相当する．したがって，系はもし励起された状態にあれば光の放出等を通じてエネルギーを失ない最低エネルギー状態（基底状態）の配列になり，そのまま外からのエネルギーの供給がないためにその基底状態に落ち着いてしまう．たとえば Na 原子中の一個の電子が $P_{3/2}(n=2)$ 準位の代りに $S_{1/2}(n=3)$ 状態にあれば，ある

時間の間に $S_{1/2}(n=3)\rightarrow P_{3/2}(n=2)$ の転移が起こり，二つの準位のエネルギー差に等しい光を放出して原子は基底状態に移る．

これに反し，多数の粒子からなる系をある恒温槽の中に入れたときには，系はもはや孤立した系ではなくて，系と恒温槽（外界）との間にエネルギーの交換が行なわれ，あるエネルギーとなったところで系は恒温槽と同一の温度になる．この温度Tに保たれた平衡状態における系内の各粒子の配置のようすは統計力学により調べられている．個々の粒子のとりうるいろいろなエネルギー状態にエネルギーの低い方から番号を 1, 2, … とつけ，またそのエネルギーを $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$，各状態が縮退している場合の度合を $g_1, g_2, \cdots$ とすると，粒子の各準位に配置される割合は次のように与えられる．

a） 古典統計（Boltzmann 統計）

各粒子が区別できる場合で，状態 i に粒子の存在する数 N_i は，

$$N_i=\exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)g_i\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right). \tag{5.14}$$

μは化学ポテンシャルといわれ，次の条件から決まる N, T の関数である．

$$N=\sum_i N_i=\exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)\sum_i g_i\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right). \tag{5.15}$$

kは Boltzmann 定数，T は絶対温度，N は全粒子数である．

$$k=1.3805\times10^{-16}\text{erg/deg}.$$

いろいろな温度の値における kT を 5-2 表にしるす．エネルギー ε_i が大きくなると共に N_i の数は減少し（縮退の度合 g_i が同一ならば），基底状態とのエネルギー差が kT をこえると急激に減少する．したがって粒子の大部分は $\varepsilon_i-\varepsilon_1\lesssim kT$ をみたすエネルギー準位に配置されている．5-6 図は Boltzmann 分布で ε_i が ε_1 から ∞ まで連続的に変るとして N_i を ε_i の関数として示してある（ただし $g_i=1$ の場合）．

5-2 表

T（絶対温度）	kT
1	1.38×10^{-16} erg $\approx 8.67\times10^{-5}$ eV
10	1.38×10^{-15} erg $\approx 8.67\times10^{-4}$ eV
10^2	1.38×10^{-14} erg $\approx 8.67\times10^{-3}$ eV
10^3	1.38×10^{-13} erg $\approx 8.67\times10^{-2}$ eV
10^4	1.38×10^{-12} erg ≈ 0.867 eV

b） Fermi 統計（Fermi-Dirac 統計）

$$N_i=\frac{g_i}{\exp\{(\varepsilon_i-\mu)/kT\}+1}. \tag{5.16}$$

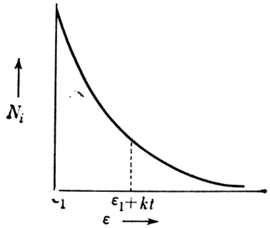
μ は化学ポテンシャルで系の全粒子数を N とすると，

$$N=\sum_i N_i=\sum_i \frac{g_i}{\exp\{(\varepsilon_i-\mu)/kT\}+1} \tag{5.17}$$

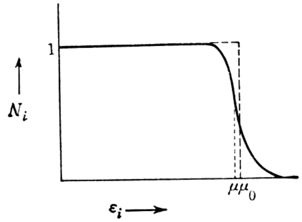
から決まり，N, kT の関数である．温度 0° のときの μ 値を μ_0 とすると，

$$\lim_{T\to 0}\exp\{(\varepsilon_i-\mu_0)/kT\}=\begin{cases}0 & \varepsilon_i<\mu_0\\ \infty & \varepsilon_i>\mu_0\end{cases}$$

より，絶対0度では $\varepsilon_i<\mu_0$ の状態には g_i 個ずつ粒子がつまり $\varepsilon_i>\mu_0$ の状態には1個も電子が存在しない．この μ_0 の値は **Fermi エネルギー** といわれ，ちょうど下から



5-6 図　Boltzmann 分布



5-7 図　Fermi 分布
—— 温度 T における分布
…… 0° における分布

数えて N 番目のエネルギーにあたる（$g_i\neq 1$ のときはその準位を g_i 回くり返して数える）．これに対し温度 T のときは，

$$N_i\approx\begin{cases}g_i & \varepsilon_i-\mu\ll kT\\ 0 & \varepsilon_i-\mu\gg kT\end{cases}$$

となり，その分布は 5-7 図のようになる．$\varepsilon_i=\mu$ の近傍で分布関数は急激に変わり $\varepsilon_i-\mu>kT$ では N_i はほとんど 0, $\mu-\varepsilon_i>kT$ では N_i はほとんど g_i に等しい．特に温度 0° のときには点線のようになる．μ の値は N を一定にして T を変えると条件(5.17)よりわかるように T が大きくなると共に μ の値はだんだん小さくなり，T が十分高くなると $\mu<\varepsilon_1$ になる．5-7 図は T のあまり大きくないときの分布で，T の大きく $\mu<\varepsilon_1$ のときの分布は Boltzmann 分布 (5.14) に近い形になる．

基底状態の原子・原子核の状態は明らかに温度 0° に系があることを示している．原子や原子核が外界と孤立しているときは外からのエネルギーの供給がなく，平衡状態にある系は外にもエネルギーを放出しない状態すなわち基底状態である．原子や原子核をある 0° 以外の温度の平衡状態に保つには外からのエネルギーの供給も行なわれなければならないが，たとえば一つの準位から次の準位に移すに必要なエネルギーは原子の場合少なくとも数 eV の程度，原子核の場合は軽い核で 1 MeV の程度で温度に換算すると，それぞれ

10^4, 10^{10} 度の程度の高温となり通常は原子や原子核（特に原子核）が温度一定の平衡状態にあるような系を論ずることは不必要になる.

c) Bose 統計（Bose-Einstein 統計）

$$N_i = \frac{g_i}{\exp\{(\varepsilon_i - \mu)/kT\} - 1}. \tag{5.18}$$

μ は化学ポテンシャルで，次式から決まる N, T の関数である.

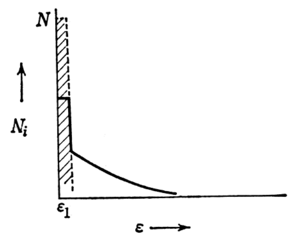
$$N = \sum N_i = \sum \frac{g_i}{\exp\{(\varepsilon_i - \mu)/kT\} - 1}. \tag{5.19}$$

μ は (5.18) の右辺の分母が 0 にならぬためには $\mu < \varepsilon_1$ で，(5.19) より $T \to 0$ で $\mu \to \varepsilon_1$ となる. T が大きくなると μ はだんだん減少する. 温度 0 度の近くで $\mu \approx \varepsilon_1$ であるから $\mu = \varepsilon_1 - \alpha kT$ とおくと（$\alpha > 0$),

$$\exp\{(\varepsilon_1 - \mu)/kT\} - 1 \approx \exp\alpha - 1\,(>0),$$

$$\exp\{(\varepsilon_2 - \mu)/kT\} - 1 \approx \exp\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{kT} \gg 1$$

となり，ほとんどすべての粒子は (5.18) によって基底状態に存在する. これが **Bose（—Einstein）凝集** である. 比較的温度の低いときの粒子の分布のようすは 5-8 図のようになる.（ε_i を連続的にするのは上の式よりわかるように，低温ではよくないので，特に ε_1 の状態のみは別にとり出して図に示してある）. 一方，高温になると Fermi 統計のときと同様に Boltzmann 分布 (5.14) に近くなる.



5-8 図　Bose 統計における粒子分布
////// 温度 0° の分布
—— 低温での分布

再び2個の粒子間の衝突問題に戻り，系が Fermi または Bose 統計にしたがうために起こる角運動量状態についての制限を考えよう.

a) Bose 粒子

たとえば2個の π^+ 中間子間の衝突を考えよう. 相互間に働く力は距離 $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ の関数であるから，これら 2 中間子間の相対的運動を表わす波動関数 ψ は極座標を用いて次のように書ける (4.23 参照).

$$\psi_{l,m}(\boldsymbol{r}) = f_l(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2. \tag{5.20}$$

l, m はそれぞれ軌道角運動量の大きさおよびその z 成分の値である.

2個の π^+ 中間子の交換 $\boldsymbol{r}_1 \rightleftarrows \boldsymbol{r}_2$, すなわち $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ は，極座標では $r \to r$, $\theta \to \pi - \theta$,

$\varphi \to \varphi + \pi$ の変換に相等しい．したがって，$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^l Y_l^m(\pi - \theta, \varphi + \pi)$ より，

$$\psi_{l,m}(-\boldsymbol{r}) = (-1)^l \psi_{l,m}(\boldsymbol{r}). \tag{5.21}$$

$\psi_{l,m}(\boldsymbol{r})$ が Bose 統計をみたすためには l は偶数 $l = 0, 2, 4, \cdots$ でなければならない．

b）Fermi 粒子

2個の同種のスピン 1/2 粒子間の相対運動の波動関数は，もし軌道角運動量の大きさおよびその z 成分の値がそれぞれ l, m ならば，

$$\psi_{l,m}(\xi_1, \xi_2, \boldsymbol{r}) = U(\xi_1, \xi_2) f_l(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \tag{5.22}$$

と書ける．$U(\xi_1, \xi_2)$ は2個の Fermi 粒子のスピン状態を示す波動関数で，合成スピン S, S_z のそれぞれの値に対し 5-1 表で与えられる．粒子 1, 2 の交換 $\xi_1 \rightleftarrows \xi_2$, $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}$, $\theta \to \pi - \theta$, $\varphi \to \varphi + \pi$ に対し，

$$\psi_{l,m}(\xi_2, \xi_1, -\boldsymbol{r}) = \pm(-1)^l \psi_{l,m}(\xi_1, \xi_2, \boldsymbol{r}). \tag{5.23}$$

＋はスピン1状態，－はスピン0状態の場合である．ψ がこの変換に対し反対称のためには，スピン1状態では l は奇数，スピン0状態では l は偶数でなければならない．

以上 Bose, Fermi 粒子系のとり得る角運動量に対する制限は，多数の同一素粒子からなる系についてももちろん成立し，系の中のどの2粒子間の軌道角運動量も上の条件をみたす．これより系の全角運動量のとりうる値にもある制限が課せられることになる．

〔問題 5.1〕 2個の α 粒子の衝突するとき，その相対運動の軌道角運動量は偶数の整数値 $l = 0, 2, 4, \cdots$ のいずれかをとることを示せ．

〔略解〕 α 粒子は2個の中性子と2個の陽子の集まったスピン0の原子核である．それぞれのスピン座標と空間座標を $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \xi_{1p}, \xi_{2p}$ および $\boldsymbol{r}_{1n}, \boldsymbol{r}_{2n}, \boldsymbol{r}_{1p}, \boldsymbol{r}_{2p}$．一個の α 粒子の波動関数を $\psi_\alpha(\xi_{1n}, \boldsymbol{r}_{1n}; \xi_{2n}, \boldsymbol{r}_{2n}; \xi_{1p}, \boldsymbol{r}_{1p}; \xi_{2p}, \boldsymbol{r}_{2p})$ と書こう．α 粒子はスピン0であるから，重心の位置 $\boldsymbol{R} = \dfrac{1}{4}(\boldsymbol{r}_{1n} + \boldsymbol{r}_{2n} + \boldsymbol{r}_{1p} + \boldsymbol{r}_{2p})$ を与えると，重心が $\boldsymbol{R}$ にある α 粒子の状態は ψ_α ただ一つである．2個の α 粒子の衝突を表わす波動関数 Ψ は，

$$\Psi = \psi_\alpha(\xi_{1n}, \boldsymbol{r}_{1n}; \xi_{2n}, \boldsymbol{r}_{2n}; \xi_{1p}, \boldsymbol{r}_{1p}; \xi_{2p}, \boldsymbol{r}_{2p}) \psi_\alpha(\xi_{1n}', \boldsymbol{r}_{1n}'; \xi_{2n}', \boldsymbol{r}_{2n}'; \xi_{1p}', \boldsymbol{r}_{1p}'; \xi_{2p}', \boldsymbol{r}_{2p}')$$
$$\times \psi_{l,m}\left(\frac{\boldsymbol{r}_{1n} + \boldsymbol{r}_{2n} + \boldsymbol{r}_{1p} + \boldsymbol{r}_{2p}}{4} - \frac{\boldsymbol{r}_{1n}' + \boldsymbol{r}_{2n}' + \boldsymbol{r}_{1p}' + \boldsymbol{r}_{2p}'}{4}\right)$$

と書ける．"ダッシュ" のついた量は第2の α 粒子中の中性子，陽子の座標である．$\psi_{l,m}$ は α 粒子間の相対運動で軌道角運動量が l, m の状態である．中性子 $1n$ と $1n'$, $2n$ と $2n'$，陽子 $1p$ と $1p'$, $2p$ と $2p'$ のそれぞれの交換に対し Fermi 統計より $\Psi \to -\Psi$，したがってこの四つの同時の交換に対し $\Psi \to (-1)^4 \Psi = \Psi$ で Ψ は不変でなければならない．これより l が偶数のことを導け．

第6章　Bose 粒子

§6.1　電磁場の Maxwell 方程式

電波・可視光線・X線・γ 線等いろいろな電磁波は**光子**(photon)が空間中を伝播することに対応し，いろいろな電磁波の区別は光子の運動量の大きさによる違いによる．光子は質量0の素粒子で，その運動量とエネルギーの関係は((4.8)で $m=0$ とおいた式)，

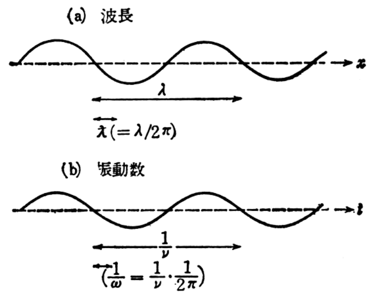
$$E=cp \tag{6.1}$$

である．さて，運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー E を持つ光子に対する電磁波は $\boldsymbol{p}$, E を量子力学的な物理量(2.8)と考えると次の平面波に比例する．

$$\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}-Et).$$

6-1 表　光子のエネルギー，波長，振動数

エネルギー	波　長　$\lambdabar$	振　動　数　ω
10^{-3} eV	1.97×10^{-2}cm	1.52×10^{12}sec^{-1}
1 eV	1.97×10^{-5}cm	1.52×10^{15}sec^{-1}
10^{3} eV	1.97×10^{-8}cm	1.52×10^{18}sec^{-1}
10^{6} eV	1.97×10^{-11}cm	1.52×10^{21}sec^{-1}



6-1 図　平面波の波長と振動数
(a) 波長　(b) 振動数

この平面波の実数部分 $\cos(\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}-Et)/\hbar$ を図に描いてみよう．$\boldsymbol{p}$ の方向を x 軸にとり，ある時刻 t で場所 x を変えたときの波のようすおよびある場所 x で時間 t を変えたときの波のようすを示したのが 6-1 図(a, b)である．波長 λ，振動数 ν と p, E の関係は，

$$\lambda=\frac{h}{p},\quad \nu=\frac{E}{h} \tag{6.2}$$

で空間的に λ，または時間的に $1/\nu$ 離れた2点の位相は 2π だけ異なっている．素粒子物理学では λ, ν の代りに次の量 $\lambdabar$, ω をしばしば波長，振動数とよぶので，本書でも特にことわらない限り $\lambdabar$, ω を使うことにする．

$$\lambdabar\equiv\frac{\lambda}{2\pi}=\frac{\hbar}{p},\qquad \omega\equiv2\pi\nu=\frac{E}{\hbar}. \tag{6.3}$$

また $\boldsymbol{p}$ の代りに，光子に対しては次の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を使う．

$$k=\frac{\boldsymbol{p}}{\hbar}. \tag{6.4}$$

k は単位の長さの中に含まれる波長 λ の数であり，k と ω の関係は，

$$ck=\omega \tag{6.5}$$

となる．いろいろのエネルギーの光子に対し，その波長・振動数の値を 6-1 表に記してある．

電磁波の伝播のようすは Maxwell の方程式できわめてよく記述されることが実験的に確められている．荷電密度 ρ，電流密度 $\boldsymbol{J}$ の媒質中における電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{H}$ を与える Maxwell の式は Gauss 有理化単位系で書くと次のようである．

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\boldsymbol{J},\\ &\varepsilon\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=\rho,\qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0.\end{aligned} \tag{6.6}$$

ε，μ は真空の誘電率・透磁率をそれぞれ1としたときの媒質の誘電率・透磁率である．

物質の存在しない真空中での Maxwell の方程式は（$\rho=\boldsymbol{J}=0$，$\varepsilon=\mu=1$），

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\\ &\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=0,\qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0\end{aligned} \tag{6.7}$$

となる．

電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{H}$ を電磁場のポテンシャル $A_\mu(\boldsymbol{A}, A_0)$ で表わすと，

$$\boldsymbol{E}=-\,\mathrm{grad}\,A_0-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\qquad \boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}. \tag{6.8}$$

この式を（6.7）に代入すると（6.7）の第 1，4 式は自動的にみたされている．第2式は

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{grad}\,A_0+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\\ &=(\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A})+\frac{1}{c}\,\mathrm{grad}\frac{\partial A_0}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\\ &=-\left(\Delta^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

となり，A_μ が，

$$\Box\,\boldsymbol{A}\equiv\left(\Delta^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=0$$

および

$$\partial_\mu A_\mu\equiv\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t}=0 \tag{6.9}$$

をみたしていればよい．(6.7) の第3式は (6.9) を用いて，

$$0=\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}A_0+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=\Delta A_0+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{A})=\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_0$$

となる．

そこで真空中での電磁場の方程式は，

$$\Box A_\mu=\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_\mu=0\qquad(\mu=1,2,3,0)\tag{6.10}$$

および (6.9) で，この A_μ を使って $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ は (6.8) から得られる．

相対性理論によれば，すべての物理法則はどの Lorentz 座標系で記述しても同一でなければならないので，A_μ に対する方程式 (6.9), (6.10) はこの要求をみたさなければならない．いま，一つの Lorentz 座標系 $(\boldsymbol{r}, t)$ から，これに対し一定速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている他の Lorentz 座標系 $(\boldsymbol{r}', t')$ に移ったとすると，4次元ベクトル A_μ と変換された後の A_μ' の関係は，

$$A_\mu'(x')=\sum_\nu a_{\mu\nu}A_\nu(x)$$

である．§ 4.1 より $a_{\mu\nu}$ は変換速度 v のみの関数で x によらない．たとえば，z 方向への速度 v の Lorentz 変換では，

$$a_{11}=a_{22}=1,\quad a_{33}=a_{00}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad a_{03}=a_{30}=\frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \text{他の } a_{\mu\nu}=0$$

である．$\Box$ は ∂_μ 自身の内積でスカラー量であり，$a_{\mu\nu}$ は $x(x')$ によらぬことより

$$\Box' A_\mu'(x')=\Box\sum_\nu a_{\mu\nu}A_\nu(x)=\sum_\nu a_{\mu\nu}\,\Box\,A_\nu(x)=0.$$

したがって，新しい座標系でも (6.10) が成立する．また $\partial_\mu A_\mu$ は二つの4次元ベクトルの内積であるから (6.9) が Lorentz 変換に対し不変なことも明らかである．

[光子のスピン]

光子の状態が量子力学的にポテンシャル A_μ で表わされるものと考え，粒子に対して波動関数 ψ を考えるように A_μ を光子を記述する波動関数のように考えてみよう．光子は質量がないので，そのエネルギーと運動量の関係 $E^2=c^2p^2$ を E, $\boldsymbol{p}$ を A_μ に対する演算子と考えて A_μ に対する式に書き直すと (6.10) が得られる．したがって，(6.10) は光子が質量0のことを表わしている．電磁波はその振動数（または波長）を決めてもなお偏りという性質を持ち，たとえば電気石を通すことにより2種の異なる偏光状態が得られる (18 ページ参照)．このような余分の自由度は光子が運動量を決めてもなお別の自由度を持っていることを示している．素粒子は一般に内部自由度を持ち (3-1 表)，これらはスピンとして記述されるので，光の偏りの自由度は光子がスピンを持つためと考えられる．

さて，光子は4成分を持つポテンシャル A_μ で記述され，光子の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$, 振動

数 ω の平面波の状態は次のようになる．

$$A_\mu = a_\mu \exp i(\boldsymbol{kr} - \omega t). \tag{6.11}$$

したがって，$\boldsymbol{k}$ を決めても光子はなお4個の自由度を持つようにみえる．そこで a_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) を光子のスピン座標を示すものと考えて座標系を回転したときに a_μ がどのように変わるかを調べよう．A_μ が4次元ベクトルであるから，空間回転をした場合には，3次元ベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})$ の各成分は $\boldsymbol{r}$ の各成分と同様に相互に移り変わる．また $A_0(a_0)$ と $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})$ との間の変換は起こってはならない．

光子のスピン演算子 $\boldsymbol{S}$ は，したがって，回転の演算子としての交換関係 (3.6) をみたし，さらに空間座標をある軸 $\boldsymbol{n}$ のまわりに角度 θ ラジアン回転したとき，a_μ は

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \exp\left\{ i\frac{\theta}{\hbar}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S})\right\}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

のように変換する．空間回転では a_μ の空間成分の間でのみ変換が起こるから，a_μ の μ は $\mu = 1, 2, 3$ の値をとる．$\boldsymbol{n}$ は軸方向の単位ベクトルで $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S})$ は $\boldsymbol{S}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向のスピン成分になる．$\boldsymbol{S}$ の各成分は $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}'$ に移す3行3列の行列であるが，交換関係 (3.6) をみたすものとして，たとえば，

$$S_1 = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \hbar\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

をとろう．これが角運動量の交換関係をみたすことは直接確かめられる．またスピンの大きさは，

$$\boldsymbol{S}^2 = S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2 = 2\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

となり，(3.19) と比較するとスピンの大きさは 1 である．

次に Lorentz 変換を考える．$A_\mu(a_\mu)$ は 4 次元ベクトルとして変換し，空間成分 $\boldsymbol{A}$ と時間成分 A_0 は相互に入りまじる．ここでは Lorentz 変換を空間回転 (6.12) と同様な形に表わしてみよう．そのためには回転角 θ，スピン $\boldsymbol{S}$ に対応する量を Lorentz 変換の場合に探さねばならない．まず回転角に相当する量を求めよう．

ある方向へ等速度 v で運動している新しい Lorentz 座標系への変換を，同じ方向へ微少速度 Δv で動いている座標系への Lorentz 変換の多数回のくり返しとして考える．空間回転の場合は，ある軸のまわりの回転角 θ の回転を微少角 θ/n の回転を n 回 ($n\to\infty$) くり返して得られた (§ 3.1 参照)．Lorentz 変換の場合は，同方向への速度 v_1, v_2 の変

換を続けて行なうと，最後に得られた系の初めの系に対する速度 v は相対論から，

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2} \tag{6.15}$$

となり，単に v_1 と v_2 を加え合わさったものにはならない．したがって，微少速度 Δv $(=v/n)$ の変換を n 回 $(n\to\infty)$ くり返しても速度 v の変換は得られない．そこで次の量 ω を定義する（この ω は (6.3) の ω とは違うもの）．

$$\omega=\log\frac{1-v/c}{1+v/c}. \tag{6.16}$$

(6.15) で与えられる v に対し，

$$\frac{1-v/c}{1+v/c}=\frac{c-\dfrac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}}{c+\dfrac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}}=\frac{1-v_1/c}{1+v_1/c}\cdot\frac{1-v_2/c}{1+v_2/c}.$$

したがって，両辺の対数をとると $\omega=\omega_1+\omega_2$ となる．微少速度 Δv での Lorentz 変換に対しては ω も微少量 $\Delta\omega$ であり，また ω は θ と同様に加算的な性質を持つから，有限な ω での Lorentz 変換は無限小の $\Delta\omega$ $(=\omega/n)$ での無限回 $n(\to\infty)$ の変換のくり返しで得られる．$\Delta\omega$ と Δv との関係は (6.16) より，

$$\Delta\omega=-2\frac{\Delta v}{c} \tag{6.17}$$

である．

次にスピン角運動量に対応する Lorentz 変換の演算子 $\boldsymbol{N}$ を求めよう．座標 x_μ のある関数 $\psi(x_\mu)\equiv\psi(x,y,z,t)$ に対し，微少速度の Lorentz 変換を行なうと，たとえば z 軸方向への速度 Δv での Lorentz 変換に対し，

$$\psi(x_\mu)\to\psi'(x_\mu),\quad \psi'(x'_\mu)=\psi(x_\mu)$$

$$\begin{aligned}\psi'(x_\mu)&=\psi\left(x,\ y,\ z+\Delta vt,\ t+\frac{\Delta v}{c^2}z\right)\approx\psi(x,y,z,t)+\frac{\Delta v}{c}\left[ct\frac{\partial\psi}{\partial z}+z\frac{\partial\psi}{\partial(ct)}\right]\\&=\left(1-\frac{i}{\hbar}\frac{\Delta v}{c}N_z\right)\psi(x_\mu)=\left(1+\frac{i}{\hbar}\frac{\Delta\omega}{2}N_z\right)\psi(x_\mu).\end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{N}$ は次式で定義した量である．

$$\boldsymbol{N}=i\hbar\left[ct\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{r}\frac{\partial}{\partial(ct)}\right]. \tag{6.18}$$

さて ω は次々の Lorentz 変換に対し加算的であるから，z 方向に $\Delta\omega$ の Lorentz 変換を n 回つづけて行なうと（ただし $n\to\infty$），

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{\hbar}\frac{\Delta\omega}{2}N_z\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{2\hbar}\frac{\omega}{n}N_z\right)^n=\exp\left(\frac{i\omega}{2\hbar}N_z\right).$$

右辺は有限速度 v での Lorentz 変換を起こす演算子である．x, y 方向についても同様である．したがって，(6.12) とくらべると $\frac{\omega}{2}$ が θ に相当し，スピン角運動量 $\boldsymbol{S}$ の代りに $\boldsymbol{N}$ となる．

$\boldsymbol{N}$ と軌道角運動量 $\boldsymbol{M}$ の間の交換関係は (3.1)，(6.18) を用いて直接確めることができる．たとえば，

$$[N_x,\ M_y]=\left[i\hbar\left(ct\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial(ct)}\right),\ -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\hbar^2\left\{\left[x\frac{\partial}{\partial(ct)},\ z\frac{\partial}{\partial x}\right]-\left[ct\frac{\partial}{\partial x},\ x\frac{\partial}{\partial z}\right]\right\}$$

$$=-\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial(ct)}+ct\frac{\partial}{\partial z}\right)=i\hbar N_z.$$

このようにして得られる式をまとめると，

$$\begin{aligned}&[N_x,\ M_x]=[N_y,\ M_y]=[N_z,\ M_z]=0\\&[N_x,\ M_y]=-[N_y,\ M_x]=i\hbar N_z,\ \cdots\\&[N_x,\ N_y]=-i\hbar M_z,\ \cdots.\end{aligned}\tag{6.19}$$

さて，Lorentz 変換に対し x_μ の関数 ψ は，

$$\psi\to\psi'=\exp\left\{i\frac{\omega}{2\hbar}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N})\right\}\psi\tag{6.20}$$

のように変換する（$\boldsymbol{n}$ は変換速度の方向の単位ベクトル）ことを示したが，次に光子のスピン空間の成分 A_μ の変換を考えよう．この空間での角運動量は $\boldsymbol{S}$ (6.13) で表わされたが，$\boldsymbol{N}$ がどのように表わされるかを求める．A_μ の変換，

$$A_\mu\to A_\mu'=\exp\left\{i\frac{\omega}{2\hbar}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N})\right\}A_\nu\tag{6.21}$$

は A_μ が4次元ベクトルであることを考えると，$\boldsymbol{N}$ は A_μ の空間成分 $A_i (i=1,2,3)$ のみに働く演算子でなく，A_0 と A_i との交換を行なうようなものでなければならない．いま，z 軸方向への微少速度 Δv での Lorentz 変換を考えると，a_μ が 4 次元ベクトルのことより，

$$a_0'\approx a_0-\frac{\Delta v}{c}a_3,\quad a_3'\approx a_3-\frac{\Delta v}{c}a_0,\quad a_1'=a_1,\quad a_2'=a_2.$$

これと $\omega=\Delta\omega$ のときの (6.21)，

$$a_0'\approx\left(1+i\frac{\Delta\omega}{2\hbar}N_z\right)a_0,\quad a_3'\approx\left(1+i\frac{\Delta\omega}{2\hbar}N_z\right)a_3,\ \cdots$$

をくらべると，N_z が4成分の a を a' に移す4行4列の行列として得られる．

$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_0\end{pmatrix}\to a'=\begin{pmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\\a_0'\end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

このようにして，N_x，N_y，N_z を求めると，

$$N_x=-i\hbar\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad N_y=-i\hbar\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad N_z=-i\hbar\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}. \tag{6.23}$$

a_μ は 4 成分を持つので，光子のスピン $\boldsymbol{S}$ を a_μ の空間での物理量と考えると，$\boldsymbol{S}$ も 4 行 4 列の行列と考えなければいけない．スピン空間での回転に対しては a_μ の空間成分 a_i のみが変換され，それに対する表示は (6.13) で与えられる．また時間成分 a_0 と空間成分 a_i は回転により混ざらないので $\boldsymbol{S}$ の各成分の 4 行または 4 列目の行列要素は 0 である．したがって，

$$S_x=\hbar\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad S_y=\hbar\begin{pmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$S_z=\hbar\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{6.24}$$

$\boldsymbol{S}$ (6.24)，$\boldsymbol{N}$ (6.23) はそれぞれ電磁波のポテンシャル A_μ に対する空間回転，Lorentz 変換に対する演算子であり，それらは (6.19) の関係をみたすことが確められる ($\boldsymbol{M}=\boldsymbol{S}$ とおきかえる)．((6.23) の $\boldsymbol{N}$ の代りに $-\boldsymbol{N}$ をとっても交換関係 (6.19) はみたされている．この新しい $(-\boldsymbol{N}, \boldsymbol{S})$ を $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{S})$ の代りに Lorentz 変換および空間回転に対する演算子として用いることは，空間反転した世界での Lorentz 変換と空間回転を論じていることになる)．

(6.23)，(6.24) の他にも (6.19) をみたす行列が存在することは容易にわかる．ここでは A_μ が 4 次元ベクトルということを使って $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$ の表示を求めたが，逆に交換関係 (6.19) から出発して，これをみたす行列 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$ の一般の形を求めることもできる．ここで求めた 4 行 4 列の表示はその一つである．

さて光子のスピンは 1 ((6.14) をみよ) であるにもかかわらず，与えられた運動量の光子は 4 個の内部自由度を持つことを要求される．スピン S の粒子は一般に $(2S+1)$

個の内部自由度を持ち，スピン 1 の場合には3個の自由度しか許されないはずであるから，光子の内部自由度が光子のスピンとして記述されるためには4個の成分は独立でなくそれらの間にある一つの関係があって，実際に独立な自由度は1個減らなければならぬ．またこの関係はどのような Lorentz 座標系でみても不変な関係でなければ，光子の物理的性質が Lorentz 変換するごとに変ってきて，相対性理論の要求に合わない．A_μ について，1次でかつ Lorentz 変換に対し不変な関係式としては，二つの4次元ベクトル A_μ と ∂_μ の積から作られる (6.9) がただ一つの考えらる式である．(6.9) は **Lorentz 条件**といわれ，光子の内部自由度を一つ減らして光子がスピン1としての振る舞うことを保証する条件といってよい．

この条件を，一定の運動量の光子を表わす平面波のポテンシャル (6.11) につき調べてみると，

$$a_\mu k_\mu = \boldsymbol{ak} - a_0\frac{\omega}{c} = 0. \tag{6.25}$$

ただし，4次元ベクトル k_μ は $(\boldsymbol{k}, \omega/c)$ である．したがって，時間成分 a_0 と光子の運動方向の成分 $a_{\parallel} = \dfrac{\boldsymbol{ak}}{k}$ とは独立ではなく，(6.5)を用いると，

$$a_0 = a_{\parallel} \tag{6.26}$$

となる．

［ゲージ変換と光子の質量］

一般にスピン1の粒子は光子に限らず4次元ベクトルであるポテンシャルで記述され，さらに，Lorentz 条件によりスピン自由度が3個であることが保証される．ところで光子は質量のないためにさらに1個の自由度を失ない，ただ2個の異なるスピン状態にしか存在し得ない．この事情につき調べてみよう．いま (6.9), (6.10) をみたす A_μ があるとき A_μ に次の変換を行なう．

$$A_\mu \to A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x). \tag{6.27}$$

もし，$\Lambda(x)$ が，

$$\Box \Lambda(x) = 0 \tag{6.28}$$

を満足するなら，A_μ' は A_μ と同じく (6.9), (6.10) の両式をみたす．すなわち，

$$\partial_\mu A_\mu' = \partial_\mu A_\mu + \Box \Lambda = 0, \quad \Box A_\mu' = \Box A_\mu + \partial_\mu \Box \Lambda = 0.$$

したがって，A_μ が一つの解ならば A_μ' も解になっている．この変換 (6.27), (6.28) を A_μ に対する**ゲージ変換**とよぶ．この変換の物理的意味をよりはっきりさせるために，平面波のポテンシャル (6.11) について考えよう．

$$\Lambda(x) = ib \exp i(\boldsymbol{kr} - \omega t)$$

ととると，(6.5) により $\Lambda(x)$ は (6.28) をみたしている．したがってゲージ変換 (6.27) は,

$$a_\mu \to a_\mu' = a_\mu - bk_\mu$$

に相当する．そこで適当なゲージ Λ をえらぶと，すなわち $b = a_0/k_0$ ととると，$a_0' = 0$ にとることができる．もし異なる Λ を持つ A_μ が物理的に同等であるならば，すなわち Lorentz 変換の不変性の場合と同様にゲージ変換に対し物理法則が不変ならば，任意のゲージをとって光子のスピン状態を論ずることができる．実際に自由な電磁場の Maxwell の方程式はゲージ不変であり，また荷電粒子と相互作用している場合にも，ゲージ変換に対する不変性が示される（§ 8.2 参照)．そこで $a_0 = 0$ であるようなゲージで論ずると (6.26) より同時に $a_{\parallel} = 0$, 運動量に垂直な二つの方向の成分のみが 0 でない．$a_0 = 0$ であるから，光子のスピンは 3 行 3 列の行列 (6.13) で与えられる．いま $\boldsymbol{k}$ の方向を z 方向にとると $a_3 = 0$, 一方，S_3 の固有状態は 6-2 表のようになる．すなわち，光子の運動量方向のスピン成分がそれぞれ ± 1 の固有状態のみが存在し，0 の固有状態 a_3 は存在しない ($a_3 = 0$)．これらを**右旋光** ($h = 1$) および**左旋光** ($h = -1$) の光子という．

6-2 表　光子の偏り

固有状態	スピン S_3	ヘリシティ
$\dfrac{a_1 + ia_2}{\sqrt{2}}$	$+1 \cdot \hbar$	$+1$
$\dfrac{a_1 - ia_2}{\sqrt{2}}$	$-1 \cdot \hbar$	-1
a_3	0	0

質量 m が 0 でない場合のスピン 1 粒子を表わすポテンシャル A_μ は,

$$\Box A_\mu = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A_\mu, \quad \partial_\mu A_\mu = 0$$

をみたす．

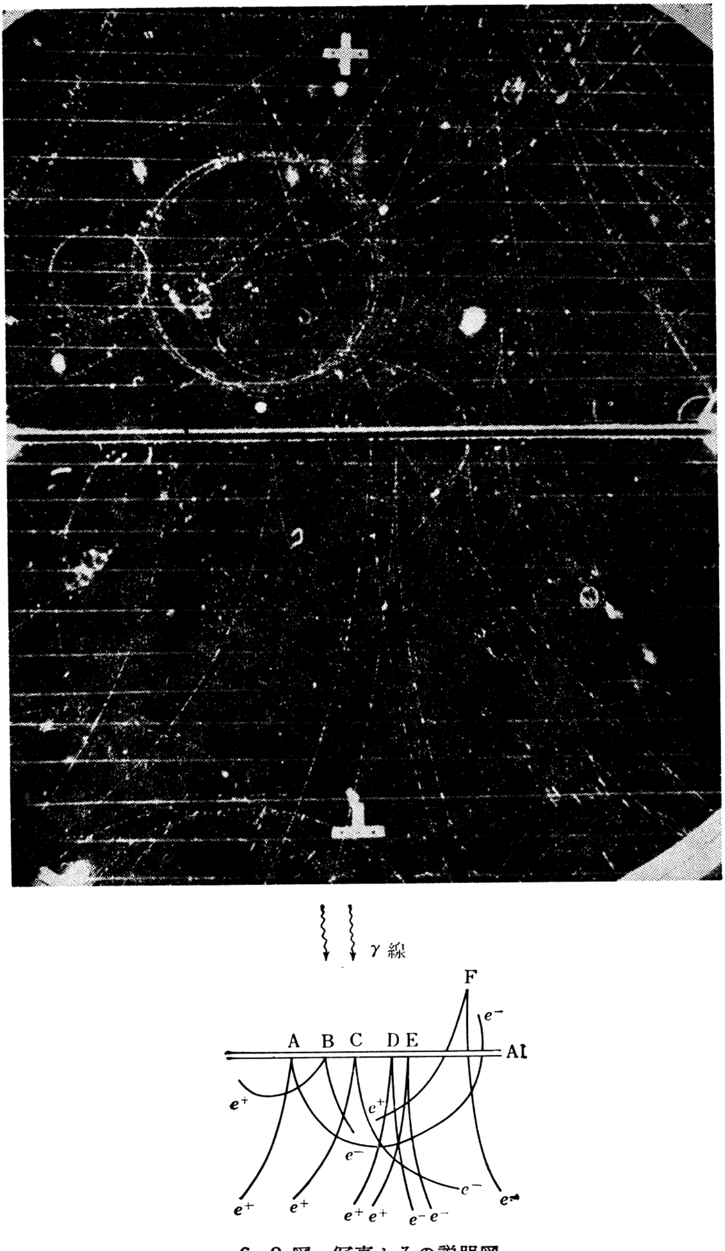
これに対しゲージ変換 (6.27) を行なうと変換後の A_μ' が A_μ と同じ式をみたすためには第一式より $\Box \Lambda = \left(\dfrac{mc}{\hbar}\right)^2 \Lambda$, 第 2 式より $\Box\Lambda = 0$ となり質量 $m \neq 0$ の場合には二つの矛盾する式になる．したがって質量のある粒子に対してはゲージ変換は存在しない．

〔問題 6.1〕 光の平面波の進行方向とその電場の向きおよび磁場の向きの 3 方向は互に直交することを示せ．また，この 3 方向は右手座標系を作るか左手座標系を作るかを論ぜよ．

〔問題 6.2〕 時間により変らない静的な荷電分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ を持つ系の電磁場のポテンシャル $A_\mu(x)$ を求めよ．

〔略解〕 Maxwell の式 (6.6) より出発して，まず（ただし $\boldsymbol{J} = 0$),

$$\Box A_0(x) = -\rho(x), \quad \Box \boldsymbol{A}(x) = 0$$



6-2 図 写真とその説明図

を導き，次に ρ が時間 t によらないことより，A_0 の時間によらない解を求めると，

$$\Delta A_0(r) = -\rho(\boldsymbol{r})$$

を解いて，次のクーロンポテンシャル，

$$A_0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d\boldsymbol{r}' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \quad \boldsymbol{A}(x) = 0$$

を得る．

§6.2 場の量子化

6-2 図はエネルギーの高い γ 線を霧箱上方より多数入射させたときに撮った写真である．霧箱の中には，横に1枚の Al（アルミニウム）の板が入っており，Al 板上の各点 A, B, C, D 等より2本の新しい荷電粒子が下方に走り出している．霧箱には紙面に垂直な方向に磁場がかかっており，荷電粒子の軌道は曲げられる．この曲りの向きとその曲率，霧の濃度等の測定から，各点から出ている2本の線はそれぞれ1本ずつ電子および陽電子の飛跡であることが結論される．写真の下の図はその説明図である．γ 線は霧箱には写らないが，エネルギーの保存則等から考えて A, B, C, D, … 点における現象は，これら各点で上方より入射した γ 線が電子 e^- と陽電子 e^+ 対に転化したことを示している（$\gamma \to e^- + e^+$）．またこの転換は Al 板上の点だけではなく，霧箱中の一点 F でも起こっている．これら A, B, C, D, E, F, 点は空間の特別な点ではなく，たまたまそのような点で現象 $\gamma \to e^- + e^+$ が起こったと考えると，空間の各点に光子を吸収し，また電子・陽電子を放出する源があると考えなければならない．また陽電子が空間中を走っている間に電子に衝突すると，両方が消滅して γ 線になる現象もしられている（$e^- + e^+ \to \gamma$）．

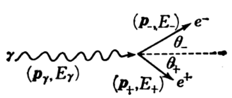
もちろん，このような現象が起こる際には運動量およびエネルギーの保存則が成立していなければならないので，$\gamma \rightleftarrows e^- + e^+$ は真空中では起こらず物質の存在する近傍でのみ起こり，その物質に一部の運動量・エネルギーが与えられなければならない．

$\gamma \to e^- + e^+$ が真空中で起こったとし，6-3 図のように各粒子の運動量・エネルギーを与えると保存則は，

$$E_\gamma = E_- + E_+.$$

$$p_\gamma = p_- \cos\theta_- + p_+ \cos\theta_+.$$

$$0 = p_- \sin\theta_- - p_+ \sin\theta_+.$$



6-3 図　$\gamma \to e^- + e^+$

また各粒子のエネルギー・運動量の関係は m を電子の質量として，

$$E_\gamma = cp_\gamma, \quad E_- = \sqrt{c^2 p_-^2 + m^2 c^4}, \quad E_+ = \sqrt{c^2 p_+^2 + m^2 c^4}$$

である．θ_+, θ_- はそれぞれ e^+, e^- の運動方向と γ 線の進行方向の間の角度．運動量保存則より，

$p_\gamma^2=(p_-\cos\theta_-+p_+\cos\theta_+)^2+(p_-\sin\theta_--p_+\sin\theta_+)^2=p_-^2+p_+^2+2p_+p_-\cos(\theta_++\theta_-)$.

またエネルギー保存則より，

$$E_\gamma^2=E_-^2+E_+^2+2E_+E_-.\quad E_\gamma^2=c^2p_\gamma^2$$

を用いると，

$$E_-^2+E_+^2+2E_+E_-=c^2(p_-^2+p_+^2+2p_+p_-\cos(\theta_++\theta_-))$$

でなければならない．$m\neq0$ であるから $E_+^2>c^2p_+^2$, $E_-^2>c^2p_-^2$, $E_+E_->c^2p_+p_-\geqq c^2p_+p_-\cos(\theta_++\theta_-)$ で左辺は右辺より大きく両辺は等しくなり得ない．したがって，エネルギー・運動量の保存則は成立し得ない．

たとえば，原子核の近傍を γ 線が通過すると $\gamma\to e^-+e^+$ の転換が起こり，その際，原子核は γ 線の一部の運動量・エネルギーをもらう．転換は核の多いすなわち物質密度の大きい Al の板内では起こりやすく，密度の小さい霧箱のガス中では起こりにくい．いずれにしても，その近くに物質が存在していれば，ある頻度で空間の各点で光の吸収・放出および電子・陽電子の吸収・放出が起こりうる．このような空間の各点において，いろいろな素粒子の吸収・放出が行なわれ，素粒子の数の増減が起こることを説明するためには，一見して素粒子の存在しない場所にも**素粒子の場**とでもいうべきものが存在し，この場所に必要なエネルギー・運動量が与えられ，または取り去られるときに素粒子の放出・吸収が行なわれると考える．光子に対する場を $A_\mu(x)$，電子に対する場を $\psi(x)$ と書くことにしよう．

第2章で述べた量子力学では，ある質点またはある物体の状態を表わす波動関数を考えたがその質点または物体は常に存在し，その数が変ることは考えなかった．これに反し6-2図でわかるように素粒子の場合には粒子数の増減が起こる．そのためには，波動関数 $A_\mu(x)$, $\psi(x)$, 等の代りに量子化した場 $A_\mu(x)$, $\psi(x)$ を考えるわけであるが，この事情を §2.4 の例題1につき調べてみよう．質量mの一つの質点が原点 $(x=0)$ からの距離の平方に比例するポテンシャルの中で運動している1次元の調和振動子の Hamiltonian および交換関係は，

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}x^2,\qquad [p,x]=-i\hbar \tag{6.29}$$

である．p は運動量，ω は振動数，m は質量である．

ポテンシャルエネルギー $V\left(=\frac{m\omega^2}{2}x^2\right)$ は 6-4 (a) 図のようなもので，古典物理学ではこのポテンシャルの中を質点は往復運動する．質点の全エネルギーEは初めの条件で決まり，質点がポテンシャルの山の一番高い所に到達したとき運動エネルギーは0で，その場所のVの値が系のエネルギーに等しい．次に量子力学では (2.29) で定義された a, $a^\dagger$ を用いると，

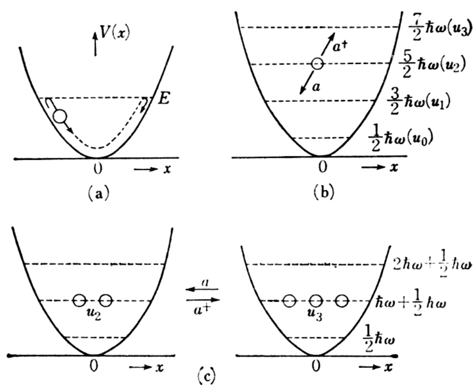
$$x=\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\frac{a+a^{\dagger}}{2},\qquad p=\sqrt{2m\omega\hbar}\,\frac{a-a^{\dagger}}{2i},\tag{6.30}$$

$$H=\hbar\omega\left(N+\frac{1}{2}\right),\qquad N\equiv a^{\dagger}a,\tag{6.31}$$

$$[a,\,a^{\dagger}]=1\tag{6.32}$$

となる．H の固有値は N の固有値が 0, 1, 2, $\cdots$ であることに対応して $\frac{1}{2}\hbar\omega$, $\frac{3}{2}\hbar\omega, \cdots$ の不連続的な値をとる．それぞれの固有状態 $u_0, u_1, u_2, \cdots$ は質点の運動の 0, 1, 2, $\cdots$ 番目の励起状態であり，最低のエネルギー状態 u_0 はエネルギー $\frac{1}{2}\hbar\omega$ を持つ．量子力学では質点が V の最小値をとる点 $x=0$ に静止していることができず，不確定性関係のために $x=0$ の周りに小振動をして，そのため $\frac{1}{2}\hbar\omega$ のエネルギーを生ずる．この振動性を**零点振動**，$\frac{1}{2}\hbar\omega$ を**零点エネルギー**という．次々の励起状態はエネルギー $\hbar\omega$ の間隔で並んでおり，$a^{\dagger}$, a はそれぞれ任意の状態 u_n をエネルギーが $\hbar\omega$ 異なる次の状態 u_{n+1}，または u_{n-1} に移す．

§ 2.4 の例題では u_n は質点の n 番目の励起状態で，常にその 1 個の質点のみを問題にしたが，ここで同じ問題を次のように見方を変えてみる．すなわち u_n を 1 個の質点が n 番目の励起状態にあると考える代りに，n 個の質点が 1 番目の励起状態 u_1 にあり，それぞれが $\hbar\omega$ 全体として $n\hbar\omega$ の励起エネルギーを持っていると考える．また a は u_n を u_{n-1} に移すが，新しい解釈では u_1 にある n 個の質点のうち 1 個を吸収して $n-1$ 個にする．$a^{\dagger}$ の解釈も u_n を u_{n+1} に移すのではなく，u_1 にある質点の個数を 1 個ふやす演算子となる（6-4 図（b），（c）参照）．このように 1 個の粒子の量子力学を粒子の数が変りうるような系の量子力学に直す方法を**再度量子化**または単に**量子化**という．この例題では零点エネルギーのあるため u_n のエネルギーと量子化した後の u_1 に n 個あるときのエネルギーとは，それぞれ $n\hbar\omega+\frac{1}{2}\hbar\omega$, $n\left(1+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ となり異なるが，これから問題にする自由粒



6-4 図 （a）古典物理学における質点の運動 （b）量子力学における調和振動子 （c）量子化された場の調和振動子

子の場の量子化では，零点エネルギーは0でこのような食い違いは起こらない．

［Bose 統計と Fermi 統計］

エネルギー $\hbar\omega$ の粒子が N 個ある系の全エネルギーは，その零点振動を別にすると，一般に，

$$H=\hbar\omega N \tag{6.33}$$

であるが，(6.31)，(6.32) では $N=a^\dagger a$，$[a,\ a^\dagger]=1$ として問題を扱った．その結果 $N,\ a,\ a^\dagger$ は (2.34) のようになり，系は $N=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ の任意の正整数値をとる．したがって同一のエネルギー $\hbar\omega$ の状態に粒子は何個でも存在でき，粒子は Bose 統計にしたがっている．

試みに上の交換関係の代りに，

$$N=a^\dagger a,$$
$$\{a,\ a^\dagger\}\equiv aa^\dagger+a^\dagger a=1, \qquad \{a,\ a\}=\{a^\dagger,\ a^\dagger\}=0 \tag{6.34}$$

とおいて問題を扱ってみよう．(6.34) の第2の式は結局 $a^2=(a^\dagger)^2=0$ を意味する．これらは (6.32) およびそこには書いてないが自明の式 $[a,\ a]=[a^\dagger,\ a^\dagger]=0$ で，［ ］を { } でおきかえて得られたものである．

$N=a^\dagger a$ の固有状態の一つを u，その固有値を ν とすると，

$$Nu=a^\dagger au=\nu u.$$

これにさらに N を掛けると，

$$a^\dagger aa^\dagger au=N\nu u=\nu^2 u.$$

一方，左辺を交換関係 (6.34) を使って変形すると，

$$a^\dagger aa^\dagger au=a^\dagger(1-a^\dagger a)au=a^\dagger au=\nu u.$$

したがって，$\nu^2=\nu$ であり $\nu=1$ または $\nu=0$ である．すなわち，N の固有値は 0 または1で，系のエネルギーはそれぞれに応じて0または $\hbar\omega$ であり，$\hbar\omega$ の振動状態に粒子はたかだか1個しか存在しえない．これは Pauli の禁制原理であり，交換関係 (6.34) は Fermi 統計に相当している．

$N=0,\ 1$ の固有状態を $u_0,\ u_1$ と書くと，交換関係を用いて，

$$\begin{aligned} a^\dagger u_0=u_1,\quad au_1=u_0,\\ a^\dagger u_1=au_0=0 \end{aligned} \tag{6.35}$$

が確められる．すなわち，$a^\dagger,\ a$ は粒子の生成，消滅演算子である．$N,\ a,\ a^\dagger$ を2行2列の行列で書くと（(2.34) と比較せよ），

$$N=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad a=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad a^\dagger=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{6.36}$$

〔問題 6.3〕 $H=\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{m\omega^2}{2}x^2+g\sqrt{\hbar\omega^3 m}\,x$ で表わされる系を量子化せよ．このときの量子が一個存在する状態を，$g=0$ のときの量子が 0, 1, 2, … 個存在する状態の和として表わせ．ただし g の大きさは 1 に比べてはるかに小さいとして摂動論を使って近似計算できるとする．

〔問題 6.4〕 任意のエルミット量 A と $a^\dagger a$ との交換関係 $[A, a^\dagger a]$ は次のいずれの場合にも 0 となることを示せ．

$$\text{(i)}\quad [A,a]=0, \qquad \text{(ii)}\quad \{A,a\}=0.$$

§ 6.3 電磁場の量子化

電磁場のポテンシャル A_μ を光子を記述する場と考え，A_μ の量子化を行なう．光子が質量 0，スピン 1 の粒子であり，またどのような Lorentz 座標系から眺めても光子の運動法則が不変のためには量子化された電磁場 $A_\mu(x)$ も (6.9), (6.10) をみたす．(6.10) の解として平面波 (6.11) をとると，一般に A_μ はいろいろな波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の平面波の和として表わされる．

$$A_\mu(x)=\frac{1}{\sqrt{L^3}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{c\hbar}{2k}}\{a_\mu^\dagger(\boldsymbol{k})\exp -i(\boldsymbol{kr}-\omega t)+a_\mu(\boldsymbol{k})\exp i(\boldsymbol{kr}-\omega t)\}. \tag{6.37}$$

右辺の第一項は t と共に位相の増す解，第二項は減る解である．$\boldsymbol{k}$ のとりうる値は系を，一辺 L の立方体の中に閉じこめたときに，週期性の境界条件から決まり，

$$\boldsymbol{k}=(k_1,\ k_2,\ k_3),\quad k_i=\frac{2\pi}{L}n_i,\quad n_i=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots \tag{6.38}$$

で与えられる．$\sqrt{c\hbar/2kL^3}\,a_\mu^\dagger(\boldsymbol{k})$, $\sqrt{c\hbar/2kL^3}\,a_\mu(\boldsymbol{k})$ は展開係数で，展開係数を $\sqrt{c\hbar/2kL^3}$ と a_μ (または $a_\mu^\dagger$) の二つの積に書いた理由は以下で明らかになる．

電磁場 $A_\mu(x)$ が点 x における光子を記述するだけでなく，その点における光子の吸収・放出を記述する量子化された場であるためには，$a_\mu(\boldsymbol{k})$, $a_\mu^\dagger(\boldsymbol{k})$ を単なる係数ではなく運動量 $\boldsymbol{p}(=\hbar\boldsymbol{k})$ の光子の吸収・放出の演算子と考え直す．このことは § 6.2 の調和振動子の例で質点を記述する座標 x (および p) が (6.30) のように，エネルギー $\hbar\omega$ の粒子の吸収・放出の演算子の和で書き直された量子化の手続と同じである．光子の場の量子化と 1 個の調和振動子の量子化とは，まったく同じ手続で行なわれるが，重要な相違は光子の場合には光子の運動量 $\boldsymbol{p}$ のそれぞれが一つの振動子に対応し，また $L\to\infty$ の系では $\boldsymbol{p}$ のとり得る値は無限個あり，振動数が $\omega\left(=\dfrac{cp}{\hbar}\right)$ で与えられる無限個の振動子の集まりと考えられる．

電磁場は $\boldsymbol{k}$ を与えても，なお4個の自由度 $A_\mu(\mu=1, 2, 3, 0)$ があるようにみえるが，§6.1 で議論したように，光子のスピンが 1 であることを保証する Lorentz 条件，および光子の質量0のためのゲージ変換の存在から，実際には2個の内部自由度しか持たない．

そこで，$\boldsymbol{k}$ を与えられたときの2個の独立な光子の状態としてヘリシティ h の固有状態 $(h=\pm1)$ をとると，$(\boldsymbol{k}, h)$ に対応する解は，

$$\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k}, h)\exp i(\boldsymbol{kr}-\omega t) \tag{6.39}$$

と書ける．$\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k}, h)$ はその光子に対する電磁場のベクトルで，$\boldsymbol{k}/\!/z$ のときは 6-2 表より，

$$\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k}, +1)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ i/\sqrt{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_\mu(\boldsymbol{k}, -1)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -i\sqrt{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{6.40}$$

である．$a_0=0$ になるようなゲージをとると，一般に $\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k}, h)$ は，

$$\varepsilon_0(\boldsymbol{k}, h)=0, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, h)\cdot\boldsymbol{k}=0 \tag{6.41}$$

をみたしている．第二式は Lorentz 条件で，与えられた $\boldsymbol{k}$ に対し，この式をみたす二つの独立な解 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, h)(h=\pm1)$ が存在する．$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, h)$ を単位ベクトルにとると次の直交規格化の式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}, h')\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, h)=\delta_{h,h'}. \tag{6.42}$$

この固有関数 (6.39) で電磁場 $A_\mu(x)$ を展開すると (6.37) は，

$$\begin{aligned}A_\mu(x)=\frac{1}{\sqrt{L^3}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_h\sqrt{\frac{c\hbar}{2k}}\{&a^\dagger(\boldsymbol{k}, h)\varepsilon_\mu^*(\boldsymbol{k}, h)\exp-i(\boldsymbol{kr}-\omega t)\\ &+a(\boldsymbol{k}, h)\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k}, h)\exp i(\boldsymbol{kr}-\omega t)\}+A_\mu{}^{cl}(x)\end{aligned} \tag{6.43}$$

となる．$A_\mu{}^{cl}(x)$ は光子に対応しない（量子化されない）部分で古典的 (classical) な部分といってよい．自由な光子の場合のポテンシャルに対しては，もちろん $A_\mu{}^{cl}=0$ であるが，荷電粒子の存在する場合には一般に0と異なる．

$a(\boldsymbol{k}, h)$, $a^\dagger(\boldsymbol{k}, h)$ は光子 $(\boldsymbol{k}, h)$ の吸収・放出の演算子で，光子が Bose 統計にしたがうことより，次の交換関係をみたすとしよう．

$$[a(\boldsymbol{k}, h),\ a^\dagger(\boldsymbol{k}, h)]=1. \tag{6.44}$$

したがって，次の量 $\boldsymbol{N}$,

$$N(\boldsymbol{k}, h)\equiv a^\dagger(\boldsymbol{k}, h)a(\boldsymbol{k}, h) \tag{6.45}$$

は，$(\boldsymbol{k}, h)$ の光子の数になり，0, 1, 2, … の正整数値のいずれかをとる．$(\boldsymbol{k}, h)$ の光

子が $N(\boldsymbol{k}, h)$ 個存在する系のエネルギーは，

$$H=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{h}\hbar\omega N(\boldsymbol{k},\ h)=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{h}\hbar\omega a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\ h)a(\boldsymbol{k},\ h) \tag{6.46}$$

になるはずであるが，これを調べるために電磁場のエネルギーを $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ を用いて求めてみよう．電磁気学で知られているように，電磁場の全エネルギーは，

$$H=\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}^{2}+\boldsymbol{H}^{2})d\boldsymbol{r}. \tag{6.47}$$

これを自由な光子の場合（$A_{\mu}{}^{Cl}=0$）に展開式(6.43)を用いて計算する．(6.8), (6.43) より，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-i\sqrt{\frac{1}{L^{3}}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{h}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\{a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\ h)\boldsymbol{\varepsilon}^{*}(\boldsymbol{k},\ h)\\ \exp -i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega t)-a(\boldsymbol{k},\ h)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\ h)\exp i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega t)\},\end{aligned} \tag{6.48}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=-i\sqrt{\frac{1}{L^{3}}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{h}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\{a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\ h)(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{\varepsilon}^{*}(\boldsymbol{k},\ h))\\ \exp -i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega t)-a(\boldsymbol{k},\ h)(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\ h))\exp i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega t)\}.\end{aligned} \tag{6.49}$$

ここで $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}$ は $\boldsymbol{k}$ 方向の単位ベクトルで，(6.41) より $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, h)$ と直交している．直交条件 (6.42) および

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{\varepsilon}^{*}(\boldsymbol{k},h))\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},h'))=\delta_{h,h'}, \tag{6.50}$$

$$\frac{1}{L^{3}}\int d\boldsymbol{r}\exp i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r})=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \tag{6.51}$$

を使うと，

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2}\int\left\{\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^{2}+(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})^{2}\right\}d\boldsymbol{r}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{h}\hbar\omega(a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\ h)a(\boldsymbol{k},\ h)+a(\boldsymbol{k},\ h)a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\ h))\end{aligned} \tag{6.52}$$

となる．aa, $a^{\dagger}a^{\dagger}$ の項がなくなるのは，たとえば $a(\boldsymbol{k}, h)a(-\boldsymbol{k}, h')$ の係数が

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\ h)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{k},\ h')+(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\ h))(\boldsymbol{\varepsilon}_{-\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{k},\ h'))=0 \tag{6.53}$$

により消えるためである．交換関係 (6.44) を使うと，

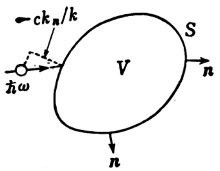
$$H=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{h}\hbar\omega a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\ h)a(\boldsymbol{k},\ h)+\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{h}\hbar\omega \tag{6.54}$$

となり，最後の項を除き (6.46) と一致する．最後の項は電磁場の零点エネルギーに相当するものであるが，光子の1個も存在しない真空状態においても存在する．系のエネルギーでわれわれの観測しうるものは二つの状態のエネルギー差で，すべての状態に存在するこの真空のエネルギーは観測することはできない非物理的なものと考えられる．したがっ

て，以後は (6.46) で，荷電粒子の存在しない自由な電磁場のエネルギーを表わす.

以上の議論より，電磁場のエネルギー密度は $\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2)$ で与えられ，物質のないときの全エネルギーは系の中に存在する光子のエネルギーの和であることがわかった. 次にある閉じた空間 V の中に含まれるエネルギーの変化を調べてみよう.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2)d\boldsymbol{r} &= \int_V\left(\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right)d\boldsymbol{r} \\ &= c\int_V(\boldsymbol{E}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})d\boldsymbol{r} = -c\int_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_n dS.\end{aligned} \tag{6.55}$$



6－5 図

$\boldsymbol{n}$ は V の表面 S 上の各点における外向き法線方向の単位ベクトルで，$(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_n$ は $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向の成分の値である. $c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ は **Poynting ベクトル** といわれる量で，(6.55) は体積 V 内の単位時間あたりのエネルギーの変化は，表面 S から流れ入ってくる Poynting ベクトルの和で与えられることを示している. 一方，自由の光子からなる系では S を通して V 内に入ってくるエネルギーは単位時間面積あたり (6－5 図参照)

$$-\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{h}c\frac{k_n}{k}\cdot\hbar\omega\rho(\boldsymbol{k},\ h)=-c^2\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{h}p_n\rho(\boldsymbol{k},\ h)$$

で与えられる. ck_n/k は運動量 $\boldsymbol{p}$ の光子の $\boldsymbol{n}$ 方向の速度成分，$\hbar\omega(=cp)$ は光子のエネルギー，$\rho(\boldsymbol{k}, h)$ は $(\boldsymbol{k}, h)$ の光子の密度である. したがって，

$$\frac{1}{c}\int\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}d\boldsymbol{r}=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{h}\boldsymbol{p}N(\boldsymbol{k},\ h)=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{h}\boldsymbol{p}a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\ h)a(\boldsymbol{k},\ h) \tag{6.56}$$

になるはずである. すなわち，Poynting ベクトル (割る c^2) を全空間について積分したものは系の全運動量に等しい.

[光 子]

以上のように電磁場のエネルギー・運動量は

$$H=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{h}\hbar\omega N(\boldsymbol{k},\ h),\qquad \boldsymbol{P}=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{h}\boldsymbol{p}N(\boldsymbol{k},\ h) \tag{6.57}$$

で与えられることがわかった. $N(\boldsymbol{k}, h)$ は 0, 1, 2, … という固有値を持つから，場のエネルギーは連続的な値をとり得ず，$\hbar\omega$ の整数倍だけの不連続性を持つ. ある一つの $(\boldsymbol{k}, h)$ に対する N が 1 で，他の N がすべて 0 の状態はエネルギー $\hbar\omega$，運動量 $\boldsymbol{p}$ で $(\boldsymbol{k}, h)$ の光子 (光量子) が 1 個存在する状態である (ただし $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k},\ \omega=ck$).

一般の固有状態は，このような光子がそれぞれ何個か存在する状態で $|n_1, n_2, \cdots, n_\sigma, \cdots\rangle$ を第 1 番目の種類の光子が n_1 個，第 2 番目の光子が n_2 個，… 存在する状態とすると，系のエネルギー・運動量は

$$E=\sum_\sigma \hbar\omega_\sigma n_\sigma, \qquad \boldsymbol{P}=\sum_\sigma \boldsymbol{p}_\sigma n_\sigma \tag{6.58}$$

となる．すべての n_σ が0の状態 $|0,0,\cdots\rangle\equiv|0\rangle$ はエネルギーの最底状態 ($E=0$) で真空の状態である．

$a^\dagger$, a の間の交換関係から § 2.4 のようにして，

$$\begin{aligned} a_\sigma^\dagger|\cdots, n_\sigma, \cdots\rangle&=\sqrt{n_\sigma+1}|\cdots, n_\sigma+1, \cdots\rangle, \\ a_\sigma|\cdots, n_\sigma, \cdots\rangle&=\sqrt{n_\sigma}|\cdots, n_\sigma-1, \cdots\rangle \end{aligned} \tag{6.59}$$

となり，a_σ は光子 σ を1個吸収，$a_\sigma^\dagger$ は放出する演算子である．電磁場のポテンシャル A_μ は (6.43) より a_σ, $a_\sigma^\dagger$ の1次結合で光子を一個吸収したり生成したりする働きを持つ．光子を1個増減する A_μ の行列要素は，

$$\begin{aligned} &\langle\cdots, n_\sigma+1, \cdots|A(x)|\cdots, n_\sigma, \cdots\rangle \\ &=\sqrt{\frac{c\hbar}{2k_\sigma L^3}}\sqrt{n_\sigma+1}\,\varepsilon^*(\boldsymbol{k}_\sigma, h_\sigma)\exp-i(\boldsymbol{k}_\sigma\boldsymbol{r}-\omega_\sigma t), \\ &\langle\cdots, n_\sigma-1, \cdots|A(x)|\cdots, n_\sigma, \cdots\rangle \\ &=\sqrt{\frac{c\hbar}{2k_\sigma L^3}}\sqrt{n_\sigma}\,\varepsilon(\boldsymbol{k}_\sigma, h_\sigma)\exp i(\boldsymbol{k}_\sigma\boldsymbol{r}-\omega_\sigma t) \end{aligned} \tag{6.60}$$

である．

ある一つの $\boldsymbol{k}$ を考え，これを z 軸にとると，$h=\pm1$ の光子の状態は真空状態 $|0\rangle$ に $a^\dagger(\boldsymbol{k}, h)$ を作用させると得られ，その光子を表わすベクトルポテンシャル ($\langle 0|\boldsymbol{A}(x)|1\rangle$) は (6.60) より，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}, +1)&=\sqrt{\frac{c\hbar}{2kL^3}}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ i/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}\exp i(\boldsymbol{kr}-\omega t) \qquad h=1, \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}, -1)&=\sqrt{\frac{c\hbar}{2kL^3}}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -i/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}\exp i(\boldsymbol{kr}-\omega t) \qquad h=-1 \end{aligned} \tag{6.61}$$

である．一方，次の $A_x(\boldsymbol{k})$, $A_y(\boldsymbol{k})$

$$\begin{aligned} A_x(\boldsymbol{k})&\equiv\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}, +1)+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}, -1)}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{c\hbar}{2kL^3}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\exp i(\boldsymbol{kr}-\omega t), \\ A_y(\boldsymbol{k})&=\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}, +1)-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}, -1)}{\sqrt{2}i}=\sqrt{\frac{c\hbar}{2kL^3}}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\exp i(\boldsymbol{kr}-\omega t) \end{aligned} \tag{6.62}$$

は，それぞれ x, y 軸方向の成分のみを持つベクトルポテンシャルである．このようなポテンシャルを持つ状態 $|1\rangle$ を作る $a^\dagger$ は，

$$a_x^\dagger(\boldsymbol{k})=\frac{a^\dagger(\boldsymbol{k},1)+a^\dagger(\boldsymbol{k},-1)}{\sqrt{2}},\qquad a_y^\dagger(\boldsymbol{k})=\frac{a^\dagger(\boldsymbol{k},1)-a^\dagger(\boldsymbol{k},-1)}{\sqrt{2}i}.\quad(6.63)$$

また，吸収する演算子は

$$a_x(\boldsymbol{k})=\frac{a(\boldsymbol{k},1)+a(\boldsymbol{k},-1)}{\sqrt{2}},\qquad a_y(\boldsymbol{k})=\frac{-a(\boldsymbol{k},1)+a(k,-1)}{\sqrt{2}i}\quad(6.64)$$

である．h の固有状態は**円偏光**といわれ，光子の進行方向の角運動量の固有状態であり，これに対し進行方向に垂直なある一定方向をベクトルポテンシャルが向いている状態を**直線偏光**という．運動量一定の光子は2個の独立な円偏光（$h=\pm1$）状態，または2個の独立な直線偏光状態で表わされ，その関係は（6.63），（6.64）で与えられる．

エネルギー $E(=\hbar\omega)$ と $E+dE$ の間にある光子の異なる状態の数は §2.4 と同様にして求められる．$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}+d\boldsymbol{p}$ の間にある運動量の異なる状態の数は，

$$\left(\frac{L}{h}\right)^3 d\boldsymbol{p}=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d\boldsymbol{k}=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 k^2dkd\Omega.$$

したがって，ω と $\omega+d\omega$ の間にある数は $\omega=ck$ より，

$$2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\frac{\omega^2d\omega}{c^3}\,d\Omega=\frac{d\Omega}{4\pi^3}\left(\frac{L}{c}\right)^3\omega^2\frac{dE}{\hbar}\quad(6.65)$$

となる．係数2は光子の偏りの状態が2個あるためである．

〔例題〕 原子による光の放出

荷電粒子と電磁場との相互作用は第8章でくわしく論ずるが，ここでは電磁場の量子論の応用として，原子からの光の放出の問題を扱う．原子は原子核のまわりをいくつかの電子が Bohr の理論で与えられる軌道をまわっている系であるが，励起された状態の原子中で電子がある軌道からよりエネルギーの低い軌道に移ると，そのエネルギー差に等しいエネルギーの光子が放出される．古典電磁力学によると，電磁場のポテンシャル A_μ のあるときの電子の運動の Hamiltonian は，

$$H=\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2-eA_0(\boldsymbol{r}).\quad(6.66)$$

m，$-e$ は電子の質量と荷電，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{p}$ は電子の位置と運動量である．量子論的に扱うには $\boldsymbol{p}$ を $-i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{r}$，$A_\mu(\boldsymbol{r})$ を（6.43）でおきかえる．$A_\mu(\boldsymbol{r})$ は電子，原子核等の荷電粒子が存在するので，自由な光子を表わす部分の他に A_μ^{Cl} も存在し，原子の場合には原子核（荷電 ze）の作る Coulomb場と考えてよい（電子相互間の Coulomb 力等を無視して）．

H を分けて，

$$H=H_0+H',\ H_0=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-eA_0(\boldsymbol{r}),\ H'=\frac{e}{mc}\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})+\frac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{r}).\quad(6.67)$$

とおくと，H_0 は電子の定常状態（軌道）を決める Hamiltonian，H' は光の放出・吸収を行なう Hamiltonian である．H_0 と光子の Hamiltonian (6.46) を非摂動系，H' を摂動部分と考える．H' の中の $\boldsymbol{A}^2$ の項は 2 個の光の放出・吸収を行なう演算子であり，1 個の光の放出には直接効かないので省略する．

初め，光子は 1 個も存在せず，電子が φ_m という H_0 の定常状態にあり，その状態から電子が $\varphi_n(E_n < E_m)$ という H_0 の定常状態にあり，光子が 1 個存在する状態への遷移確率を求めよう．H' のこの遷移に対する行列要素は光子の波数ベクトルを $\boldsymbol{k}_\sigma$，偏りのベクトルを $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma$ とすると，

$$< 1_\sigma,\ n|H'|0,\ m > = \frac{e}{mc}\sqrt{\frac{c\hbar}{2k_\sigma L^3}}\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma{}^*\int\varphi_n{}^*(\boldsymbol{r})\boldsymbol{p}e^{-i(\boldsymbol{k}_\sigma\boldsymbol{r})}\varphi_m(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}. \tag{6.68}$$

電子の波動関数 φ_m, φ_n がわかっていれば右辺は計算できるが，光の波長（$=1/k_\sigma$）が電子の軌道の拡がりにくらべて非常に大きい場合には $\boldsymbol{k}_\sigma\boldsymbol{r}\approx 0$ になり指数関数を 1 でおきかえてよい．

k_σ の大きさはエネルギーの保存則より $k_\sigma=(E_m-E_n)/c\hbar$，水素原子の場合を考えると（§ 8.3 参照）$E_m-E_n$ は水素原子の基底エネルギー $\alpha^2\dfrac{mc^2}{2}$ の程度と考えてよい．一方，水素原子内の電子の軌道半径は Bohr 半径 $\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\hbar}{mc}$ の程度である．これより光子の波長 $\lambda\!\!\!^{-}=1/k\approx\dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{2\hbar}{mc}$ は Bohr 半径にくらべて $\dfrac{2}{\alpha}$ 程度大きい．α は微細構造定数で $e^2/4\pi\hbar c(\approx 1/137)$ に等しく波長と軌道半径の比は $2/\alpha\approx 274$ 程度になる．

以上の近似を用いると，

$$< 1_\sigma,\ n|H'|0,\ m > = \frac{e}{mc}\sqrt{\frac{c\hbar}{2k_\sigma L^3}}\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma{}^*\int\varphi_n{}^*\boldsymbol{p}\varphi_m d\boldsymbol{r}.$$

$\boldsymbol{p}/m$ は電子の速度であるから，$d\boldsymbol{r}/dt$ に等しく (2.78) を用いると，

$$\frac{1}{m}\int\varphi_n{}^*\boldsymbol{p}\varphi_m d\boldsymbol{r}=\int\varphi_n{}^*\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\varphi_m d\boldsymbol{r}=\frac{i}{\hbar}\int\varphi_n{}^*[H,\ \boldsymbol{r}]\varphi_m d\boldsymbol{r}$$

$$\approx\frac{i}{\hbar}\int\varphi_n{}^*[H_0,\ \boldsymbol{r}]\varphi_m d\boldsymbol{r}=\frac{i}{\hbar}(E_n-E_m)< n|\boldsymbol{r}|m >.$$

したがって，$c\hbar k_\sigma=E_m-E_n$ により，

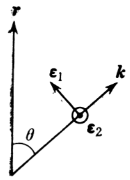
$$< 1_\sigma,\ n|H'|0,\ m > = -ie\sqrt{\frac{c\hbar k_\sigma}{2L^3}}< n|\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{r}|m >.$$

偏りが $\boldsymbol{\varepsilon}$，進行方向が $d\Omega$ の立体角の中にある光が放出される確率は (2.66)，(6.65)（ただし偏りにつき和をとらないので (6.65) の半分の密度を使う）より，

$$d\omega_{nm}=\frac{2\pi}{\hbar}|<1_\sigma,n|H'|0,\ m>|^2\frac{d\Omega}{8\pi^3}\left(\frac{L}{c}\right)^3\frac{\omega^2}{\hbar}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\frac{\omega^3}{c^2}|<n|\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{r}|m>|^2d\Omega.$$

これは出てくる光の偏り $\boldsymbol{\varepsilon}$ を決めたときの確率であるが，実際には光の偏りを測定することはほとんどなく，二つの偏りについての和をとった全確率が問題になる．$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{k}$ の間の角度を θ とし，$\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, を $\boldsymbol{k}$ に垂直な二つの単位ベクトルとすると（6-6 図）．



6-6 図

$$\sum_{\varepsilon}|\langle n|\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{r}|m\rangle|^2=|\langle n|\boldsymbol{\varepsilon}_1^*\cdot\boldsymbol{r}|m\rangle|^2+|\langle n|\boldsymbol{\varepsilon}_2^*\cdot\boldsymbol{r}|m\rangle|^2=\sin^2\theta|\langle n|\boldsymbol{r}|m\rangle|^2.$$

したがって，

$$dw=\sum_{\varepsilon}d w_{nm}=\frac{\alpha}{2\pi}|\langle n|\boldsymbol{r}|m\rangle|^2\sin^2\theta\frac{\omega^3}{c^2}d\Omega. \tag{6.69}$$

α は微細構造定数（$=e^2/4\pi\hbar c$）である．さらに $\boldsymbol{k}$ のあらゆる方向について積分すると，

$$w=\frac{4}{3}\alpha|\langle n|\boldsymbol{r}|m\rangle|^2\frac{\omega^3}{c^2}. \tag{6.70}$$

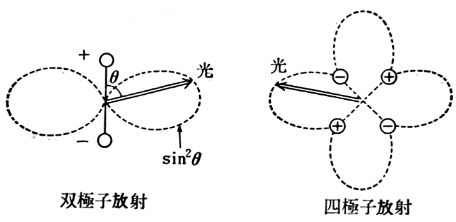
これが単位時間ごとに光の放出の行なわれる確率である．

$|\langle n|\boldsymbol{r}|m\rangle|$ はだいたい原子の大きさ，つまり Bohr 半径 $\hbar/\alpha mc$ の程度で，ω は $\alpha^2mc^2/2\hbar$ の程度である．したがって，

$$w\sim\frac{4}{3}\alpha\left(\frac{\hbar}{\alpha mc}\right)^2\left(\frac{\alpha^2mc^2}{2\hbar}\right)^3\frac{1}{c^2}=\frac{\alpha^5}{6}\frac{mc^2}{\hbar}\sim 2.5\times10^9\,\mathrm{sec}^{-1}.$$

すなわち，励起された原子は 10^{-9} sec 程度のうちに光を出すことになる．

以上は $\boldsymbol{kr}\approx 0$ の近似のもとに導びかれた式である．古典電磁気学で，正と負の電荷の組（双極子）が直線上で 6-7 図のように振動しているとき，それから放射される電磁波の強度分布がちょうど (6.69) で与えられる．したがって，上に求めた式を**双極子放射の式**という．$\exp(i\boldsymbol{k}_\sigma\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{k}_\sigma\boldsymbol{r}$ でべき展開し，もっと高い近似までとれば一般に多極子放射が得られる．これらは古典電磁気学でいくつかの正負の電荷の集まり（多極子）の振動からの放射に対応する．



6-7 図

〔問題 6.5〕 電磁場のポテンシャル A_μ，電場・磁場の強さ $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ の次元を求めよ．

〔略解〕 質量・長さ・時間の次元を $[M]$, $[L]$, $[T]$ と書くとエネルギーの次元は $[\text{エネルギー}]=[M][L]^2[T]^{-2}$ となる．(6.47) より $[\boldsymbol{E}^2]=[\boldsymbol{H}^2]=[M][L]^{-1}[T]^{-2}$ したがって，$[\boldsymbol{E}]=[\boldsymbol{H}]=[M]^{1/2}[L]^{-1/2}[T]^{-1}$. また (6.8) より，

$$[A_\mu]=[M]^{1/2}[L]^{1/2}[T]^{-1}.$$

〔問題 6.6〕 (6.67) の H' の第 2 項 $\dfrac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2(x)$ は光子を 1 個吸収して，他の光子を 1 個放出する．光子のエネルギーが電子の静止エネルギーにくらべて非常に小さい場合に，光子が電子により散乱される断面積を摂動論で求めよ．

§ 6.4　スピン 0 粒子の量子化

〔中性粒子〕

電磁場の量子論すなわち光子の理論は以上のようにして得られたが，これを手本にして他の粒子に対しても同じような取り扱いをすることができる．粒子はある波動場を量子化したときの量子として書き表わすことができる．まず，スピンが 0 の粒子を考えよう．光子はスピンが 1 であって運動量を与えたとき二つの状態が存在した．これは光子がベクトルポテンシャルで表わされ，偏りベクトルに二通りの向きが可能だったことによる．スピン 0 の場合は内部自由度を持たないのだから，ただ 1 個の量 $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ という場で表わされると考えられる．φ は空間回転あるいは Lorentz 変換しても自分自身に移り，これら変換に対し変らないスカラー量である．

光子は静止質量が 0 であった．すなわち，エネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ が，

$$E^2=\boldsymbol{p}^2c^2 \tag{6.71}$$

という関係をみたした．これは電磁場が (6.10) という方程式をみたすことに対応している．

質量がある粒子のエネルギー・運動量は，

$$\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4 \tag{6.72}$$

の関係にあり，平面波，

$$e^{i(\boldsymbol{pr}-Et)/\hbar} \tag{6.73}$$

は，方程式

$$\Box\varphi=\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi \tag{6.74}$$

の解である．そこで，この方程式を出発点として考えることにしよう．

(6.74) の波動場があったとき，その場のエネルギー E はどのような量で与えられるだろうか．電磁場の場合を手本にして考えると，E は φ, $\partial\varphi/\partial t$, $\partial\varphi/\partial\boldsymbol{r}$ の 2 次式である．ま

た E は保存則をみたさなければならない. すなわち, E の時間的変化が, 空間の表面を通って入ってくるエネルギーの流れに等しいという関係がなければならない. このような E として次のものがある.

$$E=\frac{1}{2}\int_V\left(\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^2+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^2\right)d\boldsymbol{r}.$$

実際これを微分して運動方程式 (6.74) を使うと,

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\int_V\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}}\right)+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)d\boldsymbol{r}$$

$$=\int_V\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Delta\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\right)d\boldsymbol{r}=\int_V\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}}\right)d\boldsymbol{r}$$

$$=\int_S\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_n dS.$$

したがって, $-\partial\varphi/\partial t\cdot\partial\varphi/\partial\boldsymbol{r}$ が表面を通して流れ出るエネルギーの流れと解釈できる. エネルギーの流れを c^2 で割れば質量の流れ, つまり運動量が得られる. したがって, (6.74) の場に対してエネルギー・運動量を

$$E=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^2+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^2\right)d\boldsymbol{r}, \tag{6.75}$$

$$\boldsymbol{P}=-\frac{1}{c^2}\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r} \tag{6.76}$$

で定義してみよう. これが系に含まれる自由粒子のエネルギー・運動量の総量になることを後に示そう.

量子論に移るには, φ を平面波に展開し, 系を調和振動子の集まりとして書いて, これを量子化すればよい. 電磁場の場合と同様にして次のようになる.

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\hbar c\sum_{\boldsymbol{p}}\sqrt{\frac{1}{2EL^3}}\left\{c^\dagger(\boldsymbol{p})\exp\frac{-i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)+c(\boldsymbol{p})\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)\right\}, \tag{6.77}$$

$$E=\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4}, \tag{6.78}$$

$$[c(\boldsymbol{p}),c^\dagger(\boldsymbol{p})]=1,\ [c(\boldsymbol{p}),c(\boldsymbol{p})]=[c^\dagger(\boldsymbol{p}),c^\dagger(\boldsymbol{p})]=0, \tag{6.79}$$

ただし, (6.77) の和は, (2.42) で与えられるすべての格子点について行なう.

これらを (6.75), (6.76) に代入してエネルギー (Hamiltonian), 運動量を計算すると

$$H=\sum_{\boldsymbol{p}}Ec^\dagger(\boldsymbol{p})c(\boldsymbol{p}), \tag{6.80}$$

$$\boldsymbol{P}=\sum_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}c^\dagger(\boldsymbol{p})c(\boldsymbol{p}) \tag{6.81}$$

が得られる. $c^\dagger(\boldsymbol{p})c(\boldsymbol{p})$ は交換関係により 0, 1, 2, ⋯ という正整数の固有値を持ち, これが運動量 $\boldsymbol{p}$, エネルギーが E の量子の個数を与える. この $\boldsymbol{p}$, E は (6.78) すなわ

ち (6.72) の関係をみたすから，静止質量が m の粒子であることが確かめられた. (6.80) および (6.81) はこのような粒子が何個か存在するとき，全エネルギー，全運動量がそれぞれ，

$$H=\sum_p n_p E,\ \ \boldsymbol{P}=\sum_p n_p \boldsymbol{p}$$

で与えられることを示している. これらのことから，方程式(6.74)および(6.75),(6.76)の定義がこのような粒子の集まりを表わすのに適当であることがわかる.

$c^\dagger(\boldsymbol{p})$ は運動量 $\boldsymbol{p}$ の粒子を一つふやす演算子，$c(\boldsymbol{p})$ は一つ減らす演算子である. φ は $c(\boldsymbol{p})$ と $c^\dagger(\boldsymbol{p})$ の1次結合で，粒子を一個作ったり，消したりする作用を持っている. そのような遷移に対する行列要素は，

$$\langle\cdots,\ n_p+1,\ \cdots|\varphi(x)|\cdots,\ n_p,\ \cdots\rangle=\frac{\hbar c}{\sqrt{2EL^3}}\sqrt{n_p+1}\exp\frac{-i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)$$

$$\langle\cdots,\ n_p-1,\ \cdots|\varphi(x)|\cdots,\ n_p,\ \cdots\rangle=\frac{\hbar c}{\sqrt{2EL^3}}\sqrt{n_p}\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)\qquad(6.82)$$

で与えられる.

(6.74) を量子化して得られる粒子は運動量 $\boldsymbol{p}$ で状態が決まってしまい，それ以上の自由度を持っていない. また粒子が止まっている状態 ($\boldsymbol{p}=0$) は，空間を回転しても状態は不変である. これらのことから，この粒子のスピンは0である. 次の節でやる荷電粒子と比較して，この粒子は電気的に中性であると考えられる.

[スピン0の荷電粒子]

これまで考えたスカラー場 $\varphi(x)$ は特に断わらなかったが実数，また量子化された場はエルミット量として扱ってきた. 実際に (6.77) の φ の展開式から明らかなように，φ を量子化していないときは $c(\boldsymbol{p})$ と $c^\dagger(\boldsymbol{p})$ は互に複素共役量なので φ は実数，また φ を量子化して $c, c^\dagger$ が演算子であるときは $c(\boldsymbol{p})$, $c^\dagger(\boldsymbol{p})$ は互にエルミット共役で，φ はエルミット量になっている. これに対し，こんどは φ を複素数，または量子化した φ を非エルミット量としてみよう.

複素数 φ は実数部と虚数部とを持ち，また量子化された場 φ はエルミット部分と反エルミット部分に分けられる.

$$\varphi=\frac{1}{2}(\varphi+\varphi^*)+i\frac{\varphi-\varphi^*}{2i}\cdots,\qquad\text{複素数}$$

$$\varphi=\frac{1}{2}(\varphi+\varphi^\dagger)+i\frac{\varphi-\varphi^\dagger}{2i}\cdots.\qquad\text{非エルミット量}$$

$(\varphi+\varphi^*)/2$, $(\varphi-\varphi^*)/2i$ は共に実数，$(\varphi+\varphi^\dagger)/2$, $(\varphi-\varphi^\dagger)/2i$ は共にエルミット量で

実数の場が二つあることに対応して，φ で表わされる粒子の自由度は φ が実数の場合にくらべて2倍になっている．この自由度は Lorentz 変換・空間回転等で一方 $((\varphi+\varphi^\dagger)/2)$ から他方 $((\varphi-\varphi^\dagger)/2i)$ に移ることはなく，したがって，粒子のスピン等には無関係な自由度である．さて π 中間子，K 中間子等を調べてみると π^+ 中間子に対して π^- 中間子，K^+ 中間子に対して K^- 中間子というぐあいに一つの素粒子に対してそれと質量・スピン等が同一で荷電の異符号の反粒子の存在が知られている．そこで複素数の場の持つ内部自由度を粒子・反粒子を区別する自由度と考えよう（第8章参照）．

φ が質量 m の粒子および反粒子を表わすためには φ, $\varphi^\dagger$ 共に (6.74) をみたす．

$$\Box\,\varphi=\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi,\qquad \Box\,\varphi^\dagger=\Delta\varphi^\dagger-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi^\dagger}{\partial t^2}=\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^\dagger. \tag{6.83}$$

これらは自由粒子のエネルギー・運動量の関係が (6.72) で与えられることを保証する．実数の φ の場合と同様に，次の量を系のエネルギー・運動量と考えると，

$$\boldsymbol{E}=\int\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial\boldsymbol{r}}\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{r}}+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^\dagger\varphi\right\}d\boldsymbol{r}, \tag{6.84}$$

$$\boldsymbol{P}=-\frac{1}{c^2}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial\boldsymbol{r}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)d\boldsymbol{r}, \tag{6.85}$$

ある体積 V の中に含まれる系のエネルギー変化は，単位時間にその表面 S を通して流れでる運動量 $\times\, c^2$ になっていることが示される．

$$\boldsymbol{E}=-c^2\int_S P_n dS.$$

場 $\varphi(\boldsymbol{x})$, $\varphi^\dagger(\boldsymbol{x})$ を量子化すると，これらは (6.83) の平面波の解の和として表わされる．

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\frac{c\hbar}{\sqrt{L^3}}\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{\sqrt{2E}}\left\{b^\dagger(\boldsymbol{p})\exp\frac{-i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)+a(\boldsymbol{p})\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)\right\}, \tag{6.86}$$

$$\varphi^\dagger(\boldsymbol{x})=\frac{c\hbar}{\sqrt{L^3}}\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{\sqrt{2E}}\left\{b(\boldsymbol{p})\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)+a^\dagger(\boldsymbol{p})\exp\frac{-i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)\right\}. \tag{6.87}$$

φ はエルミット量ではないので，$a(\boldsymbol{p})$ と $b^\dagger(\boldsymbol{p})$ は相互にエルミット共役の関係にはなく，φ が二つのエルミット量の1次結合であることに対応して $a(\boldsymbol{p})$ と $b^\dagger(\boldsymbol{p})$ は互に独立な係数になる．$a^\dagger(\boldsymbol{p})$ と $b(\boldsymbol{p})$ についても同様である．一方，φ と $\varphi^\dagger$ は互にエルミット共役なので，a と $a^\dagger$，b と $b^\dagger$ は相互にエルミット共役である．φ, $\varphi^\dagger$ を量子化すると a, $a^\dagger$, b, $b^\dagger$ は粒子の数を増減する演算子になるのだが，それを調べてみる．(6.87) の展開で正の振動数 $E/\hbar$ を持つ成分を $a^\dagger(\boldsymbol{p})$，負の振動数 $-E/\hbar$ を持つ成分を $b(\boldsymbol{p})$ と書いてある．その意味を考えてみよう．

物理量の時間的変化を与える運動方程式 (2.78) から,

$$\frac{\partial \varphi^{\dagger}(x)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[H,\ \varphi^{\dagger}(x)].$$

これに (6.87) を入れて, 両辺の平面波の成分を比較すると,

$$Ea^{\dagger}(\boldsymbol{p}) = [H,\ a^{\dagger}(\boldsymbol{p})], \quad -Eb(\boldsymbol{p}) = [H,\ b(\boldsymbol{p})] \tag{6.88}$$

が得られる. H の一つの固有状態を Ψ_0, そのエネルギーを E_0 とする. すなわち,

$$H\Psi_0 = E_0\Psi_0$$

である. この Ψ_0 に (6.88) の第一式の両辺を掛けると,

$$Ea^{\dagger}(\boldsymbol{p})\Psi_0 = Ha^{\dagger}(\boldsymbol{p})\Psi_0 - a^{\dagger}(\boldsymbol{p})H\Psi_0 = Ha^{\dagger}(\boldsymbol{p})\Psi_0 - E_0a^{\dagger}(\boldsymbol{p})\Psi_0,$$

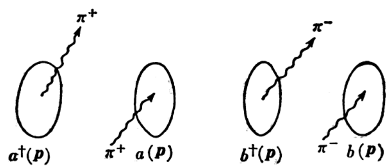
$$Ha^{\dagger}(\boldsymbol{p})\Psi_0 = (E_0 + E)a^{\dagger}(\boldsymbol{p})\Psi_0.$$

となり, $a^{\dagger}(\boldsymbol{p})\Psi_0$ はエネルギーがもとのより E だけ多い固有状態である. したがって $a^{\dagger}(\boldsymbol{p})$ はエネルギーが E の粒子をつくりだす演算子であることがわかる. 同様に.

$$Hb(\boldsymbol{p})\Psi_0 = (E_0 - E)b(\boldsymbol{p})\Psi_0$$

から, $b(\boldsymbol{p})$ はエネルギー E の粒子を消滅させる演算子になる. φ でも同様で正の振動数を持つ成分は生成演算子, 負の振動数の成分は消滅演算子である. この事情は今までの例 (6.43), (6.77) でもそうなっている.

さて粒子・反粒子を区別する自由度が $\pi^{\pm}$, $K^{\pm}$ のときのように粒子の荷電であるとして, $\varphi^{\dagger}$ は正荷電, φ は負荷電を持った場で, $\varphi^{\dagger}$ は荷電を $+e$ だけ増やし, φ は荷電を $+e$ だけ減らす演算子という条件をつけてみよう(第8章参照). このときは $a^{\dagger}$, b は共に荷電を増す働きをするので, $a^{\dagger}$ は正荷電の粒子をつくり, b は負荷電を持つ反粒子を吸収すると考えなければならない. φ の中の a, $b^{\dagger}$ はそれぞれ $a^{\dagger}$, b のエルミット共役量であるから粒子の吸収, 反粒子の生成の演算子となる (6-8 図).



6-8 図 $\pi^{\pm}$ 中間子の吸収, 放出の演算子

スピン0粒子は Bose 統計にしたがうので, 同じ運動量 $\boldsymbol{p}$ の状態には何個でも粒子が存在しうる. そこで交換関係として次のようにおく,

$$[a(\boldsymbol{p}),\ a^{\dagger}(\boldsymbol{p})] = [b(\boldsymbol{p}),\ b^{\dagger}(\boldsymbol{p})] = 1,$$

$$[a(\boldsymbol{p}),\ a(\boldsymbol{p})] = [a^{\dagger}(\boldsymbol{p}), a^{\dagger}(\boldsymbol{p})] = [b(\boldsymbol{p}), b(\boldsymbol{p})] = [b^{\dagger}(\boldsymbol{p}), b^{\dagger}(\boldsymbol{p})] = 0. \tag{6.89}$$

したがって,

$$N_+(\boldsymbol{p}) = a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}), \qquad N_-(\boldsymbol{p}) = b^\dagger(\boldsymbol{p})b(\boldsymbol{p}) \tag{6.90}$$

はそれぞれ運動量 $\boldsymbol{p}$ の粒子および反粒子の数で 0, 1, 2, $\cdots$ の正整数値をとる．(6.86), (6.87) を (6.84), (6.85) に代入すると零点エネルギーを無視して，

$$H = \sum_{\boldsymbol{p}} E(a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) + b^\dagger(\boldsymbol{p})b(\boldsymbol{p})), \tag{6.91}$$

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{p}(a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) + b^\dagger(\boldsymbol{p})b(\boldsymbol{p})) \tag{6.92}$$

となり，H, $\boldsymbol{P}$ は個々の自由粒子のエネルギー・運動量の和になっている．また運動量 $\boldsymbol{p}_\sigma$ の粒子が $n_\sigma{}^+$ 個ある状態から $n_\sigma{}^+ + 1$ 個ある状態に移る $\varphi^\dagger(x)$ の行列要素等を求めると，(6.82) と同様にして，

$$\begin{aligned}
\langle\cdots, n_\sigma{}^+ + 1, \cdots|\varphi^\dagger(x)|\cdots, n_\sigma{}^+, \cdots\rangle &= \hbar c\sqrt{\frac{1}{2E_\sigma L^3}}\sqrt{n_\sigma{}^+ + 1}\exp\frac{-i}{\hbar}(\boldsymbol{p}_\sigma\boldsymbol{r} - E_\sigma t), \\
\langle\cdots, n_\sigma{}^- - 1, \cdots|\varphi^\dagger(x)|\cdots, n_\sigma{}^-, \cdots\rangle &= \hbar c\sqrt{\frac{1}{2E_\sigma L^3}}\sqrt{n_\sigma{}^-}\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}_\sigma\boldsymbol{r} - E_\sigma t), \\
\langle\cdots, n_\sigma{}^+ - 1, \cdots|\varphi(x)|\cdots, n_\sigma{}^+, \cdots\rangle &= \hbar c\sqrt{\frac{1}{2E_\sigma L^3}}\sqrt{n_\sigma{}^+}\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}_\sigma\boldsymbol{r} - E_\sigma t), \\
\langle\cdots, n_\sigma{}^- + 1, \cdots|\varphi(x)|\cdots, n_\sigma{}^-, \cdots\rangle &= \hbar c\sqrt{\frac{1}{2E_\sigma L^3}}\sqrt{n_\sigma{}^- + 1}\exp\frac{-i}{\hbar}(\boldsymbol{p}_\sigma\boldsymbol{r} - E_\sigma t).
\end{aligned} \tag{6.93}$$

荷電粒子の場 $\varphi(x)$ のエネルギー・運動量は連続の方程式，

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = c^2 \operatorname{div} \boldsymbol{P} \tag{6.94}$$

をみたし，ある体積内に含まれるエネルギーの単位時間あたりの変化は表面を通して流れ入る運動量の和 $\times\, c^2$ に等しい．荷電粒子の場合には E, $c^2\boldsymbol{P}$ の他にこのような連続の方程式をみたす量が他にもう一つ存在する．すなわち，

$$\rho(x) = \frac{-i}{\hbar c^2}\left(\frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial t}\varphi - \varphi^\dagger\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \qquad \boldsymbol{j} = \frac{i}{\hbar}\left(\frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial \boldsymbol{r}}\varphi - \varphi^\dagger\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}}\right) \tag{6.95}$$

を作ると，φ, $\varphi^\dagger$ 運動方程式を用い，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar c^2}\left(\frac{\partial^2\varphi^\dagger}{\partial t^2}\varphi - \varphi^\dagger\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) = \frac{-i}{\hbar}(\Delta\varphi^\dagger\varphi - \varphi^\dagger\Delta\varphi) = -\operatorname{div}\boldsymbol{j}. \tag{6.96}$$

したがって，ρ, $\boldsymbol{j}$ も E, $c^2\boldsymbol{p}$ と同様に連続の式をみたす．

φ, $\varphi^\dagger$ に展開式 (6.86), (6.87) を代入すると，

$$\int \rho d\boldsymbol{r} = \sum_{\boldsymbol{p}}(a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) - b^\dagger(\boldsymbol{p})b(\boldsymbol{p})) \tag{6.97}$$

となり，全粒子数から全反粒子数を引いたものである．もし粒子が荷電 $+e$, 反粒子が

$-e$ を持つときは $e\int \rho dr$ は系の全荷電量になる．また，荷電の変化はそこに流れ入る電流の総和に等しいから (6.96), (6.97) より $e\rho(x)$, $e\boldsymbol{j}(x)$ は点 x における荷電・電流密度になる．φ が中性粒子の場であるときは $\varphi=\varphi^\dagger\,(a=b,\ a^\dagger=b^\dagger)$ より明らかなように $\rho=\boldsymbol{j}=0$ で荷電も電流も存在しない．

〔問題 6.7〕 スピン 0 粒子の場 $\varphi(x)$ の次元を求めよ．

〔問題 6.8〕 中性スピン 0 粒子の場 $\varphi(x)$ から $\varphi^2(x)$ を作るとき，$\varphi^2(x)$ の真空状態での平均値がどのような Lorentz 座標系から眺めても不変のことを示せ．

〔略解〕 真空状態（粒子の存在しない状態）を $|0\rangle$ で表らわすと，(6.77) および

$$\langle 0|c^\dagger(\boldsymbol{p})c^\dagger(\boldsymbol{p}')|0\rangle=\langle 0|c(\boldsymbol{p})c(\boldsymbol{p}')|0\rangle=\langle 0|c^\dagger(\boldsymbol{p})c(\boldsymbol{p}')|0\rangle=0,$$

$$\langle 0|c(\boldsymbol{p})c^\dagger(\boldsymbol{p}')|0\rangle=\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$$

より $\langle 0|\varphi^2(x)|0\rangle=(\hbar c)^2\sum_{\boldsymbol{p}}\dfrac{1}{2EL^3}$．$\boldsymbol{p}$ についての和は L が大きいとして積分におきかえると $\sum_{\boldsymbol{p}}\to(L/h)^3dp_xdp_ydp_z$ ((2.44) 参照)．したがって $dp_xdp_ydp_z/E$ が Lorentz 変換に対し不変なことを示せばよい．Lorentz 変換により $(\boldsymbol{p},\ E/c)$ が $(\boldsymbol{p}',\ E'/c)$ に移ったとすると，(4.4) より（たとえば z 軸方向への速度 v の変換を考えて），

$$dp_x'=dp_x,\ dp_y'=dp_y.\ dp_z'=\frac{dp_z-(v/c^2)dE}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ E'=\frac{E-vp_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

したがって，$\dfrac{dp_x'dp_y'dp_z'}{E'}=\dfrac{dp_xdp_ydp_z}{E}\,\dfrac{1-(v/c^2)dE/dp_z}{1-vp_z/E}.$

$EdE=c^2p_zdp_z$ を使うと $d\boldsymbol{p}/E=d\boldsymbol{p}'/E'$ が示される．（同様に異なる 2 点 $x,\ x'$ での φ の積 $\varphi(x)\varphi(x')$ の期待値も Lorentz 不変で $(x-x')_\mu{}^2$ のみの関数となる）．

§ 6.5　交換関係と Bose 統計

自由な Bose 粒子（光子・π 中間子…）の個々の状態 σ はその粒子の種類，運動量，ヘリシティを与えて指定される．粒子 σ の吸収・放出の演算子を c_σ, $c^\dagger_\sigma$ と書くと，その粒子の集合が Bose 統計にしたがうことから交換関係，

$$[c_\sigma,\ c_\sigma{}^\dagger]=1,\ [c_\sigma,\ c_\sigma]=[c_\sigma{}^\dagger,\ c_\sigma{}^\dagger]=0 \tag{6.98}$$

がみたされ

$$N_\sigma=c_\sigma{}^\dagger c_\sigma \tag{6.99}$$

は，系の中にある粒子 σ の個数で 0, 1, 2, … の正整数値をとる．それでは運動量，ヘリシティ等の異なる σ に対する $c,\ c^\dagger$ の間の交換関係はどうなるであろうか．簡単のためにスピン 0 の中性粒子を例にとって考えてみよう．

中性スピン 0 粒子の場を $\varphi(x)$ としよう．$\varphi(x)$ はエルミット量であるから，これを観測すれば実数の固有値が得られる．さて異なる 2 点 $x,\ x'$ における場 $\varphi(x)$, $\varphi(x')$ を測定するとき，もし $\varphi(x)$, $\varphi(x')$ が互に独立な量であれば $\varphi(x)$ を測定したために $\varphi(x')$

の測定値が変るということは考えられないので，$\varphi(x)$ と $\varphi(x')$ とは同時に固有状態になりうる．すなわち，

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = 0$$

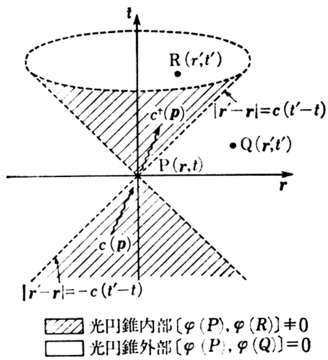
である．(§ 2.3 参照)．

さて点 x で $\varphi(x)$ を測定し，たとえば，ある運動量 $\boldsymbol{p}$ の粒子が作られまたは吸収されたことを確かめると，この粒子は速度 $\boldsymbol{v} = c^2\boldsymbol{p}/E$ で伝播するから，$\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}(t' - t)$ の関係にある点 x' における場 $\varphi(x')$ に影響を与える．この速度 $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{p}$ をかえると変化するが，光速度を越えることはないので点 x からの距離が，

$$|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| > c|t' - t|$$

の距離にある点 x' での場 $\varphi(x')$ は $\varphi(x)$ の測定により影響をうけない (6-9 図)．

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = 0, \quad |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| > c|t' - t|. \tag{6.100}$$



6-9 図　交換関係と光円錐

P$(\boldsymbol{r}, t)$ 点を通る $|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| = c|t' - t|$ で表わされる円錐は **光円錐** といわれ，P 点を通る光の通過する点 $(\boldsymbol{r}', t')$ はこの光円錐上にある．光円錐の外側の点は $|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| > c|t' - t|$ をみたし，(6.100) より P 点における場 φ(P) と光円錐外の一点 Q$(\boldsymbol{r}', t)$ における場 φ(Q) は独立である．また逆に光円錐内の一点 R$(\boldsymbol{r}', t')$ における場 φ(R) は一般に φ(P) とは独立でなく，P 点で放出（または吸収される）粒子は R を通ることができる (6-9 図)．したがって，

$$[\varphi(x), \varphi(x')] \neq 0 \qquad |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| < c|t' - t|.$$

2点 x, x' が，それぞれの光円錐の内側にある場合，2点は時間的に離れており，光円錐の外側にあるとき空間的に離れている． 空間的に離れた2点における場は (6.100) により独立で互に交換する．

特に，(6.100) より同時刻における異なる2点 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$ での場は互に独立なはずである．$\varphi(x)$ を展開したとき，

$$\varphi(x) = \hbar c \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2EL^3}} \left\{ c(\boldsymbol{p}) \exp \frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr} - Et) + c^\dagger(\boldsymbol{p}) \exp - \frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr} - Et) \right\}.$$

2点 $(0,0)$, $(\boldsymbol{r},0)$ の場の間の交換関係が 0 になるために $c^\dagger(\boldsymbol{p})$, $c(\boldsymbol{p}')$ の間にみたされるべき関係を調べてみる．

$$[\varphi(\boldsymbol{r},0),\ \varphi(0)]=\frac{(\hbar c)^2}{L^3}\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{\boldsymbol{p}'}\frac{1}{2\sqrt{EE'}}\Big\{([c^\dagger(\boldsymbol{p}),\ c^\dagger(\boldsymbol{p}')]+[c^\dagger(\boldsymbol{p}),\ c(\boldsymbol{p}')])\exp-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{pr}$$

$$+([c(\boldsymbol{p}),\ c^\dagger(\boldsymbol{p}')]+[c(\boldsymbol{p}),\ c(\boldsymbol{p}')])\exp\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{pr}\Big\}.$$

右辺をいろいろと異なる作用をする演算子に分けて書くと，$(\hbar c)^2L^{-3}(2\sqrt{EE'})^{-1}$ を別にして，

粒子 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'$ を作る部分 $[c^\dagger(\boldsymbol{p}),\ c^\dagger(\boldsymbol{p}')]\left(\exp-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{pr}-\exp-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}\right)$,

粒子 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'$ を吸収する部分 $[c(\boldsymbol{p}),\ c(\boldsymbol{p}')]\left(\exp\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{pr}-\exp\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}\right)$,

粒子 $\boldsymbol{p}$ を作り $\boldsymbol{p}'$ を吸収する部分 $(\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{p}')$ $[c^\dagger(\boldsymbol{p}),\ c(\boldsymbol{p}')]\left(\exp-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{pr}-\exp\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}\right)$.

右辺全体が $\boldsymbol{r}=0$ 以外の $\boldsymbol{r}$ のすべての値に対し 0 になるためには，これら異なる作用をする演算子はすべてそれぞれ 0 でなければならないから，任意の $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'$ の組に対し，もし $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{p}'$ であれば，

$$[c^\dagger(\boldsymbol{p}),\ c(\boldsymbol{p}')]=[c(\boldsymbol{p}),\ c(\boldsymbol{p}')]=[c^\dagger(\boldsymbol{p}),\ c^\dagger(\boldsymbol{p}')]=0.\qquad \boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{p}'$$

これと $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}'$ に対する (6.79) とをまとめて書くと次の交換関係をうる.

$$[c(\boldsymbol{p}),\ c^\dagger(\boldsymbol{p}')]=\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'},\ [c(\boldsymbol{p}),\ c(\boldsymbol{p}')]=[c^\dagger(\boldsymbol{p}),\ c^\dagger(\boldsymbol{p}')]=0. \tag{6.101}$$

この交換関係を使うと，同時刻での 2 点 $\boldsymbol{r}$, 0 での場 $\varphi(\boldsymbol{r},0)$, $\varphi(0)$ の間の交換関係は (6.101) より，

$$[\varphi(\boldsymbol{r},0),\ \varphi(0)]=\frac{(\hbar c)^2}{L^3}\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{2E}\Big\{\exp\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{pr}-\exp\frac{-i}{\hbar}\boldsymbol{pr}\Big\}=0$$

となり，$\varphi(\boldsymbol{r},0)$ と $\varphi(0)$ は可換で相互に独立な量になる.

一般に異なる時刻での 2 点 $x(\boldsymbol{r},t)$ と 0 における場の交換関係は (6.101) を使うと，

$$[\varphi(x),\ \varphi(0)]=\frac{(\hbar c)^2}{L^3}\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{2E}\Big\{\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)-\exp\frac{-i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)\Big\}\equiv-i\hbar c\Delta(x). \tag{6.102}$$

この $\Delta(x)$ という関数を**不変デルタ関数**という.

この関数を解析的に求めることができる. 上式の exp の和を別々に計算することにして，

$$\Delta(x)=U(\boldsymbol{r},t)-U(-\boldsymbol{r},-t)$$

とおく. $\boldsymbol{p}$ についての和を $\sum_{\boldsymbol{p}}\to(L/h)^3\int d\boldsymbol{p}$ のおきかえ (2.44) によって積分になおすと，

$$U(r,t)=\frac{ic}{2(2\pi)^3\hbar^2}\int\frac{d^3p}{E}\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)$$
$$=\frac{ic}{8\pi^2\hbar^2}\int_0^\infty\frac{p^2dp}{E}\int_0^\pi\sin\theta d\theta\exp\frac{i}{\hbar}(pr\cos\theta-Et)$$
$$=\frac{c}{8\pi^2\hbar r}\int_{-\infty}^\infty\frac{pdp}{E}\exp\frac{i}{\hbar}(pr-Et)=\frac{1}{8\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}V(r,t).$$

ただし，

$$V(r,\ t)=\frac{-ic}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{dp}{E}\exp\frac{i}{\hbar}(pr-Et)$$

である．$E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$ であるから，

$$p=mc\sinh\chi,\qquad E=mc^2\cosh\chi$$

として，変数 χ を用いると，

$$V(r,\ t)=\frac{-i}{\pi}\int_{-\infty}^\infty d\chi\exp i\frac{mc}{\hbar}(r\sinh\chi-ct\cosh\chi).$$

この積分は第三種 Bessel 関数（Hankel 関数）で表わすことができる．

$$V(r,\ t)=\begin{cases}-H_0^{(2)}\left\{\dfrac{mc}{\hbar}\sqrt{c^2t^2-r^2}\right\} & ct>r\\ H_0^{(1)}\left\{i\dfrac{mc}{\hbar}\sqrt{r^2-c^2t^2}\right\} & r>c|t|\\ H_0^{(1)}\left\{\dfrac{mc}{\hbar}\sqrt{c^2t^2-r^2}\right\} & -r>ct.\end{cases}$$

V は $r=|\boldsymbol{r}|$ と t の関数で r については偶関数である．これから，

$$\Delta(x)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}F(r,\ t),$$

$$F(r,t)=\begin{cases}J_0\left(\dfrac{mc}{\hbar}\sqrt{c^2t^2-r^2}\right), & ct>r,\\ 0, & r>c|t|,\\ -J_0\left(\dfrac{mc}{\hbar}\sqrt{c^2t^2-r^2}\right). & -r>ct.\end{cases}\qquad(6.103)$$

ここで，$H_0^{(1)}+H_0^{(2)}=2J_0$ の関係を使った．

(6.103) でみられるように (6.102) の交換関係は光円錐の外では 0 で，内側だけで 0 でない値を持っている．不変デルタ関数は光円錐に沿って不連続である（外側が 0 で，光円錐で急に ∞ となる）．特に粒子の質量 m が 0 のときは計算は簡単である．このときは $E=cp$ であるから U の計算で，

$$U(r,\ t)=\frac{1}{8\pi^2\hbar r}\int_{-\infty}^\infty dp\exp\frac{i}{\hbar}(r-ct)p=\frac{1}{4\pi r}\delta(r-ct).$$

したがって，$m=0$ のときの $\Delta(x)$ を $D(x)$ と書くならば，

$$D(x)=\frac{1}{4\pi r}\{\delta(r-ct)-\delta(r+ct)\}.\qquad(6.103')$$

この式も光円錐の外は0になっている．さらに光円錐の内でも0になっているが，これは質量が0の場合の特殊事情で，すべての粒子が光速度で運動するためである．

中性スピン0粒子の場合の交換関係を論じたが，まったく同様に，ある Bose 粒子の場に対して空間的に離れた2点での場が独立とすると，その粒子の生成・吸収の演算子 $a^\dagger_\sigma$, a_σ に対し，

$$[a_\sigma,\ a_{\sigma'}{}^\dagger]=\delta_{\sigma,\sigma'},\ \ [a_\sigma{}^\dagger,\ a_{\sigma'}{}^\dagger]=[a_\sigma, a_{\sigma'}]=0 \tag{6.104}$$

が成り立つ．σ は粒子の運動量・ヘリシティ等を決める変数である．さらに異なる粒子の場も空間的に離れた2点では独立であることを考えると，それぞれの場を $A(x)$, $B(x')$ と書き，その粒子の生成・吸収の演算子を $a_\sigma{}^\dagger$, a_σ; $b_\sigma{}^\dagger$, b_σ と書くと，

$$[A(x),\ B(x')]=0, \qquad c|t-t'|<|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \tag{6.105}$$

であり，また a, $a^\dagger$ と $b, b^\dagger$ は相互に可換である．

再び中性スピン0粒子の場合に戻り，この粒子の集まりからなる系を考えよう．$|0>$ を真空状態とすると，

$$c^\dagger(\boldsymbol{p})|0>, \qquad c^\dagger(\boldsymbol{p}_1)c^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0>, \cdots$$

は，それぞれ粒子が1個，2個，… ある状態に対応する．一般に粒子数は一定でないので，系はこれら粒子数の異なる状態の集まったもので，系の真空状態，粒子 $\boldsymbol{p}$ が1個存在する状態等々の振幅を ψ_0, $\psi_1(\boldsymbol{p})$, $\psi_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ 等々と書こう．系の状態 Ψ は，

$$\begin{aligned}\Psi=\psi_0|0>+\sum_{\boldsymbol{p}}\psi_1(\boldsymbol{p})c^\dagger(\boldsymbol{p})|0>+\frac{1}{\sqrt{2!}}\sum_{\boldsymbol{p}_1}\sum_{\boldsymbol{p}_2}\psi_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)c^\dagger(\boldsymbol{p}_1)c^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0>+\cdots\\ +\frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n}\psi_n(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n)c^\dagger(\boldsymbol{p}_1)c^\dagger(\boldsymbol{p}_2)\cdots c^\dagger(\boldsymbol{p}_n)|0>+\cdots\end{aligned} \tag{6.106}$$

となる．$\dfrac{1}{\sqrt{n!}}$ は後にわかるように波動関数の規格化のためにつけておく（(6.108) 参照)．

粒子 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ の存在する振幅は $c^\dagger(\boldsymbol{p}_1)c^\dagger(\boldsymbol{p}_2)=c^\dagger(\boldsymbol{p}_2)c^\dagger(\boldsymbol{p}_1)$ より，

$$\frac{1}{\sqrt{2!}}\{\psi_2(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2)+\psi_2(\boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_1)\}$$

となり，2個の粒子の交換 $\boldsymbol{p}_1 \rightleftarrows \boldsymbol{p}_2$ に対して対称である．同様に粒子 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ が存在する状態の振幅は，

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{\text{Perm}}\psi_n(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n)$$

で，和は $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ の n 個を任意の順にならべるすべての順列（permutation）についての和で $n!$ 個の項がある．この式より明らかなように任意の2個の $\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j$ 交換に対してこの振幅は対称である．

このように，$c^\dagger, c$ の間の交換関係は多粒子系の波動関数の対称性，すなわち Bose 統計に導くことがわかる．

したがって初めから $\psi_n(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$ を $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ につき対称にとっておくことにすると，たとえば2個の粒子のみが見出される全確率 P_2 は，

$$P_2=\int d\boldsymbol{p}_1\int d\boldsymbol{p}_2\left|\frac{1}{\sqrt{2!}}(\psi_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)+\psi_2(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1))\right|^2=2!\int d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2|\psi_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)|^2.$$

ただし $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ についての積分は，それぞれを全運動量空間について行なうと二重に確率が計算されるので，もし全空間についての積分と考えるときは全体を 2! で割っておく必要がある．

$$P_2=d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2|\psi_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)|^2.$$

同様にして，

$$P_n=d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2\cdots d\boldsymbol{p}_n|\psi_n(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)|^2. \tag{6.107}$$

また，任意の状態に見出される確率の和は1でなければならないから，

$$1=\sum_n P_n=|\psi_0|^2+\int d\boldsymbol{p}|\psi_1(\boldsymbol{p})|^2+\int\int d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2|\psi_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)|^2+\cdots \tag{6.108}$$

が得られる．

多粒子系の波動関数 (6.106) を次のように表わすのを **Fock の表示** という．

$$\Psi=\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1(\boldsymbol{p})\\ \psi_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)\\ \vdots\end{pmatrix}. \tag{6.109}$$

この表示における真空状態 Ψ_{vac} は，

$$\Psi_{\mathrm{vac}}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{6.110}$$

であり，$\Psi, \Psi_{\mathrm{vac}}$ を用い，$\psi_n(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$ は (6.106) より次のようにまとまる．

$$\psi_n(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\Psi_{\mathrm{vac}}, c(\boldsymbol{p}_1)c(\boldsymbol{p}_2)\cdots c(\boldsymbol{p}_n)\Psi). \tag{6.111}$$

c が互に可換であることから，この $\psi_n(\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$ は変数 $\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j$ のおきかえに対し対称であることがわかる．

〔問題 6.9〕 真空中で，異なる2点 x, x' における電場 $\boldsymbol{E}$・磁場 $\boldsymbol{H}$ の間の次の交換関係を求めよ．

$$[\boldsymbol{E}(x), \boldsymbol{E}(x')],\quad [\boldsymbol{E}(x), \boldsymbol{H}(x')],\quad [\boldsymbol{H}(x), \boldsymbol{H}(x')].$$

特に x, x' の2点が空間的に離れているとき，これらは0になることを示せ.

§ 6.6 空間反転・時間反転・粒子反粒子反転

第4章で量子力学における空間反転と時間反転を論じたが．ここでは量子化されたBose粒子の場が空間反転，時間反転に対しどのように変換するかを調べよう．

[空間反転]

座標の空間反転 $\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r}$ に対して，古典物理学および量子力学においては $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{M}$ 等は

$$\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p},\qquad \boldsymbol{M}\to\boldsymbol{M},\qquad \boldsymbol{S}\to\boldsymbol{S},\qquad h\to-h \tag{6.112}$$

のように変る．$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{S}, h$ は粒子の運動量・軌動角運動量・スピン・ヘリシティである．量子化された場の変換が正しく古典的な変換に対応するためには，場が記述する素粒子の $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{S}, h$ も (6.112) にしたがって変換しなければならない．

まず荷電スピン0粒子を考えよう．$a^\dagger, a$ を粒子の生成・吸収の演算子，$b^\dagger, b$ を反粒子のそれと考えると空間反転により次のように変換しなければならない．

$$\begin{aligned} &a^\dagger(\boldsymbol{p})\to\eta_p{}^*a^\dagger(-\boldsymbol{p}), \qquad b^\dagger(\boldsymbol{p})\to\eta_p b^\dagger(-\boldsymbol{p}).\\ &a(\boldsymbol{p})\to\eta_p a(-\boldsymbol{p}), \qquad b(\boldsymbol{p})\to\eta_p{}^*b(-\boldsymbol{p}). \end{aligned} \tag{6.113}$$

$a^\dagger(\boldsymbol{p})$ はある状態 i を運動量 $\boldsymbol{p}$ の粒子を1個だけ余分に含む状態 j に移すが．状態 i, j の位相を変えると $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ の位相は変ってくる．したがって空間反転したとき任意の位相 $\eta_p{}^*(|\eta_p|=1)$ が入ってくる．p は空間反転を意味する指標である．$a(\boldsymbol{p})$ に対する位相は a と $a^\dagger$ がエルミット共役のことより（すなわち $a(\boldsymbol{p})$ が $j\to i$ の遷移にあたることより）$a^\dagger(\boldsymbol{p})$ に対する位相の符号を変えたもので η_p がかかる．この位相の任意性は $\varphi(x)$ の位相に任意性があり，空間反転に対して η_p の余分の因子がかかるとすると，(6.86) より $a, b^\dagger$ に対し共通で，また $a^\dagger, b$ に対しては $\eta_p{}^*$ がかかる．

(6.113) を (6.86), (6.87) に代入すると空間反転に対し，

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)\to\eta_p\varphi(-\boldsymbol{r},t),\qquad \varphi^\dagger(\boldsymbol{r},t)\to\eta_p{}^*\varphi^\dagger(-\boldsymbol{r},t). \tag{6.114}$$

特に中性粒子の場合には粒子と反粒子とは同一の粒子であるから $a=b,\ a^\dagger=b^\dagger$ で，これより $\eta_p=\eta^*{}_p$，したがって η_p は実数で，

$$\eta_p=\pm1. \tag{6.115}$$

η_p は粒子のパリティを表わし，$\eta_p=1$ の粒子を**スカラー**，$\eta_p=-1$ の粒子を**擬スカラー**という．π^0 は擬スカラーのことが知られている (§ 10.1 参照).

荷電粒子，あるいは一般に粒子と反粒子とが異なる粒子については η_p は実数である必要はないので，自由な粒子の場 $\varphi(x), \varphi^\dagger(x)$ を論じている限り η_p は任意で（ただし $|\eta_p|$

＝1)，その粒子のパリティはわからない．また中性粒子が正負（$\eta_p=\pm 1$）いずれのパリティを持つかも決定できない．これらを決めるには粒子間の相互作用を考えなければならない．(第10章以下でこの問題について論ずる)．

次に電磁場 $A_\mu(x)$ の空間反転を調べよう．(6.112) からスピン0の中性粒子の場合と同様に，

$$a(\boldsymbol{k}, h)\to\eta_p a(-\boldsymbol{k}, -h), \qquad a^\dagger(\boldsymbol{k}, h)\to\eta_p a^\dagger(-\boldsymbol{k}, -h). \tag{6.116}$$

A_μ がエルミット量であることより η_p は実数で $\eta_p=\pm 1$ のいずれかである．いま $\boldsymbol{k}/\!/z$ ととると偏りのベクトル $\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k}, \pm 1)$ は (6.40) で与えられる．展開 (6.43) で初め $a(\boldsymbol{k}, h)$ の係数は $\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k}, h)$ に比例するが，空間反転後の $a(\boldsymbol{k}, h)$ の係数はもとの $a(-\boldsymbol{k}, -h)$ の係数 $\varepsilon_\mu(-\boldsymbol{k}, -h)$ に比例する．$\varepsilon_\mu(-\boldsymbol{k}, -h)$ は $\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k}, h)$ を空間反転して得られるものであるから，ε_μ が $\boldsymbol{r}$, ct のように変換するベクトルとすると，

$$\varepsilon_\mu(-\boldsymbol{k}, -h)=\begin{cases}-\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k}, h) & \mu=1, 2, 3\\ +\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k}, h) & \mu=0.\end{cases} \tag{6.117}$$

(6.116) を (6.43) に代入して (6.117) を使うと，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\to-\eta_p\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{r}, t), \qquad A_0(\boldsymbol{r}, t)\to+\eta_p A_0(-\boldsymbol{r}, t). \tag{6.118}$$

$\eta_p=\pm 1$ で $\eta_p=+1$ のとき A はベクトル，$\eta_p=-1$ のときは A は疑ベクトルという．光子は古典電磁気学との対応からベクトル場 A_μ で表わされると考えられる（第8章を見よ)．

[時間反転]

時間反転 $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}$, $t\to-t$ に対し，いろいろな物理量は古典物理学においては次のように変換する．

$$\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{M}\to-\boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{S}\to-\boldsymbol{S}, \quad h\to h. \tag{6.119}$$

したがって，量子化された場もこれに対応する変換をしなければならない．特に第4章で時間反転した世界での運動法則が元の世界のそれと同一であるためには，量子力学における波動関数 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ は単に t が $-t$ に変わるだけでなく，$\psi^*(\boldsymbol{r}, -t)$ になることを示した．したがって，場の諸量 a, $a^\dagger$ 等は同様にそのエルミット共役量に移ることが考えられる．

まず荷電スカラー粒子を考えよう．$a(\boldsymbol{p})$, $b(\boldsymbol{p})$ はそれぞれ $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$ に変るだけでなく，そのエルミット量に移るとすると，

$$\begin{aligned}&a(\boldsymbol{p})\to\eta_T a^\dagger(-\boldsymbol{p}), \qquad a^\dagger(\boldsymbol{p})\to\eta_T^* a(-\boldsymbol{p}),\\ &b(\boldsymbol{p})\to\eta_T^* b^\dagger(-\boldsymbol{p}), \qquad b^\dagger(\boldsymbol{p})\to\eta_T b(-\boldsymbol{p})\end{aligned} \tag{6.120}$$

となる.

η_T は η_p と同様 $|\eta_T|=1$ で位相因子であり一般には決まらないが，場が中性粒子を表わし，粒子と反粒子が等しいときは $\eta_T=\pm 1$ のいずれかである．さて (6.120) を φ, $\varphi^\dagger$ の展開式に代入すると，

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) \to \eta_T \varphi^\dagger(\boldsymbol{r}, -t), \qquad \varphi^\dagger(\boldsymbol{r}, t) \to \eta_T^* \varphi(\boldsymbol{r}, -t) \tag{6.121}$$

となる.

ある演算子 a, b 等が時間反転によりそのエルミット共役量に移ると考えるのは，量子力学の波動関数 ψ がその複素共役量に移るということを拡張したものであるが，その物理的意味をはっきりさせるために次の問題を考えよう．いま粒子 $\boldsymbol{p}$・反粒子 $\boldsymbol{q}$ が衝突して粒子 $\boldsymbol{p}'$・反粒子 $\boldsymbol{q}'$ に移る散乱現象を考え，この散乱が時間的に粒子 $\boldsymbol{p}$ の吸収・反粒子 $\boldsymbol{q}$ の吸収・粒子 $\boldsymbol{p}'$ の生成・反粒子 $\boldsymbol{q}'$ の生成という順序で行なわれたとしよう．このような衝突を起こす演算子 A は，

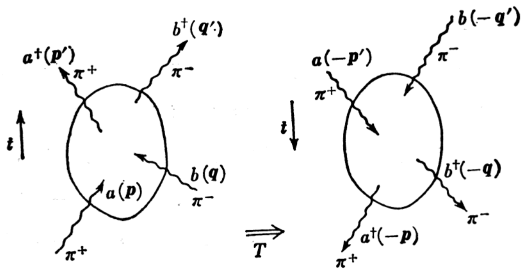
$$A = b^\dagger(\boldsymbol{q}')a^\dagger(\boldsymbol{p}')b(\boldsymbol{q})a(\boldsymbol{p})$$

である.

時間反転した世界での同じ演算子は，これらの運動量の符号を変えるだけでなくAのエルミット共役をとるとすると次の A' となる (η_T は $\eta_T^*\eta_T=1$ より現われない).

$$A \to A' = a^\dagger(-\boldsymbol{p})b^\dagger(-\boldsymbol{q})a(-\boldsymbol{p}')b(-\boldsymbol{q}').$$

すなわち個々の演算子がそのエルミット量に変るだけでなく，それらの積の順序が入れ変る．この A' は反粒子 $-\boldsymbol{q}'$ の吸収，粒子 $-\boldsymbol{p}'$ の吸収，反粒子 $-\boldsymbol{q}$ の生成，粒子 $-\boldsymbol{p}$ の生成の順に衝突を行なわせる演算子で，6-10図より明らかなように，ある粒子の生成（吸収）を運動量の符号の異なる同一粒子の吸収（生成）でおきかえ，かつ時間の向きを逆転して眺めることに相当し，われわれの古典的な時間反転の image とよく合っている．そこで量子化された場は時間反転に対して，それぞれが (6.120) のように変換するだけでなく，いくつかの量の積はその積の順序が入れ変るものとしよう．素粒子世界の物理法則



6-10 図　時間反転

$\pi^+(\boldsymbol{p}) + \pi^-(\boldsymbol{q}) \to \pi^+(\boldsymbol{p}') + \pi^-(\boldsymbol{q}')$

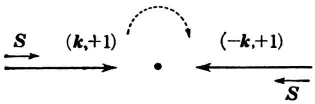
$\pi^+(-\boldsymbol{p}) + \pi^-(-\boldsymbol{q}) \leftarrow \pi^+(-\boldsymbol{p}') + \pi^-(-\boldsymbol{q}')$

がこの時間反転に対して不変であるかどうかは実験に頼らなければならないが，今日知られている限り時間反転に対する不変性が成り立っている．

次に電磁場の時間反転を考えよう．スカラー粒子の場合と同様に古典論との対応から，

$$a(\boldsymbol{k},\ h)\rightarrow\eta_T a^\dagger(-\boldsymbol{k},\ h),\qquad a^\dagger(\boldsymbol{k},\ h)\rightarrow\eta_T a(-\boldsymbol{k},\ h). \tag{6.122}$$

したがって，(6.43) にこの変換を行なうと変換後の $a(\boldsymbol{k},\ h)$ にかかる ε_μ は，もとの $a^\dagger(-\boldsymbol{k},\ h)$ にかかっていた $\varepsilon_\mu^*(-\boldsymbol{k},\ h)$ である．$(-\boldsymbol{k},\ h)$ という光子は $(\boldsymbol{k},\ h)$ の状態を $\boldsymbol{k}$ に垂直な軸，たとえば $\boldsymbol{k}$ を z 軸にとったとき，y 軸のまわりに 180° 回転して得られる（6-11 図）．このように $\boldsymbol{k}$ と $-\boldsymbol{k}$ の ε_μ をえらぶならば，(6.40) により，



6-11 図

$$\varepsilon_\mu^*(-\boldsymbol{k},\ h)=-\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\ h)\qquad \mu=1,\ 2.$$

これは $\boldsymbol{k}$ 方向に z 軸をとった特殊な座標系での式だが，一般の系で書くなら，$\boldsymbol{k}\rightarrow-\boldsymbol{k}$ の回転は3次元空間の角度 π の回転であるから，時間成分 ε_0 は不変で，

$$\varepsilon_\mu^*(-\boldsymbol{k},\ h)=\begin{cases}-\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\ h), & \mu=1,\ 2,\ 3.\\ +\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\ h), & \mu=0.\end{cases} \tag{6.123}$$

これらの関係から，時間反転により，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)\rightarrow-\eta_T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ -t),\qquad A_0(\boldsymbol{r},\ t)\rightarrow+\eta_T A_0(\boldsymbol{r},\ -t) \tag{6.124}$$

と変換される．ベクトル $\boldsymbol{r}$, ct は時間反転により時間成分が符号を変えるのだが，電磁場のベクトルポテンシャルは $\eta_T=1$ ととると空間成分が符号を変えることに注意しよう．

［粒子・反粒子反転］

古典物理学では，粒子に対する反粒子という概念はなかったので，粒子・反粒子の世界を反転するという概念は場の理論に固有のものである．そこで，文字通り粒子と反粒子を交換する変換と考えよう．荷電スピン0粒子の場合には，

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{p})&\rightarrow\eta_C b(\boldsymbol{p}), & a^\dagger(\boldsymbol{p})&\rightarrow\eta_C^* b^\dagger(\boldsymbol{p}).\\ b(\boldsymbol{p})&\rightarrow\eta_C^* a(\boldsymbol{p}), & b^\dagger(\boldsymbol{p})&\rightarrow\eta_C a^\dagger(\boldsymbol{p}).\end{aligned} \tag{6.125}$$

この変換を $\varphi(x)$, $\varphi^\dagger(x)$ に行なうと (6.86), (6.87) より明らかなように，

$$\varphi(x)\rightarrow\eta_C\varphi^\dagger(x),\quad \varphi^\dagger(x)\rightarrow\eta_C^*\varphi(x). \tag{6.126}$$

η_C は位相因子で $|\eta_C|=1$, c は**荷電反転** (charge conjugation) を意味する指標である．特に粒子がそれ自身の反粒子である π^0 のような場合には，$\eta_C=\pm1$ のいずれかである．π^+ と π^- 中間子の弾性衝突につき，粒子・反粒子反転したときのようすを 6-12 図に示してある．

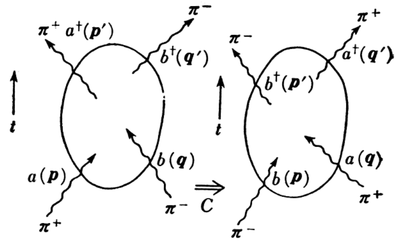
同様に電磁場に対する粒子・反粒子反転は，

$$a(\boldsymbol{k},\ h)\to\eta_c a(\boldsymbol{k},\ h),\qquad a^\dagger(\boldsymbol{k},\ h)\to\eta_c a^\dagger(\boldsymbol{k},\ h).\qquad(6.127)$$

$\eta_c=\pm 1$ のいずれかである．したがって

$$A_\mu(x)\to\eta_c A_\mu(x).\qquad(6.128)$$

中性粒子に対する η_c の値は粒子間の相互作用を調べることにより決定される．π^0 に対しては $\eta_c=+1$ であり，光子では $\eta_c=-1$ である．



6－12 図　粒子・反粒子反転

$\pi^+(\boldsymbol{p})+\pi^-(\boldsymbol{q})\to\pi^+(\boldsymbol{p}')+\pi^-(\boldsymbol{q}')$

$\pi^-(\boldsymbol{p})+\pi^+(\boldsymbol{q})\to\pi^-(\boldsymbol{p}')+\pi^+(\boldsymbol{q}')$

一般に何個かの荷電粒子および中性粒子の集まりからできている系があるときもしその系の全荷電が 0 でなければ，粒子・反粒子反転した後の状態は全荷電の符号が反転前と異なる状態になる．したがって荷電を持った系（一般に粒子数とその反粒子数の異なる系）はこの反転の固有状態にはなれない．一方，全荷電が 0 の系は反転に対する固有状態になることができる．

一例として，π^+ と π^- 中間子の 2 個からなる系の粒子・反粒子反転を論じよう．もし系の重心に固定した座標系をとると π^+ と π^- の運動量は同じ大きさ異符号で，一般にその波動関数は次のように書ける．

$$\sum_{\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p})b^\dagger(-\boldsymbol{p})|0>.\qquad(6.129)$$

これに反転 C を行なうと，(6.125) より新しい状態は，

$$\sum_{\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{p})(\eta_c{}^*b^\dagger(\boldsymbol{p}))(\eta_c a^\dagger(-\boldsymbol{p}))|0>=\sum_{\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{p})a^\dagger(-\boldsymbol{p})b^\dagger(\boldsymbol{p})|0>.$$

ここで $|\eta_c|^2=1$，$[b^\dagger(\boldsymbol{p}),\ a^\dagger(-\boldsymbol{p})]=0$ を使った．したがって，

$$f(\boldsymbol{p})=f(-\boldsymbol{p})\ \text{のとき}\ C=+1,$$

$$f(\boldsymbol{p})=-f(-\boldsymbol{p})\ \text{のとき}\ C=-1$$

となる．π^+, π^- が共通の重心のまわりに回転していると考えると，その軌道角運動量が $l=0,\ 2,\ 4,\ \cdots$ または $l=1,\ 3,\ 5,\ \cdots$ のいずれかに応じて $f(\boldsymbol{p})=f(-\boldsymbol{p})$ または $f(\boldsymbol{p})=-f(-\boldsymbol{p})$ であるから $l=$ 偶数の状態は $C=+1$，$l=$ 奇数の状態は $C=-1$ である．

［問題 6.10］ ある中性スピン 0 粒子 A^0 が別の中性スピン 0 粒子 B^0 2 個に崩壊する場合，その崩壊を起こす力が空間反転に対し不変な力のときは A^0 はスカラー粒子であることを示せ

$$A^0 \to B^0 + B^0.$$

［問題 6.11］ π^0 中間子は2個の光子に崩壊する（$\pi^0 \to \gamma + \gamma$）．これより π^0 のスピンは1でないことを示せ．

［解］ § 10.1 を見よ．

第7章　Fermi 粒子

§7.1　スピン 1/2 粒子の Dirac 方程式

電子・陽子・中性子など今日知られている基本的な Fermi 粒子（スピン半整数の粒子）はすべてスピン $\frac{1}{2}$ の大きさを持っている．ここではこれらスピン $\frac{1}{2}$ 粒子の内部状態を表わす波動関数のようすを調べ，特に空間回転，Lorentz 変換などに対するその変換のようすを調べよう．第3章で議論したように，運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー E で自由に運動しているスピン $\frac{1}{2}$ 粒子の状態 ψ は次のように書ける（(3.30) 参照）．

$$\psi = u \exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr} - Et). \tag{7.1}$$

u はスピン状態を表わす2行1列の行列で，

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{7.2}$$

a はスピンが上向き，b はスピンが下向きの状態の振幅である．この2行1列の行列を**スピノル**とよぶ．

3次元空間の中のある軸 $\boldsymbol{n}$（$\boldsymbol{n}$ はその方向の単位長さのベクトル）のまわりに角度 θ（ラジアン）だけ座標系を回転すると，一般に波動関数 ψ は左から $\exp(i\theta\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{n}/\hbar)$ をかけたものに変る．$\boldsymbol{M}$ は軌道角運動量である（(3.5) 参照）．スピノル u の場合もスピン角運動量 $\boldsymbol{S}\left(=\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)$ を用いて同様に書ける (3.25)．すなわち回転後の状態 u' は，

$$u' = \exp(i\theta\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}/\hbar)u = \exp\left(\frac{i}{2}\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\right)u. \tag{7.3}$$

したがって，u のエルミット共役量 $u^\dagger$ は同じ回転に対して，

$$u^{\dagger\prime} = u^\dagger \exp\left(-\frac{i}{2}\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\right) \tag{7.4}$$

のように変換する．$u^\dagger$ は1行2列のスピノル (a^*, b^*) である．

このようなスピノルの変換は，スピン $\boldsymbol{S}$ が軌道角運動量 $\boldsymbol{M}$ と同じ交換関係をみたし，$\boldsymbol{M}$ が $\boldsymbol{r}$ 空間の回転の演算子であると同様に，$\boldsymbol{S}$ はスピン空間の回転の演算子になることを意味している．実際そうであることを確かめるには，スピン空間で定義された諸量が (7.3)，(7.4) で決められた空間回転に対しどう変化するかを調べればよい．いま座標系

を z 軸のまわりに角度 θ 回転してみよう（$\boldsymbol{n}/\!/z$）．$\sigma_z{}^2=1$ を用いると，次式が得られる．

$$\exp\left(\pm i\frac{\theta}{2}\sigma_z\right)=\cos\frac{\theta}{2}\pm i\sigma_z\sin\frac{\theta}{2}.$$

したがって，$u^\dagger\boldsymbol{\sigma}u$ は次のように変換する．

$$\begin{aligned}(u^\dagger\sigma_x u)'&=u^\dagger\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sigma_z\sin\frac{\theta}{2}\right)\sigma_x\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sigma_z\sin\frac{\theta}{2}\right)u\\&=u^\dagger\sigma_x\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sigma_z\sin\frac{\theta}{2}\right)^2u=u^\dagger\sigma_x(\cos\theta+i\sigma_z\sin\theta)u\\&=\cos\theta(u^\dagger\sigma_x u)+\sin\theta(u^\dagger\sigma_y u).\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}$ の間の関係式（3.29）を用いた．同様に，

$$(u^\dagger\sigma_y u)'=-\sin\theta(u^\dagger\sigma_x u)+\cos\theta(u^\dagger\sigma_y u),\quad(u^\dagger\sigma_z u)'=(u^\dagger\sigma_z u).$$

(3.2) と比較すると $u^\dagger\boldsymbol{\sigma}u$ は回転に対して 3 次元ベクトル $\boldsymbol{r}$ と同様に変換するベクトルで（7.3)，（7.4）の変換は確かにこのベクトルの角度 $-\theta$ の回転，座標系の角度 θ の回転になっている．

また $u^\dagger u$ は空間回転に対してスカラー量である．

$$(u^\dagger u)'=u^\dagger\exp\left(-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}\right)\exp\left(i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}\right)u=u^\dagger u.$$

次に Lorentz 変換によるスピノル u の変換を考えよう．§ 6.1 の議論から $\boldsymbol{n}$ 方向に速度 v で走っている新しい Lorentz 系への座標変換により u は次のように変るとすると

$$u\to u'=\exp\left(i\frac{\omega}{2\hbar}\boldsymbol{n}\boldsymbol{N}\right)u. \tag{7.5}$$

ω は（6.16）で与えられ（$\omega=\log(1-v/c)/(1+v/c)$），$\boldsymbol{N}$ はスピン空間での演算子で交換関係（6.19）とスピン空間での角運動量が $\boldsymbol{S}$ であることから，

$$\begin{aligned}&[N_x,\ S_x]=[N_y,\ S_y]=[N_z,\ S_z]=0,\\&[N_x,\ S_y]=-[N_y,\ S_x]=i\hbar N_z,\ \cdots,\\&[N_x,N_y]=-i\hbar S_z,\cdots\end{aligned} \tag{7.6}$$

をみたす．

一般に 2 行 1 列のスピノル u を別のスピノル u' に移す演算子は 2 行 2 列の行列で書ける．この行列は 4 個の行列要素を持ち，適当に次の四つの係数 a,b,c,d をえらべば四つの行列 $1,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ の和として書ける（(4.46) 参照)．

$$a1+b\sigma_x+c\sigma_y+d\sigma_z.$$

$\boldsymbol{N}$をこのように書き，さらに条件 (7.6) および $\boldsymbol{S}=\dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ を使うと簡単に $\boldsymbol{N}$ が求まる (問題 7.1 参照).

$$\boldsymbol{N}=\mp i\boldsymbol{S}=\mp i\hbar\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}. \tag{7.7}$$

二つの解 $\boldsymbol{N}=\mp i\boldsymbol{S}$ が存在し，どちらも条件 (7.6) をみたしている.

この $\boldsymbol{N}$ を用いると，スピノル u は $\boldsymbol{n}$ 方向への速度 v の Lorentz 変換に対し,

$$u\rightarrow\exp\left(\frac{i\omega}{2\hbar}N_{\boldsymbol{n}}\right)u=\exp\left(\pm\frac{\omega}{4}\sigma_{\boldsymbol{n}}\right)u$$

のように変換する. $N_{\boldsymbol{n}}$, $\sigma_{\boldsymbol{n}}$ は $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{\sigma}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向の成分である. 今後上式の正符号で変換するスピノルを u, 負符号で変換するスピノルを v と書こう.

$$\begin{aligned}&u\rightarrow\exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_{\boldsymbol{n}}\right)u,\quad u^{\dagger}\rightarrow u^{\dagger}\exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_{\boldsymbol{n}}\right),\\&v\rightarrow\exp\left(-\frac{\omega}{4}\sigma_{\boldsymbol{n}}\right)v,\quad v^{\dagger}\rightarrow v^{\dagger}\exp\left(-\frac{\omega}{4}\sigma_{\boldsymbol{n}}\right).\end{aligned} \tag{7.8}$$

u, v は空間回転に対しては共に (7.3), (7.4) で変換するが, Lorentz 変換に対する変換性が異なる. 次に u, v から作られる諸量の変換性を調べよう.

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{\omega}{2}\sigma_{\boldsymbol{n}}\right)&=1+\frac{\omega}{2}\sigma_{\boldsymbol{n}}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2}\sigma_{\boldsymbol{n}}^{2}+\cdots\\&=\left[1+\frac{1}{2!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2}+\cdots\right]+\sigma_{\boldsymbol{n}}\left[\frac{\omega}{2}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{3}+\cdots\right]\\&=\cosh\frac{\omega}{2}+\sigma_{\boldsymbol{n}}\sinh\frac{\omega}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh\frac{\omega}{2}&=\frac{1}{2}(e^{\omega/2}+e^{-\omega/2})=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\log\frac{1-v/c}{1+v/c}}+e^{-\frac{1}{2}\log\frac{1-v/c}{1+v/c}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}+\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}},\end{aligned}$$

$$\sinh\frac{\omega}{2}=\frac{-v/c}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}}$$

を用いると，たとえば z 方向 ($\sigma_{\boldsymbol{n}}=\sigma_z$) の Lorentz 変換に対し,

$$\begin{aligned}(u^{\dagger}u)'&=u^{\dagger}\exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)\exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)u=u^{\dagger}\exp\left(\frac{\omega}{2}\sigma_z\right)u\\&=\frac{u^{\dagger}u-\dfrac{v}{c}u^{\dagger}\sigma_z u}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}},\end{aligned}$$

$$(u^\dagger\sigma_z u)' = u^\dagger \exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)\sigma_z \exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)u = u^\dagger\sigma_z \exp\left(\frac{\omega}{2}\sigma_z\right)u$$

$$= \frac{u^\dagger\sigma_z u - \dfrac{v}{c}u^\dagger u}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$(u^\dagger\sigma_x u)' = u^\dagger \exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)\sigma_x \exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)u = u^\dagger\sigma_x u,$$

$$(u^\dagger\sigma_y u)' = u^\dagger\sigma_y u.$$

これより $u^\dagger\boldsymbol{\sigma}u$, $u^\dagger u$ は Lorentz 変換に対して $\boldsymbol{r}$, ct のように変換する．すなわち4次元ベクトルである．同様に $v^\dagger\boldsymbol{\sigma}v$, $v^\dagger v$ は $-\boldsymbol{r}$, ct のように変換することがわかる．これは空間反転した世界での4次元ベクトルと同じ変換である．

また異なる変換をする u, v の積を調べてみると，

$$(v^\dagger u)' = v^\dagger \exp\left(-\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)\exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)u = v^\dagger u.$$

すなわち，$v^\dagger u$ および $u^\dagger v$ は Lorentz 変換（および空間回転）に対してスカラー量であることがわかる．これら変換性を 7-1 表に示す．

7-1 表　Lorentz 変換

$u^\dagger v$, $v^\dagger u$	スカラー	
$u^\dagger\boldsymbol{\sigma}u$, $u^\dagger u$	ベクトル	($\boldsymbol{r}$, ct と同じ変換)
$-v^\dagger\boldsymbol{\sigma}v$, $v^\dagger v$	ベクトル	($\boldsymbol{r}$, ct と同じ変換)

次に空間反転に対する u, v の変換を調べると，$\sigma_n = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ は空間反転に対し $\boldsymbol{\sigma}\to\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{n}\to-\boldsymbol{n}$, すなわち $\sigma_n\to-\sigma_n$ であるから，空間反転をしたあとでは (7.8) からわかるように u は v, v は u のように振る舞う (Lorentz 変換に対し)．したがって空間反転に対し $u\to v$, $v\to u$ になると仮定しよう．スピンの成分の値は空間反転に対して変らないから，u, v のスピン $\pm 1/2$ の成分をそれぞれ $u_\pm$, $v_\pm$ と書くと，

$$u_+ \longleftrightarrow v_+, \qquad u_- \longleftrightarrow v_- \qquad \text{（空間反転に対し）} \tag{7.9}$$

が得られる．

[Dirac 方程式]

運動量が p の粒子の状態は (7.1) のように書けるが，そのスピノル u のみたすべき方程式を求めよう．空間反転で u は v にかわるが，この v も同時に考えることにする．任意のスピノル u_A に対して，$u_A^\dagger\boldsymbol{\sigma}u$, $u_A^\dagger u$ は4次元ベクトルであるので，$\boldsymbol{p}$, E/c との内積 $u_A^\dagger(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}-E/c)u$ はスカラー量である．また $u^\dagger_A v$ もスカラーである．そこでこの二つの不変量を，粒子が止ってみえる座標系で比較してみよう．この系では $\boldsymbol{p}=0$, E

$=mc^2$ だから，前者は $-mc(u_A^\dagger u)_0$，後者は $(u_A^\dagger v)_0$ となる．ただし指標 0 は粒子の静止系での値を意味する．ところで u と v は空間反転で相互に入れかわるものだから，u が運動量 $\boldsymbol{p}$ の粒子のあるスピン状態を表わすスピノルならば，v は運動量が $-\boldsymbol{p}$ の粒子の同じスピン状態と考えうる．したがって $\boldsymbol{p}=0$ の場合には，u と v は同一のスピノルとなる．$(u)_0=(v)_0$．同一状態を表わすスピノルでもその位相には任意性があるが，位相まで含めて一致するように v が定義されているとする．したがって，

$$-mc(u_A^\dagger u)_0=-mc(u_A^\dagger v)_0.$$

スカラー量はどんな Lorentz 座標系でも同じ値を持つから，一般の座標系でも両スカラー量は等しい．

$$u_A^\dagger(\boldsymbol{\sigma p}-E/c)u=-mcu_A^\dagger v.$$

この式は任意のスピノル u_A に対して成立するのであるから，

$$(\boldsymbol{\sigma p}-E/c)u=-mcv$$

が満足されなければならない．

同様にスカラー量 $v_A^\dagger(\boldsymbol{\sigma p}+E/c)v$ と $v_A^\dagger u$ をくらべることにより，

$$(\boldsymbol{\sigma p}+E/c)v=mcu$$

が得られる．これらをまとめて，

$$\begin{aligned}(E/c-\boldsymbol{\sigma p})u&=mcv,\\(E/c+\boldsymbol{\sigma p})v&=mcu\end{aligned}\tag{7.10}$$

となる．これが**自由粒子の Dirac 方程式**である．

この式をみたす自由粒子がエネルギー，運動量の間の関係 (4.8) を満足することを確かめるには，(7.10) の第 2 式の v に，第 1 式から得られるものを代入する．$(E/c+\boldsymbol{\sigma p})(E/c-\boldsymbol{\sigma p})=E^2/c^2-\boldsymbol{p}^2$ の関係を用いると，

$$(E^2/c^2-\boldsymbol{p}^2-m^2c^2)u=0\tag{7.11}$$

が得られる．同様に v に対しても同じ式が導かれる．

(7·10) は $\boldsymbol{p}$, E/c につき 1 次のスカラー量をもとにして導かれたが，もし $\boldsymbol{p}$, E/c について 2 次のスカラー量をもとにして論ずるなら，$v_A^\dagger(E^2/c^2-\boldsymbol{p}^2)u$ がスカラー量で，これが静止系 $(\boldsymbol{p}=0)$ での値 $m^2c^2v_A^\dagger u$ に等しいことより (7.11) が得られる．(7.10) ではスピン 1/2 の粒子を記述するのに 2 個の 2 成分スピノル u, v を必要とし，結局ある時刻で u, v あわせて 4 個の成分を与えてその後の運動が決まることになる．この 4 個の自由度は後で直接確かめるように，スピンの向きの上下とエネルギーの正負の 4 種に対応する．一方，(7.11) では u に対する式のみが与えられ，ただ一つの 2 成分スピノルのみを必要とし，自由度が 2 のようにみえる．しかし E すなわち $\partial/\partial t$ について 2 階の微分

方程式なので，ある時刻の u および $\partial u/\partial t$ を独立に与えることができ，u と $\partial u/\partial t$ がそれぞれ2個の自由度を持つので合計やはり4個の自由度となる.

〔$\boldsymbol{\gamma}$ 行列〕

スピン 1/2 粒子の内部状態を記述するには2個のスピノル u, v を必要とする. そこでこの二つをまとめて φ と書くことにすると，運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー E の平面波の状態 φ は次のようになる.

$$\psi=\varphi\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et),\quad \varphi=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}. \tag{7.12}$$

φ は4個の成分を持ち**4成分スピノル**とよばれる. (7.10) は φ に対する次の式になる.

$$\frac{E}{c}\varphi=(\boldsymbol{\alpha p}+mc\beta)\varphi. \tag{7.13}$$

ただし，$\boldsymbol{\alpha}, \beta$ は4成分の φ に働く4行4列の行列で，(7.10) から，

$$\beta=\begin{pmatrix}0&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}&0\\0&-\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix} \tag{7.14}$$

である. ここに $\mathbf{1}$ は2行2列の単位行列，0は2行2列のゼロ行列である.

$$\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad 0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

この $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ はエルミット行列であり，また直接確められるように次の関係をみたす.

$$\begin{aligned}\{\alpha_i,\ \alpha_j\}&\equiv\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=2\delta_{ij}\quad(i,j=1,\ 2,\ 3)\\\{\beta,\ \alpha_i\}&\equiv\beta\alpha_i+\alpha_i\beta=0\quad(i=1,\ 2,\ 3)\\\beta^2&=1.\end{aligned} \tag{7.15}$$

(7.13) の両辺に β をかけ，次の量 $\boldsymbol{\gamma}$ を使うと，

$$\boldsymbol{\gamma}\equiv\beta\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0&-\boldsymbol{\sigma}\\\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix},\qquad \gamma_0\equiv\beta=\begin{pmatrix}0&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&0\end{pmatrix}, \tag{7.16}$$

(7.13) は次式になる，

$$\left(\frac{E}{c}\gamma_0-\boldsymbol{p\gamma}\right)\varphi=mc\varphi. \tag{7.17}$$

$\boldsymbol{\gamma}$ は反エルミット量 ($\boldsymbol{\gamma}^\dagger=-\boldsymbol{\gamma}$)，$\gamma_0$ はエルミット量 ($\gamma_0{}^\dagger=\gamma_0$) である. (7.12) を使って (7.17) を $\psi(\boldsymbol{r},t)$ に対する式に直すと，

$$\left(\frac{E}{c}\gamma_0-\boldsymbol{p\gamma}\right)\psi=mc\psi. \tag{7.18}$$

ここで $\boldsymbol{p}, E$ はそれぞれ ψ に作用する演算子 $-i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{r},\ i\hbar\partial/\partial t$ である.

(7.16) よりあるいは (7.15) より次の交換関係が γ_μ に対して得られる.

$$\{\gamma_\mu,\ \gamma_\nu\}=-2\delta_{\mu\nu}\quad(\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3,\ 0). \tag{7.19}$$

$\delta_{\mu\nu}$ は (4.10) で定義された Kronecker の δ である.

4成分スピノル φ に対しそのエルミット共役量 $\varphi^\dagger$ を使って次の $\bar{\varphi}$ を定義する.

$$\bar{\varphi}=\varphi^\dagger\gamma_0=(v^\dagger,\ u^\dagger). \tag{7.20}$$

任意の4成分スピノル φ に対し $\varphi^*, \varphi^\dagger, \bar{\varphi}, \varphi^T$ は次の量である.

$$\varphi=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix},\quad \varphi^*=\begin{pmatrix}a^*\\b^*\\c^*\\d^*\end{pmatrix},\quad \varphi^\dagger=(a^*,\ b^*,\ c^*,\ d^*), \tag{7.21}$$

$$\bar{\varphi}=(c^*,\ d^*,\ a^*,\ b^*),\quad \varphi^T=(a,\ b,\ c,\ d).$$

φ^T は φ の行と列を交換した1行4列のスピノルで φ の **transpose** という. 二つのスピノル φ, χ の内積は,

$$\varphi^\dagger\chi=a^*A+b^*B+c^*C+d^*D$$

で与えられる. ただし A, B, C, D は χ の成分である.

$$\bar{\varphi}\varphi=v^\dagger u+u^\dagger v,$$

$$\bar{\varphi}\boldsymbol{\gamma}\varphi=u^\dagger\boldsymbol{\sigma}u-v^\dagger\boldsymbol{\sigma}v,$$

$$\bar{\varphi}\gamma_0\varphi=u^\dagger u+v^\dagger v$$

であるから, 7-1 表より $\bar{\varphi}\varphi$ はスカラー, $(\bar{\varphi}\boldsymbol{\gamma}\varphi,\ \varphi\gamma_0\varphi)$ は $(\boldsymbol{r},\ ct)$ と同様に変換するベクトルである. また空間反転 $(u\leftrightarrow v)$に対し $\bar{\varphi}\varphi, \bar{\varphi}\gamma_0\varphi$ は不変, $\bar{\varphi}\boldsymbol{\gamma}\varphi$ は符号を変える.

7-2 表

	成分数	Lorentz 変換	空間反転
$\bar{\chi}\varphi$	1	スカラー	+
$\bar{\chi}\gamma_\mu\varphi$	4	ベクトク	$-\cdots\mu=1, 2, 3$ $+\cdots\mu=0$
$\bar{\chi}\sigma_{\mu\nu}\varphi$	6	テンソル	$+\cdots\mu, \nu$ が共に 1, 2, 3 又は共に 0 $-\cdots\mu, \nu$ の一方が 0
$\bar{\chi}\gamma_5\gamma_\mu\varphi$	4	(疑)ベクトル	$+\cdots\mu=1, 2, 3$ $-\cdots\mu=0$
$\bar{\chi}\gamma_5\varphi$	1	(疑)スカラー	−

一般に任意の2個の4成分スピノル χ と φ があるとき, $\bar{\chi}$ と φ とより $4\times4=16$ 個の量が作られる. これらを空間反転, Lorentz 変換に対する変換性により分けると 7-2 表のようになる. $\sigma_{\mu\nu}, \gamma_5$ は次に定義される行列である.

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu),\qquad \gamma_5=-i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0. \tag{7.22}$$

(7.16) を用いて書き直すと $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_{23},\ \sigma_{31},\ \sigma_{12})$, $\sigma_{0i}=i\boldsymbol{\alpha}$ は,

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & -\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix},\quad \gamma_5=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix} \tag{7.23}$$

である．γ_5 は γ_μ との間に次の交換関係をみたす．

$$\gamma_5{}^2=1,\ \{\gamma_\mu, \gamma_5\}=0,\ (\mu=1, 2, 3, 0). \tag{7.24}$$

$\bar{\chi}\gamma_5\varphi$ と $\bar{\chi}\varphi$，また $\bar{\chi}\gamma_5\gamma_\mu\varphi$ と $\bar{\chi}\gamma_\mu\varphi$ は Lorentz 変換に対する変換のしかたは同じであるが，空間反転したとき変換性が異なる．$\bar{\chi}\gamma_5\varphi$, $\bar{\chi}\gamma_5\gamma_\mu\varphi$ をそれぞれ**擬スカラー**，**擬ベクトル**とよぶ．

γ 行列を用いて書かれた (7.17) は明らかに Lorentz 変換に対して不変な形になっている．すなわち両辺に左から $\bar{\chi}$ をかけると，左辺は二つの 4 次元ベクトル $\bar{\chi}\gamma_\mu\varphi$ と p_μ の内積，右辺は $mc\bar{\chi}\varphi$ でどちらも不変量であり，空間反転に対しても不変である．したがって，ある Lorentz 変換（あるいは空間反転）をして違う系に移ったとき，

$$\bar{\chi}\left(\frac{E}{c}\gamma_0-\boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}\right)\psi=mc\bar{\chi}\psi\rightarrow\bar{\chi}'\left(\frac{E'}{c}\gamma_0-\boldsymbol{p}'\boldsymbol{\gamma}\right)\psi'=mc\bar{\chi}'\psi'.$$

任意の χ' に対し右の式が成り立つのだから，ダッシュのついた系の ψ' も ψ と同じく (7.17) をみたす．

(7.14)，(7.16) は $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ あるいは γ の行列であるが，必ずしもこの形にとる必要はない．任意の 4 成分スピノル φ は 4 個のスピノル w_i の 1 次結合として，

$$\varphi=\sum_{i=1}^{4}a_iw_i \tag{7.25}$$

と書き表わされる．ただし w_i は互に直交する単位スピノル，

$$w_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad w_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad w_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad w_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{7.26}$$

$$w_i{}^\dagger w_j=\delta_{ij}$$

である．φ の 4 個の成分は展開の係数 a_i に等しい．ところで互に直交する単位スピノルは (7.26) に限らない．w_i の代りに別の w_i' をとると，その係数である φ の成分も a_i' にかかわる．その関係を，

$$a_i'=\sum_j U_{ij}a_j,\quad w_i'=\sum_j w_jU_{ji}{}^{-1},\quad \varphi=\sum_i a_iw_i=\sum_i a_i'w_i' \tag{7.27}$$

と書こう．w_i' が互に直交する単位スピノルであるためには U に次の制限が必要である．

$$w_i=\sum_j w_j'U_{ji},\qquad w_i{}^\dagger=\sum_j U_{ij}{}^\dagger w_j'{}^\dagger$$

であるから，$w_k'{}^\dagger w_l'=\delta_{kl}$ ならば，

$$\delta_{ij}=w_i{}^\dagger w_j=\sum_k\sum_l U_{ik}{}^\dagger w_k'{}^\dagger w_l'U_{lj}=\sum_k U_{ik}{}^\dagger U_{kj}.$$

あるいは行列の形に書いて，

$$U^\dagger U=1 \quad \text{または} \quad U^\dagger=U^{-1}$$

でなければならない．すなわち U はユニタリー行列である．(7.27) の変換で，2個のスピノルの内積は不変である．

$$b'^\dagger a' = \sum_i b_i'^* a_i' = \sum_k \sum_l \sum_i b_k^* U_{ki}^\dagger U_{il} a_l = \sum_k b_k^* a_k = b^\dagger a.$$

また行列 A の変換は，

$$(b^\dagger A a) = (b'^\dagger A' a') = (b^\dagger U^\dagger A' U a)$$

の条件から，

$$A = U^\dagger A' U \quad \text{あるいは} \quad A' = U A U^\dagger \tag{7.28}$$

となる．A と A' は単に座標軸のとり方が違うだけで，同じ行列と考えてよい．Dirac 方程式の $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ あるいは γ の表示も一義的なものでなく，(7.28) のようなユニタリー変換をして別の形に直してもよい．

$$\gamma_\mu' = U \gamma_\mu U^\dagger. \tag{7.29}$$

この γ_μ' も γ_μ と同じ交換関係 (7.19) を満足することが確かめられる．(7.27), (7.29) のように変換された行列で書いた Dirac 方程式は，もとの (7.17) あるいは (7.18) の4元の連立方程式を適当に加えたり引いたりして書き直したことに相当する．

γ（および $\boldsymbol{\alpha}, \beta$）の表示としてよく使われるものは次のようなものである．

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.30}$$

これは (7.16) の γ_μ から，

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.31}$$

の U を用いてユニタリー変換 (7.29) により得られる（問題 7.3 参照）．

〔問題 7.1〕 (7.6) の交換関係および $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ を用いて $\boldsymbol{N} = \pm i\boldsymbol{S}$(7.7) を導け．

〔解〕 $N_x = a1 + b\sigma_x + c\sigma_y + d\sigma_z$ とおいて (7.6) より係数 a, b, c, d を決める．まず $[N_x, S_x] = 0$ より $0 = [N_x, \sigma_x] = -2ic\sigma_z + 2id\sigma_y$，したがって $c = d = 0$．同様にして $N_x = a1 + b\sigma_x$，$N_y = a1 + b\sigma_y$，$N_z = a1 + b\sigma_z$ が得られる．(7.6) は $\boldsymbol{N}$ の各成分の cyclic なおきかえに対し不変になっているから，解 $\boldsymbol{N}$ も同様な性質を持つ．したがって係数 a, b は $\boldsymbol{N}$ の各成分につき共通である．次に $[N_x, S_y] = i\hbar N_z$ に上の解を代入すると $[a1 + b\sigma_x, \frac{\hbar}{2}\sigma_y] = i\hbar(a1 + b\sigma_z)$ でなければならない．この式の左辺は $i\hbar b\sigma_z$ となるから，$b\sigma_z = a1 + b\sigma_z$．これより $a = 0$．最後に $[N_x, N_y] = -i\hbar S_z$ に $\boldsymbol{N} = b\boldsymbol{\sigma}$ を代入すると $b^2 = -\frac{\hbar^2}{4}$，すなわち $b = \pm i\frac{\hbar}{2}$ が得られる．

〔問題 7.2〕 $v^\dagger \boldsymbol{\sigma} v$, $v^\dagger v$ が $-\boldsymbol{r}$, ct のように変換することを (7.8) の変換をつかって直接示せ．

〔問題 7.3〕 (7.30) で与えられる γ 行列を (7.16) に直すためのユニタリー変換 U

を求めよ.

［略解］ $\gamma=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}$, $\gamma_0=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ を $\gamma'=\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}$, $\gamma_0'=\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ に移すユニタリー変換 U を探そう. どちらの表示でも (7.22) で定義される $\boldsymbol{\sigma}(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12})$ は $\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}$ で与えられる. γ_0 と σ_z は可換であるから γ_0 と σ_z の同時の固有状態を内部座標軸にとると, 変換前の四つの軸は (7.26) の w_i で与えられる. 一方, 変換後の座標軸は $\gamma_0'\varphi=\pm\varphi$ を解いて,

$$w_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad w_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\quad w_3'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad w_4'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

となる. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は w_i' を規格化するための係数である.

w_i を w_i' に移す変換を U とすると,

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad \text{または簡単に書くと}\quad U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

となる. ($U^\dagger=U$).

U は直接確かめられるように $UU^\dagger=U^\dagger U=1$ をみたすユニタリー行列である.
この U により必要な変換 $\gamma_\mu\to\gamma_\mu'$ が得られることを確かめてみよう.

$$U\gamma U^\dagger=U\gamma U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}=\gamma',$$

$$U\gamma_0U^\dagger=U\gamma_0U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\gamma_0'.$$

したがって γ_μ を γ_μ' に移す変換は U で与えられる. (γ_μ' を γ_μ に移す変換 $U^\dagger$ はこの場合 U に等しい).

§ 7.2 Dirac 方程式の解

次に Dirac 方程式 (7.13) の解すなわち固有状態を求めよう. (7.13) は,

$$H\psi=E\psi,\qquad H=c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+mc^2\beta \tag{7.32}$$

と書くことができる. H を粒子の Hamiltonian, E をその固有値とみることができる.
H の密度は,

$$\psi^\dagger H\psi=\psi^\dagger\beta\cdot\beta H\psi=\bar{\psi}(c\gamma p+mc^2)\psi \tag{7.33}$$

となる.

$\boldsymbol{\alpha}, \beta$ は (7.14) より明らかなようにエルミット量であるから H もエルミット量で, そ

の固有値Eは実数 $(E=\pm\sqrt{m^2c^4+c^2p^2})$ である．$\boldsymbol{p}$ と H とは可換であるので H と $\boldsymbol{p}$ の同時の固有状態を求める．運動量の値が $\boldsymbol{p}$ の電子の状態は ψ が4成分スピノルであることに対応して4個存在する．$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$ と H とは可換であり．また $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{p}$ とも可換であるから，これら与えられた運動量 $\boldsymbol{p}$ に対する四つの固有状態は電子のヘリシティ $h=(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})/|\boldsymbol{p}|$ とエネルギーHの固有値で区別される．$h^2=1$ より h の固有値は ±1, H の固有値は (7.11) でみられるように $E=\pm\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}$ で h, H の正負による四つの解が得られる．そこで $\boldsymbol{\alpha}$, β に対し (7.30) の表示を用い，この四つの解を作ってみよう．

いまz方向に走っている電子を考えると，

$$\boldsymbol{p}=(0,\ 0,\ p_z),\quad (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})=\sigma_z p_z.$$

(7.30) の表示をとると，ψに対する方程式 (7.32) は，

$$\begin{aligned}(E-mc^2)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}&=cp_z\sigma_z\begin{pmatrix}\varphi_3\\ \varphi_4\end{pmatrix}=cp_z\begin{pmatrix}\varphi_3\\ -\varphi_4\end{pmatrix},\\ (E+mc^2)\begin{pmatrix}\varphi_3\\ \varphi_4\end{pmatrix}&=cp_z\sigma_z\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=cp_z\begin{pmatrix}\varphi_1\\ -\varphi_2\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{7.34}$$

となる．ここで，

$$\psi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\\ \varphi_4\end{pmatrix}\exp\frac{i}{\hbar}(p_z z-Et).\tag{7.35}$$

φ_1 と φ_3, φ_2 と φ_4 のみがこの式で互に関係するから $h=\pm1$ に対応して $\varphi_2=\varphi_4=0$ の解と $\varphi_1=\varphi_3=0$ の解がある．前者の解の φ_1 と φ_3 との関係は (7.34) の二つの式より，

$$\varphi_3=\frac{cp_z}{E+mc^2}\varphi_1\qquad \text{および}\qquad \varphi_1=\frac{cp_z}{E-mc^2}\varphi_3\tag{7.36}$$

で，これらは $E^2=m^2c^4+c^2p_z^2$ より同一の式である．

したがって $h=+1$ の解は（位相は任意であるから次のようにとる），

$$\begin{aligned}E>0\qquad \varphi&=N\begin{pmatrix}1\\ 0\\ cp_z/(|E|+mc^2)\\ 0\end{pmatrix},\\ E<0\qquad \varphi&=N\begin{pmatrix}cp_z/(|E|+mc^2)\\ 0\\ -1\\ 0\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{7.37}$$

ただし，規格化の係数 N は，

$$N^{-2}=1+\frac{c^2p^2}{(|E|+mc^2)^2}=\frac{2|E|}{|E|+mc^2},$$

すなわち，

$$N=\sqrt{\frac{|E|+mc^2}{2|E|}}. \tag{7.38}$$

同様に $h=-1$ の解は，

$$E>0 \qquad \varphi=N\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-cp_z/(|E|+mc^2)\end{pmatrix},$$

$$E<0 \qquad \varphi=N\begin{pmatrix}0\\cp_z/(|E|+mc^2)\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{7.39}$$

一般に $E>0$ の解を $u(\boldsymbol{p},h)$, $E<0$ の解を $v(\boldsymbol{p},h)$ と書く $(h=\pm1)$. (7.37), (7.39) より明らかなように，これらは直交する. またこのことはそれぞれが H, h の異なる固有値の組にぞくすることからも明らかである.

$$u^\dagger(\boldsymbol{p},h)u(\boldsymbol{p},h')=v^\dagger(\boldsymbol{p},h)v(\boldsymbol{p},h)=\delta_{h,h'},$$
$$u^\dagger(\boldsymbol{p},h)v(\boldsymbol{p},h')=v^\dagger(\boldsymbol{p},h)u(\boldsymbol{p},h')=0. \tag{7.40}$$

また $\bar{u}(\bar{v})$ と $u(v)$ の内積を作ると，(7.37), (7.39) から直接確かめられるように，

$$\bar{u}(\boldsymbol{p},h)u(\boldsymbol{p},h')=\frac{mc^2}{|E|}\delta_{hh'},$$
$$\bar{v}(\boldsymbol{p},h)v(\boldsymbol{p},h')=-\frac{mc^2}{|E|}\delta_{h,h'} \tag{7.41}$$

である.

［空間反転］

$u(\boldsymbol{p},h)$, $v(\boldsymbol{p},h)$ は Dirac 方程式（今後 E は常に $\sqrt{m^2c^2+c^2p^2}$ (>0) ととる），

$$\left(\frac{E}{c}\gamma_0-\boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}\right)u(\boldsymbol{p},h)=mcu(\boldsymbol{p},h),\ \left(-\frac{E}{c}\gamma_0-\boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}\right)v(\boldsymbol{p},h)=mcv(\boldsymbol{p},h) \tag{7.42}$$

の解であるが，空間反転した座標系でこれに対応する解は，$\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$, $h\to-h$ より $u(-\boldsymbol{p},-h)$, $v(-\boldsymbol{p},-h)$ に関係するはずである.

$u(-\boldsymbol{p},-h)$, $v(-\boldsymbol{p},\ \ h)$ のみたす式は (7.42) より，

$$\left(\frac{E}{c}\gamma_0 - (-\boldsymbol{p})\boldsymbol{\gamma}\right)u(-\boldsymbol{p}, -h) = mcu(-\boldsymbol{p}, -h),$$

$$\left(-\frac{E}{c}\gamma_0 - (-\boldsymbol{p})\boldsymbol{\gamma}\right)v(-\boldsymbol{p}, -h) = mcv(-\boldsymbol{p}, -h)$$

となり，左側から γ_0 をかけると γ_0 と γ_μ との交換関係 (7.19) を使って，

$$\left(\frac{E}{c}\gamma_0 - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}\right)\gamma_0 u(-\boldsymbol{p}, -h) = mc\gamma_0 u(-\boldsymbol{p}, -h),$$

$$\left(-\frac{E}{c}\gamma_0 - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}\right)\gamma_0 v(-\boldsymbol{p}, -h) = mc\gamma_0 v(-\boldsymbol{p}, -h)$$

が得られる．(7.42) との比較から $u(\boldsymbol{p}, h)$ と $\gamma_0 u(-\boldsymbol{p}, -h)$, $v(\boldsymbol{p}, h)$ と $\gamma_0 v(-\boldsymbol{p}, -h)$ とは同一の式をみたす．したがってもしこれらがそれぞれ同一のスピン状態にあれば同一の状態になる．さて γ_0 は (7.30) より明らかなようにスピンの向きを変えないので ($[\gamma_0, \boldsymbol{\sigma}] = 0$), $\gamma_0 u(-\boldsymbol{p}, -h)$, $\gamma_0 v(-\boldsymbol{p}, -h)$ は $u(-\boldsymbol{p}, -h)$, $v(-\boldsymbol{p}, -h)$ と同じスピンの向きを持つ．また $u(-\boldsymbol{p}, -h)$ と $u(\boldsymbol{p}, h)$, $v(-\boldsymbol{p}, -h)$ と $v(\boldsymbol{p}, h)$ は同一のスピン状態である．

正（負）エネルギーの Dirac 方程式をみたし与えられた $\boldsymbol{p}$, およびスピン成分を持つ解はただ一つしか存在しないから，$u(\boldsymbol{p}, h)$ と $\gamma_0 u(-\boldsymbol{p}, -h)$ ($v(\boldsymbol{p}, h)$ と $\gamma_0 v(-\boldsymbol{p}, -h)$) は位相因子を除き同一になる．

$$u(\boldsymbol{p}, h) = A\gamma_0 u(-\boldsymbol{p}, -h), \quad v(\boldsymbol{p}, h) = B\gamma_0 v(-\boldsymbol{p}, -h).$$

A, B を決めるのに，たとえば u, v に対する (7.37), (7.39) を直接使うことにすると，($\boldsymbol{p}/\!/z$ のように z 軸をとる)

$$u(p_z, 1) = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ cp_z/E+mc^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(-p_z, -1) = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -cp_z/E+mc^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_0 u(-p_z, -1) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} u(-p_z, -1) = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ cp_z/E+mc^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $A = +1$, 同様に，

$$v(p_z, 1) = N\begin{pmatrix} cp_z/E+mc^2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(-p_z, -1) = N\begin{pmatrix} -cp_z/E+mc^2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_0 v(-p_z, -1) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} v(-p_z, -1) = N \begin{pmatrix} -cp_z/E + mc^2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

これより $B=-1$ が得られる．結局，

$$u(\boldsymbol{p},\ h) = \gamma_0 u(-\boldsymbol{p},\ -h), \qquad v(\boldsymbol{p},\ h) = -\gamma_0 v(-\boldsymbol{p},\ -h). \tag{7.43}$$

したがって，空間反転（$\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r}$）により，

$$u(\boldsymbol{p},\ h)\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et) \to \gamma_0 u(-\boldsymbol{p},\ -h)\exp\frac{i}{\hbar}\{(-\boldsymbol{p})(-\boldsymbol{r})-Et\},$$

$$v(\boldsymbol{p},\ h)\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}+Et) \to -\gamma_0 v(-\boldsymbol{p},\ -h)\exp\frac{i}{\hbar}\{(-\boldsymbol{p})(-\boldsymbol{r})+Et\}$$

に移ると考えると，両者は実は同一の解で同一の Dirac 方程式をみたす．（空間反転に対する Dirac 方程式の不変性）．

われわれは Dirac 粒子の空間反転を次のように決めよう．

$$\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{\sigma}\to\boldsymbol{\sigma}, \qquad h\to-h, \qquad u\to\gamma_0 u, \qquad v\to-\gamma_0 v. \tag{7.44}$$

［時間反転］

§ 4.3 では 2 成分スピノルに対する時間反転を論じたが，負エネルギーの解の存在のため 4 成分スピノルの時間反転が必要になる．時間反転により，

$$\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{\sigma}\to-\boldsymbol{\sigma}, \qquad h\to h, \qquad E\to E.$$

また § 4.3 で議論したように ψ は ψ^* に変るから，$u(\boldsymbol{p},\ h)$, $v(\boldsymbol{p},\ h)$ は $u^*(-\boldsymbol{p},\ h)$, $v^*(-\boldsymbol{p},\ h)$ に移るであろう．(7.42) で $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$ としさらに複素共役量をとると，

$$\begin{aligned} &\left(\frac{E}{c}\gamma_0^* - (-\boldsymbol{p})\boldsymbol{\gamma}^*\right)u^*(-\boldsymbol{p},\ h) = mcu^*(-\boldsymbol{p},\ h), \\ &\left(-\frac{E}{c}\gamma_0^* - (-\boldsymbol{p})\boldsymbol{\gamma}^*\right)v^*(-\boldsymbol{p},\ h) = mcv^*(-\boldsymbol{p},\ h). \end{aligned} \tag{7.45}$$

γ_μ の表示として (7.30)，$\boldsymbol{\sigma}$ の表示として (3.28) をとると $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_3$ は実数の行列，γ_2 は虚数行列であるから，

$$\gamma_0^* = \gamma_0, \qquad \gamma_1^* = \gamma_1, \qquad \gamma_2^* = -\gamma_2, \qquad \gamma_3^* = \gamma_3 \tag{7.46}$$

である．次の行列 U_T を定義すると，

$$U_T \equiv i\sigma_y = \gamma_1\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -U_T^{-1}. \tag{7.47}$$

γ_μ の間の交換関係と (7.46) により次式が導かれる．

$$U_T\gamma_0{}^*U_T{}^{-1}=\gamma_0, \qquad U_T\boldsymbol{\gamma}^*U_T{}^{-1}=-\boldsymbol{\gamma}. \tag{7.48}$$

あるいは γ_0 がエルミット量，$\boldsymbol{\gamma}$ が反エルミット量のことから

$$U_T\gamma_\mu{}^TU_T{}^{-1}=\gamma_\mu. \qquad (\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{7.49}$$

$\gamma_\mu{}^T$ は γ_μ の transpose である．U_T を (7.45) の左からかけ (7.48) を使うと，

$$\left(\frac{E}{c}\gamma_0-\boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}\right)U_Tu^*(-\boldsymbol{p},h)=mcU_Tu^*(-\boldsymbol{p},h),$$

$$\left(-\frac{E}{c}\gamma_0-\boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}\right)U_Tv^*(-\boldsymbol{p},\ h)=mcU_Tv^*(-\boldsymbol{p},\ h).$$

これより $u(\boldsymbol{p},h)$ と $U_Tu^*(-\boldsymbol{p},\ h)$，$v(\boldsymbol{p},\ h)$ と $U_Tv^*(-\boldsymbol{p},\ h)$ とは同一の式をみたすことがわかる．また $U_T(=i\sigma_y)$ は § 4.3 よりスピンの向きを反転するので，$U_Tu^*(-\boldsymbol{p},\ h)$ は $u(-\boldsymbol{p},\ h)$ とスピンの向きが逆，すなわち $u(\boldsymbol{p},\ h)$ と同じスピン状態になっている．(v についても同様)．したがって，

$$u(\boldsymbol{p},\ h)=AU_Tu^*(-\boldsymbol{p},\ h), \quad v(\boldsymbol{p},\ h)=BU_Tv^*(-\boldsymbol{p},\ h)$$

とおき，A, B を定めよう．空間反転のときと同様に再び (7.37), (7.39) を使うと，

$$U_Tu^*(-p_z,\ 1)=N\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\cp_z/E+mc^2\end{pmatrix}$$

$$=N\begin{pmatrix}1\\0\\cp_z/E+mc^2\\0\end{pmatrix}=u(p_z,\ 1),$$

$$U_Tu^*(-p_z,\ -1)=N\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-cp_z/E+mc^2\\0\end{pmatrix}$$

$$=N\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\cp_z/E+mc^2\end{pmatrix}=-u(p_z,\ -1)$$

等より次式が得られる．

$$u(\boldsymbol{p},\ h)=hU_Tu^*(-\boldsymbol{p},\ h), \quad v(\boldsymbol{p},\ h)=-hU_Tv^*(-\boldsymbol{p},\ h). \tag{7.50}$$

$A=B=h$ で h の正負により ± 1 がかかる．

時間反転 $t\to -t$ により平面波の状態が次のように変るとすると，

$$u(\boldsymbol{p},\ h)\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)\to hU_Tu^*(-\boldsymbol{p},\ h)\left[\exp\frac{i}{\hbar}\{(-\boldsymbol{p})\boldsymbol{r}-E(-t)\}\right]^*$$

$$=hU_Tu^*(-\boldsymbol{p},\ h)\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et).$$

(v についても同様)，変換前後の波動関数は実は同一の解で同一の Dirac 方程式をみたし時間反転に対し自由粒子の Dirac 方程式が不変のことを示している．

時間反転を2度くり返すと，

$$u(\boldsymbol{p},\ h)\to hU_T\{hU_Tu^*(\boldsymbol{p},\ h)\}^*=U_TU_T^*u(\boldsymbol{p},\ h)=-u(\boldsymbol{p},\ h)$$

等より，

$$u(\boldsymbol{p},\ h)\to -u(\boldsymbol{p},\ h),\quad v(\boldsymbol{p},\ h)\to -v(\boldsymbol{p},\ h). \tag{7.51}$$

すなわち2度の時間反転は 2π の空間回転（問題 3.4 参照）を行なうのと同じ変化を状態に与える．以上をまとめると，Dirac 粒子の時間反転に対する性質は次のようになる．

$$\boldsymbol{p}\to -\boldsymbol{p},\ \ \boldsymbol{\sigma}\to -\boldsymbol{\sigma},\ \ h\to h,\ \ u\to hU_Tu^*,\ \ v\to -hU_Tv^*. \tag{7.52}$$

§ 7.3 Fermi 粒子の量子化

写真 6-1 で示したように γ 線が物質中を通過するとき電子・陽電子対の発生が起こり，また陽電子が物質中の電子に衝突すると対消滅が起こり γ 線に転化する．一般にエネルギー・運動量等の保存則がみたされる限り，素粒子相互間の転換・生成・消滅等が可能であり，かつ時空の各点はその場所・時間によらず，このような素粒子の生成・消滅を起こす能力を持っている．そこで電子・陽子・中性子等の Fermi 粒子も空間の各点にそれぞれの粒子の場が存在すると考え，この場を $\psi(x)$ で表わす．

$\psi(x)$ がスピン $\dfrac{1}{2}$，質量 m の Fermi 粒子（たとえば電子）の場に対応するためには，もしこれが自由な粒子の場を表わすとすると Dirac 方程式 (7.18) をみたさなければならない．そこで ψ を (7.18) の解 $u(\boldsymbol{p},\ h)$, $v(\boldsymbol{p},\ h)$ で展開すると，

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{L^3}}\sum_h\sum_{\boldsymbol{p}}\{a(\boldsymbol{p},\ h)u(\boldsymbol{p},\ h)\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)$$

$$+b^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)v(-\boldsymbol{p},\ h)\exp-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)\} \tag{7.53}$$

となる．$u(\boldsymbol{p},\ h)$, $v(\boldsymbol{p},\ h)$ はそれぞれ正負エネルギーの Dirac 方程式 (7.42) の解で $\boldsymbol{p}$, h は運動量およびヘリシティを表わす．

a, $b^\dagger$ は展開係数であるが，第6章の Bose 粒子の量子化の場合と同様に考えると負の振動数の係数 $a(\boldsymbol{p},\ h)$ は粒子 $(\boldsymbol{p},\ h)$ を吸収する演算子となり，正の振動数の係数 $b^\dagger(\boldsymbol{p},h)$

は反粒子 $(\boldsymbol{p}, h)$ を作る演算子と考えられる.（これについては 141 ページ参照）

同様に各点 x で $\bar{\psi}(x)=\psi^{\dagger}(x)\gamma_0$ を量子化すると,

$$\bar{\psi}(x)=\frac{1}{\sqrt{L^3}}\sum_h\sum_{\boldsymbol{p}}\left\{a^{\dagger}(\boldsymbol{p}, h)\bar{u}(\boldsymbol{p}, h)\exp-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)\right.$$
$$\left.+b(\boldsymbol{p}, h)\bar{v}(-\boldsymbol{p}, h)\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)\right\} \tag{7.54}$$

となる. $a^{\dagger}(\boldsymbol{p}, h)$ は粒子 $(\boldsymbol{p}, h)$ を作り, $b(\boldsymbol{p}, h)$ は反粒子 $(\boldsymbol{p}, h)$ を吸収する演算子で, $a^{\dagger}(\boldsymbol{p}, h)$ と $a(\boldsymbol{p}, h)$, $b^{\dagger}(\boldsymbol{p}, h)$ と $b(\boldsymbol{p}, h)$ は相互にエルミット共役である.

もし粒子と反粒子とが等しいときは $(a=b,\ a^{\dagger}=b^{\dagger})$ ψ と $\bar{\psi}$ がともにその中性粒子の生成・吸収を行なう演算子になるが, 今日知られている Fermi 粒子はすべて自分自身と異なる反粒子を持っている. たとえば中性子は電気的に中性であるが, その反粒子である反中性子とは異なる粒子でこの二つを区別する量として重粒子数といわれる量が知られている. 中性子は重粒子数 $+1$, 反中性子は -1 でこれが荷電の代りに粒子と反粒子とを区別する（第 8 章参照).

(7.53), (7.54) の展開式で h についての和は $h=\pm1$, $\boldsymbol{p}$ についての和は,

$$(p_x,\ p_y,\ p_z)=\frac{2\pi\hbar}{L}(n_x,\ n_y,\ n_z),\quad n_x,\ n_y,\ n_z=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{7.55}$$

についての和をとる.

次に自由なスピン 1/2 粒子の場のエネルギーを求めよう. 一個の粒子のエネルギー密度は (7.33) で与えられるから, (7.33) の ψ, $\psi^{\dagger}$ を量子化してさらに全空間につき積分すると系の全エネルギーになる.

$$H=\int\bar{\psi}(x)(c\gamma\boldsymbol{p}+mc^2)\psi(x)d\boldsymbol{r}. \tag{7.56}$$

(7.53), (7.54) を代入し (7.40), (7.42), および

$$\frac{1}{L^3}\int\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}=\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$$

を使うと次式になる.

$$H=\sum_h\sum_{\boldsymbol{p}}E\{a^{\dagger}(\boldsymbol{p}, h)a(\boldsymbol{p}, h)-b(\boldsymbol{p}, h)b^{\dagger}(\boldsymbol{p}, h)\}\qquad(E=\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}). \tag{7.57}$$

次に a, $a^{\dagger}$, b, $b^{\dagger}$ の間の交換関係を調べよう. Fermi 粒子は Pauli の原理（第 5 章）により特定の状態 $(\boldsymbol{p}, h)$ には多くても唯一個しか存在できない. したがって $(\boldsymbol{p}, h)$ 状態にある粒子の個数は 0 または 1 である. § 6.2 で議論したように粒子の吸収・生成の演

算子 $a(\boldsymbol{p},h)$, $a^{\dagger}(\boldsymbol{p},h)$ の間に次の交換関係,

$$\begin{aligned} &\{a^{\dagger}(\boldsymbol{p},h),\ a(\boldsymbol{p},h)\}=1, \\ &\{a(\boldsymbol{p},h),\ a(\boldsymbol{p},h)\}=\{a^{\dagger}(\boldsymbol{p},h),\ a^{\dagger}(\boldsymbol{p},h)\}=0 \end{aligned} \tag{7.58}$$

があれば,

$$N_{+}(\boldsymbol{p},h)=a^{\dagger}(\boldsymbol{p},h)a(\boldsymbol{p},h) \tag{7.59}$$

の固有値は 0 または 1 になり, $N_{+}(\boldsymbol{p},h)$ を粒子 $(\boldsymbol{p},h)$ の数と考えると, ちょうど Pauli 原理に一致した結果が得られる.

この場合 $(\boldsymbol{p},h)$ の粒子が1個も存在しない状態と1個存在する状態をそれぞれ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ で表わし, $a^{\dagger}(\boldsymbol{p},h)$, $a(\boldsymbol{p},h)$ をこの2行1列の波動関数に作用する演算子と考えると,

$$a(\boldsymbol{p},h)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ a^{\dagger}(\boldsymbol{p},h)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ N_{+}(\boldsymbol{p},h)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{7.60}$$

となる.

同様に反粒子に対する演算子 b, $b^{\dagger}$ の間に交換関係,

$$\begin{aligned} &\{b^{\dagger}(\boldsymbol{p},h),\ b(\boldsymbol{p},h)\}=1, \\ &\{b(\boldsymbol{p},h),\ b(\boldsymbol{p},h)\}=\{b^{\dagger}(\boldsymbol{p},h),\ b^{\dagger}(\boldsymbol{p},h)\}=0 \end{aligned} \tag{7.61}$$

をおくと,

$$N_{-}(\boldsymbol{p},h)=b^{\dagger}(\boldsymbol{p},h)b(\boldsymbol{p},h) \tag{7.62}$$

は固有値0または1をとり反粒子 $(\boldsymbol{p},h)$ の数を表わす. したがって, 自由粒子の集まりからなる系のエネルギー (7.57) は,

$$H=\sum_{h}\sum_{\boldsymbol{p}}E\{N_{+}(\boldsymbol{p},h)+N_{-}(\boldsymbol{p},h)-1\}$$

となる. 零点エネルギーは Bose 粒子の場合と同様観測にかからない量でこれを省略すると次のようになる.

$$H=\sum_{h}\sum_{\boldsymbol{p}}E\{N_{+}(\boldsymbol{p},h)+N_{-}(\boldsymbol{p},h)\}. \tag{7.63}$$

(7.33) を量子化するとき $\bar{\psi}$ と ψ が 演算子になるので, その順序を入れ換えると答が変ってくる. そこで量子化した場合 (7.56) の代りに,

$$\frac{1}{2}\{\bar{\psi}(c\gamma\boldsymbol{p}+mc^{2})\psi+\psi^{T}(c\gamma^{T}\boldsymbol{p}+mc^{2})\bar{\psi}^{T}\}$$

を使うと H は (7.63) となり初めから零点エネルギーはでてこないようにすることができる.

[Fermi 統計と交換関係]

(7.58) は同一の $(\boldsymbol{p}, h)$ に対する $a^\dagger$ と a の間の交換関係で異なる $\boldsymbol{p}$, h を持つ量の]の交換関係は (7.63) を導くのには不要であった. $\bar{\psi}, \psi$ はスピン 1/2 粒子の場でそれ|身エルミット量ではなく, 一般に実際に測定されるエルミット量は $\bar{\psi}, \psi$ の2次形式でゝる. (このことは一般の Fermi 粒子の場合にあてはまる). たとえば Lorentz 変換に対-る変換性の異なるいろいろなエルミット量を $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$ から作ると 7-3 表のよう:量である.

$$(\bar{\psi}\psi)^\dagger = (\psi^\dagger\gamma_0\psi)^\dagger = \psi^\dagger\gamma_0{}^\dagger\psi = \psi^\dagger\gamma_0\psi = \bar{\psi}\psi,$$

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^\dagger = (\psi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\psi)^\dagger = \psi^\dagger\gamma_\mu{}^\dagger\gamma_0{}^\dagger\psi$$

$$= \pm\,\psi^\dagger\gamma_\mu\gamma_0\psi = \psi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\psi = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi.$$

(± は $\mu = 1,2,3$ のとき負, $\mu = 0$ のとき:),

7-3 表 エルミット量

$\bar{\psi}(x)\psi(x)$	スカラー
$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$	ベクトル
$\bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x)$	テンソル
$\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x)$	疑ベクトル
$i\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$	疑スカラー

等より直接これらの量はエルミット量であることがっかる.

さて, 空間的に離れている2点 x, x' における2個のエルミット量, たとえば $\bar{\psi}(x)$ $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x')\psi(x')$ を考えると, 点 x における $\bar{\psi}\psi$ の測定が空間的に離れている点 x' における $\bar{\psi}\psi$ の測定に影響をおよぼさないと考えられ,

$$[\bar{\psi}(x)\psi(x), \bar{\psi}(x')\psi(x')] = 0, \quad |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| > c|t' - t| \tag{7.64}$$

でなければならない.

一般に AB, CD の交換関係は,

$$\begin{aligned}[AB, CD] &= A\{B,C\}D - C\{D,A\}B + CA\{B,D\} - \{C,A\}BD \\ &= A[B,C]D - C[D,A]B + CA[B,D] - [C,A]BD\end{aligned} \tag{7.65}$$

の2通りに書くことができ, 次のいずれの場合にも交換関係は 0 になる.

$$1)\quad \{B,C\} = \{D,A\} = \{B,D\} = \{C,A\} = 0,$$

$$2)\quad [B,C] = [D,A] = [B,D] = [C,A] = 0.$$

(7.64) に 1) を適用すると空間的に離れた任意の2点 x, x' に対し,

$$\{\bar{\psi}(x), \psi(x')\} = \{\psi(x), \psi(x')\} = \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x')\} = 0, \; |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| > c|t - t'| \tag{7.66}$$

であれば (7.64) が成立する. スピン0粒子の場 $\varphi(x)$ の場合と同様な議論から (§ 6.5 参照) (7.66) が成立するためには (7.58), (7.61) 等のみでなく a, $a^\dagger$, b, $b^\dagger$ の間に次の交換関係が必要なことがわかる.

$$\{a^\dagger(\boldsymbol{p}, h), a(\boldsymbol{p}', h')\} = \{b^\dagger(\boldsymbol{p}, h), b(\boldsymbol{p}', h')\} = \delta_{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'}\delta_{h, h'},$$
$$\{a^\dagger(\boldsymbol{p}, h), a^\dagger(\boldsymbol{p}', h')\} = \{a(\boldsymbol{p}, h), a(\boldsymbol{p}', h')\}$$
$$= \{b^\dagger(\boldsymbol{p}, h), b^\dagger(\boldsymbol{p}', h')\} = \{b(\boldsymbol{p}, h), b(\boldsymbol{p}', h')\} = 0, \tag{7.67}$$
$$\{a^\dagger(\boldsymbol{p}, h), b^\dagger(\boldsymbol{p}', h')\} = \{a^\dagger(\boldsymbol{p}, h), b(\boldsymbol{p}', h')\}$$
$$= \{a(\boldsymbol{p}, h), b^\dagger(\boldsymbol{p}', h')\} = \{a(\boldsymbol{p}, h), b(\boldsymbol{p}', h')\} = 0.$$

(7.66) でなく負の交換関係,

$$[\bar{\psi}(x), \psi(x')] = [\psi(x), \psi(x')] = [\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x')] = 0, \ |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| > c|t - t'| \tag{7.68}$$

であっても (7.64) は成り立つ. しかしこの関係式は (7.58), (7.61) の交換関係とむじゅんするので, 採用するわけにいかない. なぜなら, $t = t'$ ととると (7.68) より

$$[\psi(x), \psi(x')] = 0$$

は任意の $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ に対して成り立つので, 左辺に $\bar{u}(\boldsymbol{p}, h)\exp -\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{r} - Et)$, $\bar{u}(\boldsymbol{p}, h) \exp -\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}' - Et')$ をかけて $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ で積分し (2.43), (7.41) の直交関係を使うと,

$$[a(\boldsymbol{p}, h), a(\boldsymbol{p}, h)] = 0$$

が得られ, これは (7.58) に反する. したがって (7.66), (7.67) だけが許されるものである.

いま粒子・反粒子の1個も存在しない真空状態を $|0\rangle$, 粒子 $(\boldsymbol{p}, h)$ が一個存在する状態を $|\boldsymbol{p}^+, h\rangle$, 反粒子 $(\boldsymbol{p}, h)$ の1個存在する状態を $|\boldsymbol{p}^-, h\rangle$, 一般に n 個の粒子 $(\boldsymbol{p}_1, h_1), \cdots (\boldsymbol{p}_n, h_n)$ と m 個の反粒子 $(\boldsymbol{p}_{n+1}, h_{n+1}), \cdots, (\boldsymbol{p}_{n+m}, h_{n+m})$ の存在する状態を $|\boldsymbol{p}_1{}^+, h_1; \boldsymbol{p}_2{}^+, h_2; \cdots; \boldsymbol{p}_{n+1}{}^-, h_{n+1}; \cdots; \boldsymbol{p}_{n+m}{}^-, h_{n+m}\rangle$ と書こう. 任意の状態 Ψ は系の粒子数の異なる状態を含むので, 次のように表わされる.

$$\Psi = \psi_0|0\rangle + \sum_h \sum_{\boldsymbol{p}} \psi(\boldsymbol{p}^+, h)|\boldsymbol{p}^+, h\rangle + \sum_h \sum_{\boldsymbol{p}} \psi(\boldsymbol{p}^-, h)|\boldsymbol{p}^-, h\rangle + \cdots$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \sum_{h_1, \cdots, h_{n+m}} \sum_{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_{n+m}} \psi(\boldsymbol{p}^+{}_1, h_1; \cdots; \boldsymbol{p}^-{}_{n+m}, h_{n+m})|\boldsymbol{p}^+{}_1 h_1;$$
$$\boldsymbol{p}^+{}_2, h_2; \cdots; \boldsymbol{p}^-{}_{n+1}, h_{n+1}; \cdots \boldsymbol{p}^-{}_{n+m}, h_{n+m}\rangle + \cdots. \tag{7.69}$$

状態 $|\boldsymbol{p}^+{}_1, h_1; \cdots; \boldsymbol{p}^-{}_{n+1}, h_{n+1}, \cdots\rangle$ は $a^\dagger$, $b^\dagger$ を使うと次のように書ける.

$$|\boldsymbol{p}^+{}_1, h_1; \boldsymbol{p}^+{}_2, h_2; \cdots; \boldsymbol{p}^-{}_{n+1}, h_{n+1}; \boldsymbol{p}^-{}_{n+2}, h_{n+2}, \cdots\rangle$$
$$= a^\dagger(\boldsymbol{p}_1, h_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2, h_2)\cdots b^\dagger(\boldsymbol{p}_{n+1}, h_{n+1})b^\dagger(\boldsymbol{p}_{n+2}, h_{n+2})\cdots|0\rangle. \tag{7.70}$$

したがって n 個の粒子と m 個の反粒子を含む状態は,

$$\frac{1}{\sqrt{n!m!}} \sum_{\boldsymbol{p}} \sum_h \psi(\boldsymbol{p}^+{}_1, h_1; \boldsymbol{p}^+{}_2, h_2; \cdots; \boldsymbol{p}^-{}_{n+1}, h_{n+1}; \boldsymbol{p}^-{}_{n+2}, h_{n+2}; \cdots)$$

$\times a^\dagger(\boldsymbol{p}_1, h_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2, h_2)\cdots b^\dagger(\boldsymbol{p}_{n+1}, h_{n+1})b^\dagger(\boldsymbol{p}_{n+2}, h_{n+2})\cdots|0\rangle$

となる．$\sum_{\boldsymbol{p}}$ は運動量 $\boldsymbol{p}^+{}_1, \boldsymbol{p}^+{}_2, \cdots$ のそれぞれについて (7.55) で許される値について和をとるから，たとえば $\boldsymbol{p}^+{}_1, h_1; \cdots; \boldsymbol{p}^-{}_{n+1}, h_{n+1}; \cdots$ の値を決めたときの系の ψ は $n!m!$ 個の和，

$$\frac{1}{\sqrt{n!m!}}\sum_{Perm}\varepsilon_P\psi(\boldsymbol{p}^+{}_1h_1;\ \boldsymbol{p}^+{}_2h_2;\ \cdots;\ \boldsymbol{p}^-{}_{n+1},\ h_{n+1};\ \cdots) \tag{7.71}$$

となる．ここで $\sum$ は $\boldsymbol{p}^+{}_1h_1, \cdots, \boldsymbol{p}^+{}_nh_n$ の順序をいろいろ変えた $n!$ 個の順序と $\boldsymbol{p}^-{}_{n+1}h_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{p}^-{}_{n+m}h_{n+m}$ の順序をいろいろ変えた $m!$ 個の順序の組合せ $n!m!$ 個についての和，ε_P はそれぞれの順序に対し $+1$ または -1 で，交換関係 (7.67) よりたとえば，

$$\psi(\boldsymbol{p}^+{}_2h_2;\ \boldsymbol{p}^+{}_1h_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2,\ h_2)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1,\ h_1) = -\psi(\boldsymbol{p}^+{}_2h_2;\ \boldsymbol{p}^+{}_1h_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1,\ h_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2,\ h_2)$$

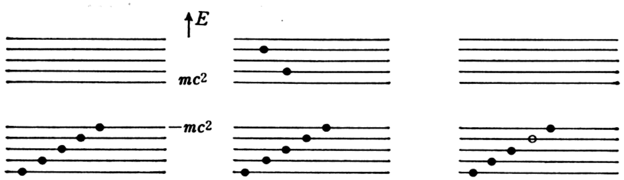
であるから，$\boldsymbol{p}_1{}^+h_1; \boldsymbol{p}_2{}^+h_2; \cdots$ の順序から偶数個のおきかえ $\boldsymbol{p}_ih_i \rightleftarrows \boldsymbol{p}_jh_j$ で得られる順序に対しては $\varepsilon_P = +1$，奇数個のおきかえの時は $\varepsilon_P = -1$ である．したがって (7.71) は任意の 2 個の粒子の交換 $\boldsymbol{p}_i{}^+h_i{}^+ \rightleftarrows \boldsymbol{p}_j{}^+h_j{}^+$ および任意の 2 個の反粒子のおきかえ $\boldsymbol{p}_i{}^-h_i{}^- \rightleftarrows \boldsymbol{p}_j{}^-h_j{}^-$ に対し反対称になっている．

［負エネルギー状態と反粒子］

自由粒子はすべて正エネルギーを持ち，負エネルギー粒子の存在は知られていない．また負エネルギーの粒子の存在が可能であれば，たとえば粒子の存在しない真空状態は安定ではなく外からエネルギーを与えなくても多数の（無限個）の負エネルギー粒子を放出し，その際，余ったエネルギーは正エネルギー粒子の生成に使われるであろう．$\psi(x)$，$\bar{\psi}(x)$ を量子化するとき，$\psi(x)$ の展開で Dirac 方程式の正エネルギーの解 $u(\boldsymbol{p}, h)\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr} - Et)$ の係数 $a(\boldsymbol{p}, h)$ は粒子 $(\boldsymbol{p}, h)$ の吸収の演算子と考えた．これに対し負エネルギーの解 $v(-\boldsymbol{p}, h)\exp - \frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr} - Et)$ の係数 $b^\dagger(\boldsymbol{p}, h)$ は，負エネルギーの粒子というものが存在しないために負エネルギー $-E$，運動量 $-\boldsymbol{p}$ の粒子の吸収と考えることができない．そこで系からエネルギー $-E$，運動量 $-\boldsymbol{p}$ を吸収することは，系のエネルギーが E，運動量が $\boldsymbol{p}$ 増すことに等しいので正エネルギー E，運動量 $\boldsymbol{p}$ の反粒子の生成が行なわれると考え直した．また粒子が荷電を持つときのことを考えると明らかなように，粒子の吸収と反粒子の生成が系に同一の荷電変化を与えるためには，反粒子の荷電は粒子のそれと異符号で粒子と反粒子とは同一であり得ない．以上の議論より明らかなように量子化された場の理論で反粒子が存在しなければならない理由は，自由粒子が正エネ

ルギーを持つことと荷電またはそれに代るある保存則があり各粒子が0と異なる荷電または保存量を持っているためである．

場が量子化される以前に Dirac の考えた Dirac 電子の**空孔理論**では，電子の負エネルギー状態 $v(\boldsymbol{p}, h)$ を次のように考えた．すなわち 7-1 図に示すように物質の存在しない真空状態では実は負エネルギー状態 $v(\boldsymbol{p}, h)$ のそれぞれに1個ずつ電子が存在し

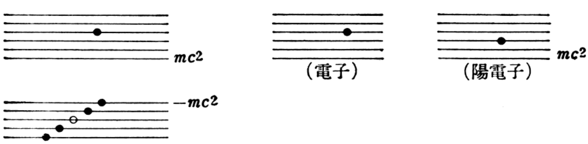


（a） 真空状態　（b） 電子2個存在する状態　（c） 陽電子（$-E$, $-\boldsymbol{p}, h$）が1個存在する状態

7-1 図

ている（a図）．電子が何個か存在する状態はこの無限個の負エネルギー状態をしめる電子の他に，さらに正エネルギー状態 $u(\boldsymbol{p}, h)$ に何個かの電子が存在する（b図）．これら正エネルギー電子はエネルギーを放出して負エネルギー状態に移ろうとしても，すでに負エネルギー状態のすべてに1個ずつ電子が存在するので Pauli 原理により移れない．また負エネルギー（$E(<0)$, $\boldsymbol{p}, h$）状態の一つの電子が欠けている場合と真空状態とを比較すると，この空孔は $-E(>0)$, $-\boldsymbol{p}, h$ のエネルギー・運動量・ヘリシティを持つ正エネルギーの粒子すなわち反粒子として観測される（c図）．

量子化された場の理論では負エネルギー状態に存在する無限個の電子を考える代りに，電子・陽電子に対してそれぞれ正エネルギーの状態（$E \geq mc^2$）の準位が存在し，真空状態は電子・陽電子の準位に一個も粒子の存在しない状態，また陰陽電子対の存在する状態は 7-2 図（b）で表わされる．



（a） Dirac の空孔理論における陰陽電子対　（b） 場の理論おける陰陽電子対

7-2 図

Dirac 方程式の負エネルギー状態 $v(\boldsymbol{p}, h)$ は反粒子の正エネルギー状態と関係することを論じたが，(7.53)，(7.54) において粒子 $(\boldsymbol{p}, h)$ の吸収の演算子 $a(\boldsymbol{p}, h)$ に4成分スピノル $u(\boldsymbol{p}, h)$ がかかっているのに対し，反粒子 $(\boldsymbol{p}, h)$ の吸収の演算子 $b(\boldsymbol{p}, h)$ に

かかるスピノルは $\bar{v}(-p, h)$ である．反粒子と粒子は同じスピン・質量を持ち，それらが自由に運動しているときは同一の運動をすると考えられるから，反粒子の正エネルギーの解も $u(\boldsymbol{p}, h)$ で表わされるはずである．そこで $u(\boldsymbol{p}, h)$ と $\bar{v}(-\boldsymbol{p}, h)$ の関係を調べてみよう．

(7.45) の $v^*(-\boldsymbol{p}, h)$ に対する式の両辺に左から γ_0 をかけると，γ_μ の間の交換関係および，

$$\gamma_0 v^* = \gamma_0{}^T v^* = (v^\dagger \gamma_0)^T = \bar{v}^T \tag{7.72}$$

により次式が得られる．

$$\left(-\frac{E}{c}\gamma_0{}^* - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}^*\right)\bar{v}^T(-\boldsymbol{p}, h) = mc\bar{v}^T(-\boldsymbol{p}, h). \tag{7.73}$$

同様に，

$$\left(+\frac{E}{c}\gamma_0{}^* - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}^*\right)\bar{u}^T(-\boldsymbol{p}, h) = mc\bar{u}^T(-\boldsymbol{p}, h). \tag{7.74}$$

(7.42) と比較すると，

$$U_c\gamma_0{}^* U_c{}^{-1} = -\gamma_0, \quad U_c\boldsymbol{\gamma}^* U_c{}^{-1} = \boldsymbol{\gamma}$$

あるいは，

$$U_c\gamma_\mu{}^T U_c{}^{-1} = -\gamma_\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{7.75}$$

をみたす U_c があれば，この U_c を使って $U_c\bar{v}^T(-\boldsymbol{p}, h)$, $U_c\bar{u}^T(-\boldsymbol{p}, h)$ はそれぞれ $u(\boldsymbol{p}, h)$, $v(\boldsymbol{p}, h)$ と同一の方程式をみたすことがわかる．

$$U_c = -\gamma_5 U_T = -\gamma_5\gamma_1\gamma_3 = i\gamma_2\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -U_c{}^{-1} \tag{7.76}$$

とおくと，

$$U_c\gamma_\mu{}^T U_c{}^{-1} = \gamma_5 U_T \gamma_\mu{}^T U_T{}^{-1}\gamma_5{}^{-1} = \gamma_5\gamma_\mu\gamma_5{}^{-1} = -\gamma_\mu$$

より，確かに (7.75) はみたされている．この U_c と Dirac 方程式の解 (7.37), (7.39) を使うと，

$$U_c\bar{v}^T(-\boldsymbol{p}, h) = u(\boldsymbol{p}, h), \quad U_c\bar{u}^T(-\boldsymbol{p}, h) = v(\boldsymbol{p}, h) \tag{7.77}$$

となる．

§ 7.4 質量のない 1/2 スピン粒子の波動方程式

――ニュートリノ――

Dirac 方程式 (7.10) は質量 0 の粒子に対しては u, v に対する式，

$$(E/c-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})u=0, \quad (E/c+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})v=0 \tag{7.78}$$

になる．u, v は相互に無関係な式をみたすので u または v の一方のみが存在し，他方が常に 0 である解が存在しうる．u のみ存在し $v=0$ の時は $E=c|\boldsymbol{p}|$ に対し $h=+1$, $E=-c|\boldsymbol{p}|$ に対し $h=-1$ で，正エネルギーの解は常に正のヘリシティ，負エネルギーの解は常に負のヘリシティを持つ．一方 $u=0$ の解では $E>0$ に対し負のヘリシティ，$E<0$ に対し正のヘリシティを持つ．§ 7.3 で示したように，負エネルギーの解は正エネルギーの反粒子を表わすと考えられるので，上の関係をまとめると次のようになる．

$u \leftrightarrow$ ヘリシティ正の粒子とヘリシティ負の反粒子，

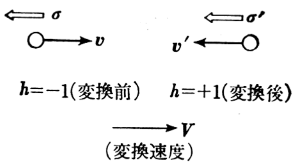
$v \leftrightarrow$ ヘリシティ負の粒子とヘリシティ正の反粒子．

さてニュートリノはスピン $\frac{1}{2}$ を持つ荷電のない粒子であるが，その質量は実験誤差の範囲内で 0 であるようにみえる（現在迄知られているニュートリノは 2 種類で，その内で中性子の β 崩壊でできるニュートリノ ν_e の質量の上限は約 200 eV，π 中間子の $\pi^+\to\mu^++\nu$ 崩壊で作られるニュートリノ ν_μ の質量の上限は約数 MeV である）．正確に質量のないことを確かめるのは難しいが，現在のところ，質量 0 と考えてむじゅんするような実験事実はない．所でこのニュートリノは常に負のヘリシティを持っていることが実験的に確かめられており，したがってその波動関数は 4 成分 u, v を持つ代りにただ 2 成分 v のみで記述できる ($u=0$)．これを **2成分ニュートリノの理論**という．

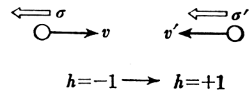
もしニュートリノのしたがう方程式が空間反転に対して不変ならば，$u=0$, $v\neq 0$ の解に対応して $u\neq 0$, $v=0$ の解もなければならない（(7.9) 参照）．しかしニュートリノの関与する現象では空間反転に対する不変性の破れていることが知られており，$u\neq 0$ の解を必要としないようにみえる．ニュートリノは一般に他の粒子と極めて弱い力でしか力をおよぼし合わない．したがって $(E/c+\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})v=0$ はニュートリノが物質中を通過する時でも非常によい近似で成立する．しかし十分厚い物質の層を横切る間には，その弱い力のためニュートリノは散乱されて進行方向をかえたり，他の粒子に転化しうる．もしこれらの力がニユートリノのヘリシティを変えるような力であれば，初めに負ヘリシティを持っていても物質を通った後には正ヘリシティのものが作られるであろう．今日知られている限りにおいてニュートリノの関与する力はヘリシティを変えない力で，2 成分理論が成立しているようにみえる．

質量 0 のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子がこのように自由度 2 の内部状態 v（2 個の自由度の内で 1 個

は反ニュートリノの状態であるから 3-1 表の f は 1 である）で記述されるのに対し，なぜ質量のあるスピン $\frac{1}{2}$ 粒子は 4 個の内部自由度($f=2$) を必要とするのであろうか．いまある Lorentz 系でみて負ヘリシティの状態に粒子が存在したとしよう．この粒子を粒子の運動方向にその粒子の速度より速い速度で動いている新しい Lorentz 系から眺める



7-3 図　粒子のヘリシティと Lorentz 変換 ($V>v$)



7-4 図　空間反転と粒子のヘリシティ ($\boldsymbol{v}'=-\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\sigma}'=\boldsymbol{\sigma}$)

と，粒子の運動量の向きは以前と逆になる．一方，スピンの向きはこの変換で変らないから粒子のヘリシティは正に変る (7-3 図)．したがって Lorentz 変換に対する不変性から結局，正，負のヘリシティ状態が必要になる．これに対し $m=0$ の粒子は常に光速度で走っており，この速度より早い速度で動いている Lorentz 系は存在しないので粒子は常に負ヘリシティ状態にのみ存在する．もちろん空間反転に対する不変性を要求すると，質量の有無にかかわらず正，負ヘリシティの粒子が共に必要になる．これは空間反転すると $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\sigma}\to\boldsymbol{\sigma}$ となり，正（負）ヘリシティの粒子が負（正）ヘリシティの粒子に移るためである (7-4 図)．

γ 行列を使って質量 0 の粒子の Dirac 方程式を書くと，粒子が 4 成分 ($E\gtrless 0$, $h=\pm 1$) を持つときは (7.18) で $m=0$ とおき，

$$\left(\frac{E}{c}\gamma_0-\boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}\right)\psi=0 \tag{7.79}$$

となる．これは 4 成分ニュートリノの方程式で，ニュートリノ・反ニュートリノの両方がそれぞれ $h=\pm1$ の両方のヘリシティ状態を持つ場合に相当する．このときの解は(7.37), (7.39) で $m=0$ に対応して $c|\boldsymbol{p}|=|E|$ とおけばよく，$\boldsymbol{p}/\!/z$ の場合を書くと，

$$\begin{aligned}
u(p,1)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad u(p,-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad E>0\\
v(p,1)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad v(p,-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\quad E<0
\end{aligned} \tag{7.80}$$

である.

もしニュートリノが2成分しか持たず左巻きのニュートリノと右巻きの反ニュートリノすなわち $u(p,\ -1)$ と $v(p,\ 1)$ のみが許される解のときは (7.30) の γ_5 を使って許される解は,

$$(1+\gamma_5)\psi=0$$

をみたすことがわかる. また右巻きのニュートリノと左巻きの反ニュートリノの場合には

$$(1-\gamma_5)\psi=0.$$

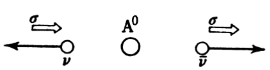
実際のニュートリノは前者の場合で, このときの2成分ニュートリノの方程式は,

$$\left(\frac{E}{c}\gamma_0-\boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}\right)\psi=0, \quad (1+\gamma_5)\psi=0 \tag{7.81}$$

と書ける. 第2式は4成分を2成分に減らす条件式で (7.78) で $u=0$ とおくことに相当する. $(1+\gamma_5)\psi=0$ の関係は $\bar{\chi}\psi$, $\bar{\chi}\gamma_5\psi$ (χ は任意の4成分スピノル) が共に Lorentz 変換に対しスカラーのことから, どの Lorentz 座標系でも成り立つ関係式である. ただし空間反転に対しては一方がスカラー他方が疑スカラー量であるため不変ではなく(7.81)は明らかにパリティ不変性を破っている.

〔問題 7.4〕 スピン0の中性粒子 A^0 がニュートリノ (ν) と反ニュートリノ ($\bar{\nu}$) にこわれ得ないことを示せ. また A^0 がスピン1の場合を論ぜよ.

〔略解〕 A^0 の崩壊 $A^0\to\nu+\bar{\nu}$ を A^0 の静止系で考えよう. 運動量の保存則から ν と $\bar{\nu}$ は反対方向 (大きさは同じ) の運動量を持つ. 次に角運動量の保存則, 特に ν (および $\bar{\nu}$) の運動方向の角運動量成分の保存則を考えよう. A^0 はスピン0であるから, ν と $\bar{\nu}$ のスピン成分の和は0でなければならない.



7-5 図 $A^0\to\nu+\bar{\nu}$ 崩壊

ν のヘリシティは常に -1, $\bar{\nu}$ のそれは $+1$ であるから, ν の運動量 p 方向のスピン成分はそれぞれ $-\frac{1}{2}$, したがって和は常に -1 で0にならず崩壊は禁止される. これに対し A^0 のスピンが1であれば, ν の出る方向のスピン成分 $\pm1,\ 0$ の三つの異なる状態が存在するから, -1 のスピン状態にある A^0 は ν と $\bar{\nu}$ を出して崩壊する. 一般に A^0 のスピンの向きと反対方向に ν, 同方向に $\bar{\nu}$ を放出しうる.

§7.5 空間反転, 時間反転, 粒子・反粒子反転

§6.6 で Bose 粒子の量子化された場が空間反転, 時間反転, 粒子・反粒子反転でどのように変換するかを調べた. ここでは量子化されたスピン $\frac{1}{2}$ 粒子の場がこれら反転に対してどう変換するかを調べよう.

〔空間反転〕

空間反転 ($\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r}$, $t\to t$) に対し粒子の $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\sigma}$, h は (7.44) のように変換しなければならないから，粒子・反粒子の生成・消滅の演算子は次のように変換すると考えよう．

$$a(\boldsymbol{p},\ h)\to\eta_p a(-\boldsymbol{p},\ -h),\quad a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)\to\eta_p{}^* a^\dagger(-\boldsymbol{p},\ -h),$$
$$b(\boldsymbol{p},\ h)\to\zeta_p b(-\boldsymbol{p},\ -h),\quad b^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)\to\zeta_p{}^* b^\dagger(-\boldsymbol{p},\ -h).$$

η_p, ζ_p は位相因子で $|\eta_p|=|\zeta_p|=1$ である．

この変換により (7.53) の $\psi(x)$ は (7.43) を使うと次のように変る．

$$\psi(\boldsymbol{r},\ t)\to\frac{1}{\sqrt{L^3}}\sum_h\sum_{\boldsymbol{p}}\{\eta_p a(-\boldsymbol{p},\ -h)u(\boldsymbol{p},\ h)\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)$$
$$+\zeta_p{}^* b^\dagger(-\boldsymbol{p},\ -h)v(-\boldsymbol{p},\ h)\exp-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{L^3}}\sum_h\sum_{\boldsymbol{p}}\{\eta_p a(\boldsymbol{p},\ h)\gamma_0 u(\boldsymbol{p},\ h)\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{r})-Et)$$
$$-\zeta_p{}^* b^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)\gamma_0 v(-\boldsymbol{p},\ h)\exp-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{r})-Et)\}.$$

一方，変換後の ψ が点 ($-\boldsymbol{r}$, t) における場で書き表わせるためには $-\zeta_p{}^*=\eta_p$ が必要で，この場合 $\psi(\boldsymbol{r},\ t)$ は $\eta_p\gamma_0\psi(-\boldsymbol{r},\ t)$ に移る．$\bar{\psi}(\boldsymbol{r},\ t)$ に同一の変換を行なうと $\bar{\psi}(\boldsymbol{r},\ t)$ は $\eta_p{}^*\bar{\psi}(-\boldsymbol{r},\ t)\gamma_0$ に移る．

したがって空間反転は，

$$a(\boldsymbol{p},\ h)\to\eta_p a(-\boldsymbol{p},\ -h),\quad a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)\to\eta_p{}^* a^\dagger(-\boldsymbol{p},\ -h),$$
$$b(\boldsymbol{p},\ h)\to-\eta_p{}^* b(-\boldsymbol{p},\ -h),\quad b^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)\to-\eta_p b^\dagger(-\boldsymbol{p},\ -h)\qquad(7.82)$$

で表わされ，ψ, $\bar{\psi}$ は次のように変換する

$$\psi(\boldsymbol{r},\ t)\to\eta_p\gamma_0\psi(-\boldsymbol{r},\ t),\quad \bar{\psi}(\boldsymbol{r},\ t)\to\eta_p{}^*\bar{\psi}(-\boldsymbol{r},\ t)\gamma_0.\qquad(7.83)$$

粒子と反粒子とが等しい場合 ($a=b$, $a^\dagger=b^\dagger$) は $\eta_p=-\eta_p{}^*$, $\eta_p=\pm i$ であるが，今日まで知られている Fermi 粒子はすべて粒子とその反粒子は異なる粒子である．さて b, $b^\dagger$ の変換に現われる負符号は粒子と反粒子が異なるパリティを持つことを示している．このことを示すために粒子と反粒子1個ずつよりなる系を考えよう．その重心が静止している場合には粒子と反粒子は反対向きの運動量を持つからこの状態は次のように書ける．

$$\sum_{h_+,h_-}\sum_{\boldsymbol{p}}\psi(\boldsymbol{p},\ h_+,\ h_-)a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h_+)b^\dagger(-\boldsymbol{p},\ h_-)|0\rangle.\qquad(7.84)$$

空間反転 (7.82) を行なうと，

$$\sum_{h_+,h_-}\sum_{\boldsymbol{p}}\psi(\boldsymbol{p},\ h_+,h_-)(-\eta_p\eta_p{}^*)a^\dagger(-\boldsymbol{p},\ -h_+)b^\dagger(\boldsymbol{p},\ -h_-)|0\rangle$$
$$=-\sum_{h_+,h_-}\sum_{\boldsymbol{p}}\psi(-\boldsymbol{p},\ -h_+,\ -h_-)a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h_+)b^\dagger(-\boldsymbol{p},\ h_-)|0\rangle$$

に移る．$\psi(-\boldsymbol{p},\ -h_+,\ -h_-)$ は $\psi(\boldsymbol{p},\ h_+,\ h_-)$ で運動量の符号を変えスピンをそのまま保ったものであるから，ψ を第5章で論じたように軌道運動の部分とスピン部分の積に書くと，この変換はスピン部分を変えずに軌道運動の部分の $\boldsymbol{p}$ を $-\boldsymbol{p}$ に変える．軌道角運動量 $l(=0, 1, 2, \cdots)$ の固有状態を考えると $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$ により波動関数は $(-1)^l$ 倍になるから，結局一定の軌道角運動量 l を持つ粒子・反粒子系の状態は空間反転により $(-1)\times(-1)^l$ 倍になる．初めの (-1) は軌道運動によらない部分で粒子・反粒子系の**内部パリティ**という．

粒子が1個静止している状態は，

$$\lim_{\boldsymbol{p}\to 0} a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)|0\rangle$$

であるが，これに対し空間反転 (7.82) を行なうと，

$$\lim_{\boldsymbol{p}\to 0} \eta_p{}^* a^\dagger(-\boldsymbol{p},\ -h)|0\rangle.$$

二つの状態 $(\boldsymbol{p},\ h)$ と $(-\boldsymbol{p},\ -h)$ は同方向のスピンを持ち $\boldsymbol{p}\to 0$ の極限では同一の状態を表わすから，静止した1個の粒子は空間反転に対し固有値 $\eta_p{}^*$ を持つ．同様に反粒子は固有値 $-\eta_p$ を持つ．η_p は $|\eta_p|=1$ である限り任意で，したがって粒子・反粒子それぞれのパリティは定義できないが，両者のパリティの積は常に -1 である．通常 $\eta_p=1$ にとり粒子は $+1$ のパリティ，反粒子はしたがって -1 のパリティを持つという．

このように粒子と反粒子とのパリティは異符号であるが，異なる Fermi 粒子間のパリティの決定は自由粒子の場の議論から決まらずに粒子間の転換の実験に頼らなければならない．たとえば2種の Fermi 粒子 a, b があって，a と反粒子 $\bar{b}$ とが衝突していくつかの Bose 粒子 c, d, $\cdots$ の系に移る場合，

$$a+\bar{b}\to c+d+\cdots,$$

衝突後の状態の全パリティ P' と衝突前の $a+\bar{b}$ 状態の軌道角運動量 l がわかっていれば，衝突が空間反転に対し不変である場合には，パリティ保存則より，

$$P_aP_{\bar{b}}(-1)^l=P'\to P_aP_b=-(-1)^lP' \tag{7.85}$$

となる．P_a, P_b は a, b の（内部）パリティで，この種の実験からは P_aP_b の積のみが定まる．$P_aP_b=+1$ のときは　両者のパリティは同一，$P_aP_b=-1$ のときは異符号である．

一般に Fermi 粒子には粒子数の保存則があり，いろいろな衝突・崩壊等が起こるときに常に Fermi 粒子の総数からそれらの反粒子の総数を引いたものは衝突前後で不変にな

る．したがって Fermi 粒子のパリティを論ずるには2個の粒子間の相対的パリティのみが意味を持つ．Bose 粒子の場合は一個の粒子がなくなって他の粒子になってしまうことがあるので，粒子の絶対的なパリティを決めることができる．たとえば $\pi^0 \to 2\gamma$ から π^0 のパリティが決められる（§ 10.1 参照）．パリティの保存する現象では重粒子数，電荷，strangeness と3個の保存量があるので，3個の粒子のパリテイは任意に与えてよい（69ページ）．そこで陽子，中性子，ラムダ粒子のパリティを $+1$ とすれば，他の重粒子のパリティはこれから相対的に決められるはずである．軽粒子については，電磁的相互作用では電子$\longrightarrow\mu$ 中間子のような異なる粒子への変換は起こらず，粒子の転換が起こる崩壊の相互作用ではパリティが反応の前後で保存されないので（第12章），これによって軽粒子のパリティを決めることはできない．したがって軽粒子のパリティは勝手に（たとえば，すべての粒子はパリティ $+$，反粒子は $-$）与えることができる．このようにして決められたパリティが 1-2 表のパリティである．

〔時間反転〕

Bose 粒子の場と同様に（§ 6.6 参照）Fermi 粒子の場に時間反転を行なうと a, $a^\dagger$, b, $b^\dagger$ は次のように変換する．

$$a(\boldsymbol{p}, h) \to \eta_T(h)a^\dagger(-\boldsymbol{p}, h), \quad a^\dagger(\boldsymbol{p}, h) \to \eta_T^*(h)a(-\boldsymbol{p}, h),$$
$$b(\boldsymbol{p}, h) \to \zeta_T(h)b^\dagger(-\boldsymbol{p}, h), \quad b^\dagger(\boldsymbol{p}, h) \to \zeta_T^*(h)b(-\boldsymbol{p}, h).$$

またいろいろな演算子の積は個々の演算子が上の変換を受けるだけでなく，その積の順序が入れ換わる．このことは § 6.6 で論じたと同様に粒子間の衝突で各粒子の運動量・スピンの向きを変え，さらに時間の向きを変えて衝突を眺めることに相当する（6-10 図参照）．

さて (7.53) の $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ に上の変換を行ない，(7.50) の関係を使うと，

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) \to \frac{1}{\sqrt{L^3}}\sum_h\sum_{\boldsymbol{p}}\Big\{\eta_T(h)a^\dagger(-\boldsymbol{p}, h)hU_T u^*(-\boldsymbol{p}, h)\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)$$
$$+\zeta_T^*(h)b(-\boldsymbol{p}, h)-hU_T v^*(\boldsymbol{p}, h)\exp-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)\Big\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{L^3}}\sum_h\sum_{\boldsymbol{p}}\Big\{\eta_T(h)ha^\dagger(\boldsymbol{p}, h)U_T\gamma_0\bar{u}^T(\boldsymbol{p}, h)\exp\frac{-i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-E(-t))$$
$$-\zeta_T^*(h)hb(\boldsymbol{p}, h)U_T\gamma_0\bar{v}^T(-\boldsymbol{p}, h)\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-E(-t))\Big\}$$

となり，これが点 $(\boldsymbol{r}, -t)$ での場で表わされるためには，これと $\bar{\psi}(\boldsymbol{r}, -t)$(7.54) とを比較して $-h\zeta_T^*(h)=h\eta_T(h)=\eta_T$ でなければならない．η_T は $h\ (=\pm 1)$ によらない位相因子である（$|\eta_T|=1$）．

したがって時間反転により，

$$a(\boldsymbol{p},\ h)\to\eta_T h a^\dagger(-\boldsymbol{p},\ h),\qquad a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)\to\eta_T^* h a(-\boldsymbol{p},\ h),$$
$$b(\boldsymbol{p},\ h)\to-\eta_T^* h b^\dagger(-\boldsymbol{p},\ h),\quad b^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)\to-\eta_T h b(-\boldsymbol{p},\ h)\qquad(7.86)$$

となり，またこれら演算子の積ではその積の順序を逆転する．(7.86)より時間反転に対し

$$\psi(\boldsymbol{r},\ t)\to\eta_T U_T\gamma_0\bar{\psi}^T(\boldsymbol{r},\ -t),\ \bar{\psi}(\boldsymbol{r},\ t)\to\eta_T^*\psi^T(\boldsymbol{r},\ -t)\gamma_0 U_T^\dagger$$
$$=-\eta_T^*\psi^T(\boldsymbol{r},\ -t)\gamma_0 U_T\qquad(7.87)$$

となる．

さて，いくつかの独立な運動量 $\boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots)$ スピン角運動量 $\boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2,\ \cdots)$ 等があったとき，これから作られる量，

$$(\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_j),\ (\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{S}_j),\ (\boldsymbol{p}_i\times\boldsymbol{p}_j\cdot\boldsymbol{S}_k\times\boldsymbol{S}_l),\ \cdots$$

および，

$$\boldsymbol{p}_i,\ \boldsymbol{S}_i,\ (\boldsymbol{p}_i\times\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{S}_k),\ \cdots$$

等の時間反転に対する性質を調べると (7.52) より明らかなように時間反転によりそれぞれ $+1$ および -1 がかかる．したがって，これらの量はそれぞれ $+1$ または -1 の時間パリティを持つといってもよい．しかし空間反転の場合と異なり，たとえば粒子が1個存在する状態，

$$a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)|0\rangle$$

を作ってみると，これは時間反転により，

$$\eta_T^* h\langle 0|a(-\boldsymbol{p},\ h)$$

に移る．すなわち変換前は（真空状態）→（粒子）の遷移の振幅を表わしていた量は変換後は（粒子）→（真空状態）の遷移を表わすことになり．互に異なる現象に関与してしまう．したがって個々の素粒子，あるいは一般に個々の状態の時間パリティという概念は存在しない．

次にいろいろな物理量のある状態についての期待値を考えよう．1個の素粒子の存在する状態 $a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)|0\rangle$ におけるその粒子の $\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{S}$ 等の平均値は，

$$\langle\boldsymbol{p}\rangle=\langle 0|a(\boldsymbol{p},\ h)\boldsymbol{p}a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)|0\rangle,\ \langle\boldsymbol{S}\rangle=\langle 0|a(\boldsymbol{p},\ h)\boldsymbol{S}a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)|0\rangle$$

であるが，$a,\ a^\dagger$ に対して時間反転を行なうと，

$$\langle\boldsymbol{p}\rangle\to|\eta_T|^2h^2\langle 0|a(-\boldsymbol{p},\ h)\boldsymbol{p}a^\dagger(-\boldsymbol{p},\ h)|0\rangle=-\langle\boldsymbol{p}\rangle,$$
$$\langle\boldsymbol{S}\rangle\to|\eta_T|^2h^2\langle 0|a(-\boldsymbol{p},\ h)\boldsymbol{S}a^\dagger(-\boldsymbol{p},\ h)|0\rangle=-\langle\boldsymbol{S}\rangle$$

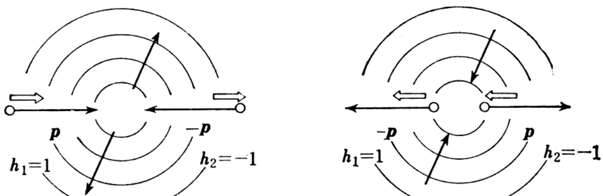
となり，確かに (7.52) の変換にしたがっている．同様に何個かの素粒子からなる系で，これら粒子が互に無関係に自由に運動しているときには，時間パリティ正の量の期待値は

元のままで，負の量の期待値は符号を変える．

これに反し粒子間に力が働いている場合の状態では事情が異なってくる．一例として運動量$\boldsymbol{p}$，$-\boldsymbol{p}$の2個の粒子の存在する状態を考えよう．この状態はもし2粒子間に力がなければ，

$$a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h_1)a^\dagger(-\boldsymbol{p},\ h_2)|0\rangle$$

で表わされる．(h_1, h_2 はそれぞれの粒子のヘリシテイ)．実際には粒子間に力が働くので初め ($\boldsymbol{p}$, h_1), ($-\boldsymbol{p}$, h_2) にあった状態も粒子相互の衝突により散乱波を生じ $\boldsymbol{p}$ と異なる方向に進む波を含むようになる．そこで ($\boldsymbol{p}$, h_1), ($-\boldsymbol{p}$, h_2) の入射波とその衝突により生ずる散乱波を含む状態を $\psi_{\text{out}}(\boldsymbol{p},\ h_1,\ h_2)$ と書くことにする (7-6 図(a))．さて，この状態 ψ_{out} に時間反転を行なうと，入射波 ($\boldsymbol{p}$, h_1; $-\boldsymbol{p}$, h_2) は時間反転により ($-\boldsymbol{p}$, h_1; $\boldsymbol{p}$, h_2) となり，進行方向が ψ_{out} と反対の平面波になる．ψ_{out} に含まれる散乱波は同



(a) outgoing wave　　(b) incoming wave

7-6 図

様に運動量の向きが変るから，衝突中心に向って進む球面波になる (7-6 図(b))．このように球面波が入射して $-\boldsymbol{p}$ 方向に平面波がでていく波を $\psi_{\text{in}}(-\boldsymbol{p},\ h_1,\ h_2)$ と書き，outgoing wave ψ_{out} に対し incoming wave ψ_{in} という．時間反転により相互に移り変る．

もし2粒子間に力が働かず散乱波のないときは ψ_{in}, ψ_{out} のいずれも平面波で互に運動量の向きを変えた関係になっている．

さて，ある物理量Aの ψ_{out} 状態における期待値を，

$$\langle A\rangle=\langle\psi_{\text{out}}(\boldsymbol{p},\ h_1,\ h_2)|A|\psi_{\text{out}}(\boldsymbol{p},\ h_1,\ h_2)\rangle \tag{7.88}$$

ととると，この期待値は時間反転により次の量に移る．

$$\langle A_T\rangle=\langle\psi_{\text{in}}(-\boldsymbol{p},\ h_1,\ h_2)|A|\psi_{\text{in}}(-\boldsymbol{p},\ h_1,\ h_2)\rangle. \tag{7.89}$$

もし粒子間に力の働いていないときは ψ_{out}, ψ_{in} はそれぞれ $a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h_1)a^\dagger(-\boldsymbol{p},\ h_2)|0\rangle$, $a^\dagger(-\boldsymbol{p},\ h_1)a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h_2)|0\rangle$ となり，A の時間パリティの正負に応じて

$$\langle A_T \rangle = \pm \langle A \rangle$$

となる．しかし一般にはこの関係は成立せず $\psi_{\rm in}$ と $\psi_{\rm out}$ の関係を論じなければ $\langle A_T \rangle$ と $\langle A \rangle$ の関係は定まらず，A の時間パリティだけでなく散乱のようすによって $\langle A \rangle$ と $\langle A_T \rangle$ の関係が決まる．（この点については 380 ページ参照）．

［粒子・反粒子反転］

§7.3 で ψ を粒子の吸収，反粒子の生成の演算子と考え，また $\bar{\psi}$ を粒子の生成・反粒子の吸収の演算子と考えた．粒子と反粒子は同一のスピン・質量を持ち，少なくとも自由に運動している限り粒子と反粒子は同等である．したがって，ψ を粒子の生成・反粒子の吸収を行なう場，$\bar{\psi}$ を粒子の吸収・反粒子の生成を行なう場と考えることもできるはずである．このことは文字通り粒子と反粒子を交換する変換を行なうことに相当する．

$$a(\boldsymbol{p},\ h) \to \eta_c(h) b(\boldsymbol{p},\ h), \quad a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h) \to \eta_c^*(h) b^\dagger(\boldsymbol{p},\ h).$$

$$b(\boldsymbol{p},\ h) \to \zeta_c(h) a(\boldsymbol{p},\ h), \quad b^\dagger(\boldsymbol{p},\ h) \to \zeta_c^*(h) a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h).$$

この変換を (7.53) に代入し，(7.77) を使うと，

$$\psi(x) \to \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_h \sum_{\boldsymbol{p}} \Big\{ \eta_c(h) b(\boldsymbol{p},\ h) U_c \bar{v}^T(-\boldsymbol{p},\ h) \exp \frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr} - Et)$$

$$+ \zeta_c^*(h) a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h) U_c\, \bar{u}^T(\boldsymbol{p},\ h) \exp - \frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{pr} - Et) \Big\}$$

となり，同じ点 x の場の量（$\psi(x)$）で表わされるためには，

$$\eta_c(h) = \zeta_c^*(h) = \eta_c.$$

η_c は h によらない位相因子である．

したがって，変換は，

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{p},\ h) &\to \eta_c b(\boldsymbol{p},\ h), \quad a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h) \to \eta_c^* b^\dagger(\boldsymbol{p},\ h), \\ b(\boldsymbol{p},\ h) &\to \eta_c^* a(\boldsymbol{p},\ h), \quad b^\dagger(\boldsymbol{p},\ h) \to \eta_c a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h). \end{aligned} \tag{7.90}$$

またこの変換により，

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \eta_c U_c \bar{\psi}^T(x) = -\eta_c \gamma_5 U_T \bar{\psi}^T(x), \\ \bar{\psi}(x) &\to -\eta_c^* \psi^T(x) U_c = \eta_c^* \psi^T(x) U_T \gamma_5 \end{aligned} \tag{7.91}$$

となる．この変換 (7.90), (7.91) を **粒子・反粒子反転** または **charge conjugation**（**荷電共役変換**）という．

同数個の粒子と反粒子とを含む系を考えると，粒子・反粒子反転 C を行なっても粒子・反粒子数は反転前と前じで C の固有状態になりうる．一例として電子 e^- と陽電子 e^+ 1 個ずつからなる系を考えると，その状態は重心系で次のように書ける．

$$\sum_{h_+, h_-} \sum_{\boldsymbol{p}} \psi(\boldsymbol{p},\ h_+,\ h_-) a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h_+) b^\dagger(-\boldsymbol{p},\ h_-) |0\rangle.$$

粒子・反粒子反転を行なうと，この状態は次のように変る（交換関係（7.67）を使う）

$$\sum_{h_+,h_-}\sum_{\boldsymbol{p}}\psi(\boldsymbol{p},\ h_+,\ h_-)b^\dagger(\boldsymbol{p},\ h_+)a^\dagger(-\boldsymbol{p},\ h_-)|0>$$

$$=-\sum_{h_+,h_-}\sum_{\boldsymbol{p}}\psi(\boldsymbol{p},\ h_+,\ h_-)a^\dagger(-\boldsymbol{p},\ h_-)b^\dagger(\boldsymbol{p},\ h_+)|0>$$

$$=-\sum_{h_+,h_-}\sum_{\boldsymbol{p}}\psi(-\boldsymbol{p},\ h_-,\ h_+)a^\dagger(\boldsymbol{p},\ h_+)b^\dagger(-\boldsymbol{p},\ h_-)|0>.$$

したがって粒子・反粒子反転に対するパリティを C と書くと，

$$\psi(\boldsymbol{p},\ h_+,\ h_-)=\pm\psi(-\boldsymbol{p},\ h_-,\ h_+)$$

に応じて，$C=\mp1$ になる．$\psi(\boldsymbol{p},\ h_+,\ h_-)$ を軌道部分とスピン部分に分けて書くと $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$ により軌道部分は $(-1)^l$ 倍になる．l は軌道角運動量である．また $h_\pm\to h_\mp$ は粒子と反粒子のスピンの交換を行なうことに相当し，スピン角運動量 $S=1,\ 0$ に応じて ψ のスピン部分は $+1$ または -1 倍になる（$=(-1)^{S+1}$ 倍）．したがって $\boldsymbol{L}^2$，$\boldsymbol{S}^2$ の固有状態に対して，

$$\psi(\boldsymbol{p},\ h_+,\ h_-)=(-1)^{l+S+1}\psi(-\boldsymbol{p},\ h_-,\ h_+).$$

これより，

$$C=(-1)^{l+S} \tag{7.92}$$

が得られる．

[*CPT* 不変性]

第 6, 7 章でBose 粒子および Fermi 粒子の場が空間反転 P，時間反転 T，粒子・反粒子反転Cによりどのように変換するかを調べた．これらの変換性を用いるといろいろな場から作られる物理量の $C,\ P,\ T$ に対する変換性がわかる．荷電スカラー場 φ，電磁場 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$，および Dirac 粒子の場 ψ から作られるエルミット量の変換性を表にしてみよう（問題 7.5 参照）．

		P	T	C	PTC
$\varphi^\dagger\varphi$	スカラー	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}$	〃	-1	-1	$+1$	$+1$
$\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{H}^2$	〃	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$\bar{\psi}\psi$	〃	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$i\bar{\psi}\gamma_5\psi$	〃	-1	-1	$+1$	$+1$
$i(\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi-\partial_\mu\varphi^\dagger\varphi)$	ベクトル	ε_μ	ε_μ	-1	-1
$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$	〃	ε_μ	ε_μ	-1	-1
$\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$	〃	$-\varepsilon_\mu$	ε_μ	$+1$	-1
$\partial_\mu\varphi^\dagger\partial_\nu\varphi+\partial_\nu\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi$	テンソル	$\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu$	$\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu$	$+1$	$+1$
$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$	〃	$\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu$	$-\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu$	-1	$+1$

ただし　$\varepsilon_\mu=\begin{cases}+1 & \mu=0\\ -1 & \mu=1,\ 2,\ 3.\end{cases}$

この表には φ, ψ, A_μ から作られる2次の量のみを記した．これら2次の量の C, P, T に対する変換の際には位相因子 η_C, η_P, η_T 等は $|\eta_C|^2=|\eta_P|^2=|\eta_T|^2=1$ のために変換に効いてこない．さて注目すべきことは，いろいろなこれらエルミット量を Lorentz 変換に対してスカラー，ベクトル，テンソルの変換をするものに分類してみると，CPT によりスカラー量はすべて $+1$，ベクトル量は -1，テンソル量は $+1$ がかかり，CPT 変換は，たとえばスカラー量がスカラーであるか疑スカラーであるかを区別しないことである．

素粒子間の衝突等を支配する物理法則は，ある二つのスカラー量 A, B の間の関係 $A=B$，または一般に同一の Lorentz 変換性を持つ二つの量の間の等式として表わされる．すなわちこれら物理法則はどの Lorentz 座標系から眺めても同一になっている．この両辺に CPT 変換を行なうと，A, B は共にスカラー，またはベクトル，またはテンソルであるから同一の因子 $+1$ または -1 がかかるだけで方程式は不変になる．したがって，物理法則が Lorentz 変換に対して不変な限り同時に CPT 変換に対して不変になっている．これに反し C, P, T それぞれの変換を考えると A, B の C, P, T に対する変換性は必ずしも同一でなく，変換後の式は $A=-B$ になることもあり，Lorentz 不変性は C, P, T 変換のそれぞれに対する不変性を保証しない．

〔問題 7.5〕 Dirac 粒子の場 $\psi, \bar{\psi}$ から作られるエミット量 $\bar{\psi}O\psi(O=1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_5\gamma_\mu, i\gamma_5)$ が空間反転 P，時間反転 T，粒子・反粒子反転 C でどのように変換されるかを調べよ．

〔解〕 (7.83)，(7.87)，(7.91) の変換を行ない，γ 行列の性質を用いる．たとえば時間反転では (7.47) で与えられる U_T で，

$$\bar{\psi}\psi \to -(|\eta_T|^2\psi^T\gamma_0 U_T U_T \gamma_0 \bar{\psi}^T)_{tr} = \bar{\psi}\psi.$$

ただし $(\quad)_{tr}$ は演算子の積の順序を逆にすることを意味する．以下同様にして前ページの表が得られる．

〔問題 7.6〕 自由電子の速度演算子 $d\boldsymbol{r}/dt$ は $c\boldsymbol{\alpha}$ に等しく，その各成分の固有値は $\pm c$，また運動量 $\boldsymbol{p}$ の自由電子の状態におけるその期待値は $c\boldsymbol{p}/E$ で与えられることを示せ．

〔問題 7.7〕 4次元運動量 p_μ $(\boldsymbol{p}, E/c)$ の自由電子の解を $u(\boldsymbol{p}, h)$ $(E>0)$，$v(\boldsymbol{p}, h)$ $(E<0)$ としたとき次式を導け．

$$\sum_h u_\alpha(\boldsymbol{p}, h)\bar{u}_\beta(\boldsymbol{p}, h) = \frac{(-\gamma_\mu p_\mu + mc)_{\alpha\beta}}{2p_0},$$

$$\sum_h v_\alpha(-\boldsymbol{p}, h)\bar{v}_\beta(-\boldsymbol{p}, h) = \frac{(-\gamma_\mu p_\mu - mc)_{\alpha\beta}}{2p_0}.$$

第8章　荷電粒子と電磁場の相互作用

§8.1　荷電の保存則

素粒子の中で電子・陽子・$\pi^{\pm}$ 中間子など荷電を持ったものと，中性子・π^0 中間子・光子のように荷電を持たないものとがある．荷電量 Q の素粒子が静電場 $\boldsymbol{E}$ の中を通過すると $Q\boldsymbol{E}$ の力を受け，そのため電場の方向に加速される．この時の曲り方の向きから Q の符号がわかり，またその曲り方の大きさから Q の大きさがわかる．さて，いろいろな素粒子間の衝突が起こると，散乱，新しい粒子の生成，他の粒子への転換等が起こる．たとえば 1-1, 1-2, 1-3 図では次のような衝突，崩壊が起こっていた．

$$\bar{p}+p\to\pi^++\pi^++\pi^-+\pi^-+\pi^0 \qquad \pi^+\to\mu^++\nu$$

$$K^-+p\to\Xi^-+K^+ \qquad \mu^+\to e^++\nu+\bar{\nu}$$

$$\Xi^-\to\Lambda^0+\pi^-.$$

これらのどの反応をとってみても，陽子の荷電を単位にして $p, \pi^+, \mu^+, e^+, K^+$ は $+1$, $\bar{p}, \pi^-, \Xi^-, K^-$ は -1, π^0, ν, Λ^0 は 0 の荷電を持っているとすれば，反応前後で系の総荷電は保存されている．

さて荷電量の大きさは二通りの方法で決めることができる．第一の方法は，いろいろな衝突の前後で総和が保存される量を求めるやり方である．たとえば陽子の荷電量を或る単位で 1，中性子の荷電量を 0 と決めたとしよう．もし，$p+p\to p+n+\pi^+$ の反応が実験的に起こることがわかれば，荷電を保存するためには π^+ の荷電は $+1$ でなければならない．また $p+p\to p+p+\pi^0$ 反応が起こることから，π^0 の荷電は 0 であることがわかる．このようにして各粒子の荷電量はいろいろな反応で荷電が保存することを仮定して決められるだけでなく，一たんある反応を用いて粒子の荷電を決めると，こんどは別の反応を用いて既に定めた荷電量が保存されているかどうかを確かめられる．たとえば次のような反応がみつかれば荷電は保存されないことになる

$$\text{反応}\quad p+p\to p+p+\pi^+,\qquad p+n\to p+p+\pi^0.$$

$$\text{荷電}\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1,\qquad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0.$$

素粒子間のいろいろな衝突では現在まで知られている限り，1-2 表で与えられる素粒子の荷電は保存されている．これを**荷電の保存則**という．あるいは §8.2 で述べる荷電の保存則と区別するために**第一種の荷電の保存則**とよぼう．

第7章で述べたように電子の場を $\psi(x)$ で表わすと，ψ は電子の吸収および陽電子の

生成を表わす．ところで ψ が一定の荷電量の変化を起こす演算子であるためには，電子の吸収および陽電子の生成に伴う荷電の変化は同一でなければならない．このことは電子の荷電量と陽電子の荷電量とが大きさが同じく符号が反対のことを要求する．一般に電子に限らず，すべての粒子はその反粒子と反対符号で同一の大きさの荷電を持つ．特に π^0 中間子，光子などそれ自身が反粒子と等しいものは，したがって荷電は 0 になる．

素粒子間の衝突または素粒子の崩壊の前後で例外なく保存されている量が荷電の他にも 2 個存在することが実験的に確かめられている．これらはそれぞれ**重粒子数** n_B，**軽粒子数** n_L とよばれている．重粒子数．軽粒子数は 8-1 表で与えられる．Bose 粒子に対しては共に 0，Fermi 粒子に対しては荷電の場合と同様に粒子と反粒子で同一の大きさで反対符号で，粒子に対しては常に $+1$，反粒子に対しては常に -1 である．

$$p+p\to p+n+\pi^+,\quad n\to p+e^-+\bar{\nu},\quad K^-+p\to \Lambda^0+\pi^0$$

等の反応で，これら Q, n_B, n_L が保存していることは明らかであり，また n_B, n_L の保存を破る，

$$p\to e^++\gamma,\quad p+p\to p+\pi^+$$

等の反応は実験的に見つかっていない．(n_L の保存は実験的に ν と $\bar{\nu}$ とを区別するのが非常に難しいので，n_B の保存程いろいろな現象につきよくは確かめられていない．しかし今日まで n_L の保存を破るような実験的事実は存在しない．)

8-1 表　素粒子の重粒子数 n_B および軽粒子数 n_L

	n_B	n_L
p, n, Λ, $\Sigma^{\pm,0}$, $\Xi^{0,-}$	1	0
$\bar{p}$, $\bar{n}$, $\bar{\Lambda}$, $\bar{\Sigma}^{\pm,0}$, $\bar{\Xi}^{0,-}$	-1	0
μ^-, e^-, ν_e, ν_μ	0	1
μ^+, e^+, $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$	0	-1
$\pi^{\pm,0}$, $K^\pm$, $K^0_{1,2}$, γ	0	0

また 8-1 表の μ, e, ν に対する n_L は普通に用いられている n_L であるが．μ^-, ν_μ の n_L を -1, e^-, ν_e の n_L を $+1$ にとることも可能で，n_L の保存と現在知られている実験だけからではこの可能性を除けない．

$n_B=1$ の Fermi 粒子は Fermi 粒子の中でも質量の重いもので**重粒子** (baryon) といわれる．一方，$n_L=1$ の Fermi 粒子は μ, e, ν_e, ν_μ の 4 種類でいずれも baryon より非常に軽く**軽粒子** (lepton) といわれる．特にニュートリノ ν_e, ν_μ の質量は 0 と考えられる．ニュートリノに関する実験は最近になって急速な進歩をとげ，2 種類のニュートリノの存在が知られている．中性子の β 崩壊等で作られる ν_e と $\pi-\mu$ 崩壊等で作られる ν_μ で，ν_e は常に電子が，ν_μ は μ 中間子が転化して作られているようにみえる．もし (e^-, ν_e) と (μ^-, ν_μ) との間の変換が起こらなければ軽粒子数の保存則は (e^-, ν_e)－数の保存則と (μ^-, ν_μ)－数の保存則の二つに分れる．これらの点は今後実験的に急速に明らかにされるであろう．

さて，Q, n_B, n_L の単位は上の決め方からは任意であり，たとえば Q についてはその単位が e（電子の荷電量の大きさ）である必要は少しもない．さらに Q, n_B, n_L がそれぞれ保存されることから，それらの任意の1次結合 $Q'=aQ+bn_B+cn_L$(a, b, c は任意の定数）も保存されることは明らかでこの Q' を荷電ということもできる．まず重要な点は Q, n_B, n_L が保存されるということよりむしろ 3 個の独立な保存量が存在することである．n_B, n_L が 8-1 表で与えられるとき，第 3 の保存量である荷電を決めるには係数 a, b, c の任意性に対応し3個の素粒子の荷電は任意にえらびうる．たとえば p, π^+, e^- の Q を $+1$, $+1$, -1 として他の粒子の Q を保存則を使って決めていくことができる．しかし，このような3個の素粒子のえらび方は勝手にとるわけにはいかない．第一に粒子 a と反粒子 $\bar{a}$ の間には $Q_a=-Q_{\bar{a}}$, 特にそれ自身が反粒子になっている π^0 中間子，光子に対しては $Q=0$ でなければならないから，3 個の中に粒子とその反粒子を同時に含めてはいけない．また π^0 中間子，光子は除外されねばならない．次に軽粒子の干与しない現象（$n_L=0$）では保存量は Q と n_B だけで2個しかない．したがって軽粒子以外の素粒子の Q は2個の素粒子の Q を決めれば決まってしまう．そのために3個の中で少くとも1個は軽粒子（または反軽粒子）でなければならない．まったく同様に重粒子の干与しない現象では（$n_B=0$）保存量は Q と n_L の2個しかないから，3 個の中で少くとも1個は重粒子（または反重粒子）からえらばなくてはならない．

さて荷電 Q_a, Q_b, $\cdots$ を持った素粒子 a, b, $\cdots$ の状態を表わす波動関数を一般に $\psi_a(x)$, $\psi_b(x)$, $\cdots$ で表わそう．これら波動関数の位相をかえる次の変換を考える．

$$\begin{aligned}&\psi_a(x)\to e^{i\lambda Q_a}\psi_a(x),\quad \psi_b(x)\to e^{i\lambda Q_b}\psi_b(x),\ \cdots\\&\psi_a^*(x)\to\psi_a^*(x)e^{-i\lambda Q_a},\quad \psi_b^*(x)\to\psi_b^*(x)e^{-i\lambda Q_b},\ \cdots.\end{aligned}\tag{8.1}$$

λ は任意の実数ですべての素粒子 a, b, $\cdots$ に共通な数とする．この変換 (8.1) を**第一種のゲージ変換**とよぶ．いくつかの素粒子 a, b, c, $\cdots$ からなる系の波動関数 ψ は ψ_a, ψ_b, ψ_c, $\cdots$ の積でかけるから，ゲージ変換 (8.1) により次のように変換する．

$$\begin{aligned}&\psi\to e^{i\lambda Q}\psi,\quad \psi^*\to\psi^*e^{-i\lambda Q},\\&Q=Q_a+Q_b+Q_c+\cdots.\end{aligned}\tag{8.2}$$

Q は系を構成する素粒子の荷電の和で系の全荷電に等しい．

いま素粒子 a, b, $\cdots$ からなる系と a', b', $\cdots$ からなる系の二つを考え，それぞれの状態を ψ, ψ' で記述しよう．ψ が ψ' に移る素粒子の衝突 $a+b+\cdots\to a'+b'+\cdots$ を考えるとその衝突の振幅は ψ'^* と ψ の積に比例するからゲージ変換 (8.2) により位相が $\exp i\lambda(Q-Q')$ だけ変る．第一種のゲージ変換に対し衝突の振幅の位相が不変なこ

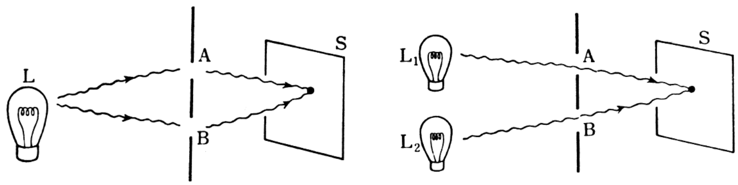
とを要求すると $Q=Q'$，すなわち衝突前後で系の総荷電が保存される．逆に荷電の保存則が成立すると衝突のようすは第一種のゲージ変換に対して不変なことが導かれる．これを第一種のゲージ変換に対する不変性という．

(8.1), (8.2) ではゲージ変換を波動関数 ψ に対する変換と変えたが，量子化した場 ψ に対する変換と考えてもよい．たとえば荷電 Q のスピン 1/2 粒子の場 $\psi(x)$, $\psi^\dagger(x)$ に対して，

$$\psi(x)\to e^{i\lambda Q}\psi(x),\quad \psi^\dagger(x)\to\psi^\dagger(x)e^{-i\lambda Q}\tag{8.3}$$

が第一種のゲージ変換である．

ところで，ある状態 ψ の位相が測定できるためには，それと干渉しうる別の状態 ψ' を用意し，ψ と ψ' の間の干渉を測らねばならない．光の干渉の場合には同一の光源から出てくる光をたとえば二つの異なる進路をとらせた後に同一点上に集めることにより干渉を測る．二つの進路からくる光波をそれぞれ ψ, ψ' とすると ψ と ψ' の間の位相差は途中光が通る進路の長さやその間に横ぎる媒質の性質で決まり，時間によらぬ定まった値を持っている（8-1a図）．これに対し二つの異なる光源からくる光を同一点上に集めても干渉は起こらない（8-1b図）．これは二つの光源 S_1, S_2 で作られる光波 ψ_1, ψ_2 の位相の



（a） 同一の光源Lから出発して異なる径路 LAS, LBS を通ってスクリーンSに集まる二つの光波は干渉する

（b） 異なる光源 L_1, L_2 から出発した二つの光波は干渉しない

8-1 図

間には一定の関係がなく位相差が $0\sim2\pi$ の間の値を無規則に（at random）とるため，それらの間の位相差を時間的に平均すると0になるからである．

同様に ψ と ψ' とが干渉しうるためには ψ で表わされる $a+b+\cdots$ 状態と ψ' で表わされる $a'+b'+\cdots$ 状態は同一の状態 $c+d+\cdots$ から得られたものでなければならない．したがって，

$$c+d+\cdots\rightleftarrows a+b+\cdots$$
$$c+d+\cdots\rightleftarrows a'+b'+\cdots$$

という反応が存在し，これらを組み合わすことにより $a+b+\cdots \rightleftarrows a'+b'+\cdots$ という転換も起こりうる．逆にこのような転換が起これば $a+b+\cdots$ 状態と $a'+b'+\cdots$ 状態の干渉を測定するに必要な源 $c+d+\cdots$ を用意しうる．もし $a+b+\cdots \rightleftarrows a'+b'+\cdots$ が起こり，かつ荷電が保存されない時には（$Q_a+Q_b+\cdots \neq Q_{a'}+Q_{b'}+\cdots$），干渉のようすはゲージ変換をすることにより変ってくるので，衝突の法則はゲージ変換に対し不変でなくなる．

またゲージ不変性を要求すると任意の観測された反応 $a+b+\cdots \rightleftarrows a'+b'+\cdots$ について荷電が保存していなければならない．

実は二つの状態 ψ と ψ' の干渉が測定できるためには，さらにもう一つの条件として ψ と ψ' の干渉を測りうる測定器がなければならない．光の干渉等の場合には二つの光波をスクリーンの同一点上に集め，その明るさを測定すればよいが，ゲージ変換による位相のずれ $\lambda(Q-Q')$，すなわちゲージ λ を測るためには一般に荷電の異なる（$Q \neq Q'$）二つの波の干渉をはかる測定器がなければならない．今日知られている測定器の中には Q の異なる二つの状態の干渉を測るものは存在しないので，たとえ荷電の保存則が素粒子の世界で破れることがあってもゲージ λ を測ることはできない．この意味からいうと現在のところゲージ不変性の要求は実験的な要求というよりも形式的な要求である．荷電の保存則の方が直接実験的に確かめられるものである．

重粒子数 n_B，軽粒子数 n_L の保存則も荷電の場合と同様にゲージ変換から導かれる．すなわち，重粒子数が $n_a, \cdots$ の状態を $\psi_a, \cdots$ とした時，

$$\psi_a \rightarrow e^{i\lambda n_a}\psi_a, \cdots$$

$$\psi_a{}^* \rightarrow \psi_a{}^* e^{-i\lambda n_a}, \cdots.$$

（軽粒子，Bose 粒子の ψ, ψ^* は変化しない）の変換に対する物理法則の不変性から重粒子数の保存則がでる．同様に軽粒子に対してもゲージ変換を考えうる．

これらをまとめると荷電 Q，重粒子数 n_B，軽粒子数 n_L の粒子の状態 ψ に対し三つの任意の実数パラメーター $\lambda, \lambda_B, \lambda_L$ を持つゲージ変換，

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{i(\lambda Q+\lambda_B n_B+\lambda_L n_L)}\psi, \\ \psi^* &\rightarrow \psi^* e^{-i(\lambda Q+\lambda_B n_B+\lambda_L n_L)} \end{aligned} \tag{8.4}$$

を考えた時，物理法則はこの変換に対し不変になっている．これは Q, n_B, n_L の保存則の存在と同等である．

§8.2 素粒子の荷電の大きさ

素粒子の荷電量を決める第二の方法は電磁場と粒子の間に働く力の大きさに基づいて決める方法である．すなわち静電場 $\boldsymbol{E}$ の中を素粒子が通過すると $\boldsymbol{E}$ の方向にその大きさに比例した力を受ける．粒子の速度が光速度にくらべて小さい時の式は，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=Q\boldsymbol{E}. \tag{8.5}$$

この比例定数 Q を素粒子の荷電量と決めよう．静電場中での素粒子の運動のようすから Q を測ることができ，Q は $e(=1.6\times10^{-19}$ クーロン) を単位にして常に ±1，または 0 なることが実験的に確かめられている（1-2 表）．たとえば陽子は $+1$，中性子は 0，電子は -1 である．

特に陽子，中性子，電子については極めて精度のよい実験から，

$$|Q_p+Q_{e^-}|\leq 10^{-15}e,\quad |Q_n|\leq 2.4\times10^{-15}e \tag{8.6}$$

の値が出されており，中性子は完全に $Q=0$，また陽子と電子の荷電は完全に $Q_p=-Q_{e^-}$ をみたすことが推測される．不安定な π, K, Λ, Ξ 粒子等についての Q の測定の精度ははるかに悪いが，実験誤差内で $\pm e$, 0 のいずれかであることが確かめられている．このことは粒電 Q が §8.1 で議論した意味での保存量であるだけでなく，実際に正確にその荷電粒子と電磁場の間の力の強さに比例していることを示している．したがって，このようにして Q を決めると Q の大きさには §8.1 の意味での任意性はなく，1-2 表のように決まる．

この驚くべき事実は素粒子と電磁場の間の力がある一般的な原理にしたがっていることを暗示している．そこで素粒子の波動関数 ψ に対して (8.1) を一般化した次のゲージ変換を考えてみよう．

$$\psi(x)\to e^{i\lambda(x)Q}\psi(x),\quad \psi^*(x)\to\psi^*(x)e^{-i\lambda(x)Q}. \tag{8.7}$$

Qは第一種のゲージ変換における粒子の荷電，$\lambda(x)$ は時空座標 x の任意の実関数で(8.1)の λ と異なり定数ではない．$\psi(x)$ に対する波動方程式はその素粒子のスピンの値により異なるが第 6, 7 章の議論から明らかなように ψ につき一次の式であり，ψ の他にその時空座標についての微分等を含む．変換 (8.7) により，

$$\partial_\mu\psi(x)\to e^{i\lambda(x)Q}\{\partial_\mu+iQ\partial_\mu\lambda(x)\}\psi(x)$$

となる．$e^{i\lambda(x)Q}$ は ψ およびその微分のすべてに共通なので波動方程式を変えないが，括弧内の $iQ\partial_\mu\lambda$ の項は波動方程式を変え，粒子の運動法則がゲージ $\lambda(x)$ のとり方で変る

ことになる．もちろん $\lambda(x)$ が x によらない第一種のゲージ変換を考える場合には，この項は 0 になる．

たとえば，スピン 0 粒子の波動方程式，

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi \tag{8.8}$$

に対し変換 (8.7) を行なってみよう．(8.8) に (8.7) のおきかえをし，さらに全体に左側から $e^{-i\lambda(x)Q}$ をかけると新しい ψ に対する式は，

$$(\boldsymbol{\partial} + iQ\boldsymbol{\partial}\lambda(x))^2\psi - \frac{1}{c^2}(\partial_t + iQ\partial_t\lambda(x))^2\psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi$$

となり，明らかに変換前の式 (8.8) と異なってくる．

第一種のゲージ変換に対する不変性をさらに拡張して変換 (8.7) に対して波動方程式が不変になるためにはどうしたらよいであろうか．このため波動方程式中の微分演算子 $\partial_\mu = \left(\boldsymbol{\partial}, -\frac{1}{c}\partial_t\right)$ を常に $\partial_\mu - i\frac{Q}{c\hbar}A_\mu$ でおきかえることにする．さらに $\partial_\mu\psi$ の (8.7) による変化を除くため A_μ が同時に $A_\mu + \hbar c\partial_\mu\lambda(x)$ に変るとしよう．すなわち，

$$\psi(x) \to e^{i\lambda(x)Q}\psi(x), \quad \psi^*(x) \to \psi^*(x)e^{-i\lambda(x)Q}, \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \hbar c\partial_\mu\lambda(x). \tag{8.9}$$

(この $\lambda(x)$ は (6.27) の $\Lambda(x)$ を $c\hbar$ でわったものである)．この変換に対し，

$$\left(\partial_\mu - i\frac{Q}{c\hbar}A_\mu\right)\psi \to e^{i\lambda(x)Q}\left(\partial_\mu - i\frac{Q}{c\hbar}A_\mu\right)\psi,$$

$$\left(\partial_\mu + i\frac{Q}{c\hbar}A_\mu\right)\psi^* \to \left[\left(\partial_\mu + i\frac{Q}{c\hbar}A_\mu\right)\psi^*\right]e^{-i\lambda(x)Q}$$

となり，波動方程式は不変となる．これを**第 2 種のゲージ変換**とよぶ．

いろいろな素粒子が電磁場 $A_\mu(x)$ と相互作用している時に，その素粒子のみたす方程式を電磁場のない時の自由粒子の方程式で，$\partial_\mu \to \partial_\mu - i\frac{Q}{c\hbar}A_\mu$ のおきかえをして求める．これが正しいかどうかは，実験的に個々の素粒子につき確かめなければならないが，§ 8.3 で後述するように電子に対しては極めて良く成り立っているようにみえる．そこで一般にすべての粒子に対しても同じことが成立すると仮定しよう．この時の電磁場と素粒子間の相互作用を **Minimal な相互作用** という．相互作用の強さはその素粒子の荷電 Q に比例しており，第一種のゲージ変換で定められた Q は実際に電磁場 A_μ との相互作用の強さを表わす．

Minimal な相互作用をしている荷電粒子の運動方程式に対し第 2 種のゲージ変換 (8.9)

を行なっても運動方程式は変らない．したがって，Minimal な相互作用を電磁場としている荷電粒子については，第2種のゲージ変換に対する不変性が成立している．一方，電磁場の方程式，

$$\Box A_\mu = 0, \quad \partial_\mu A_\mu = 0$$

は変換により一般に変ってくるが，もし，

$$\Box \lambda = 0 \tag{8.10}$$

がみたされていれば不変である．(荷電粒子の存在する時の電磁場の Maxwell の方程式も同様に不変である)

Minimal な相互作用は第2種のゲージ不変性をみたしているが，逆に第二種のゲージ不変性をみたす相互作用はこの他にも存在する．たとえば電場・磁場の強さ E, H は変換 (8.9) に対して不変なので ψ の微分を含まず，かつ E, H を通してのみ A_μ による力はゲージ不変になる．

荷電（第2種の荷電）は単なる数ではなく次元を持った量である．∂_μ と $QA_\mu/c\hbar$ は同一の次元を持つから，

$$[Q] = [c][\hbar][L]^{-1}[A]^{-1}.$$

A_μ の次元 $[A]$ は電磁場のエネルギー密度が $(1/2)(E^2+H^2)$ であることから，

$$[A] = [L][\text{エネルギー}/L^3]^{1/2} = [L][\hbar c/L^4]^{1/2} = [\hbar c]^{1/2}[L]^{-1}.$$

これより，

$$[Q] = [\hbar c]^{1/2} = [\text{エネルギー}]^{1/2}[L]^{1/2}.$$

したがって，Q の大きさを次元のない量で表わすには $Q^2/\hbar c$ を用いればよい．電子・陽子等に対しては $Q = \pm e$ であるから，$\dfrac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \dfrac{1}{137.038}$ であり1にくらべて極めて小さい．このことは電子・陽子等の素粒子と電磁場の間の力が比較的弱く，多くの場合にこの力を弱い摂動として扱うことを許す．

§8.3　電子と電磁場の相互作用

Dirac 方程式 (7.13) を電子と電磁場の間の力が Minimal であると仮定して電磁場のある時の電子の方程式に直すと，$p_\mu (= -i\hbar\partial_\mu) \to p_\mu - \dfrac{Q}{c}A_\mu$ のおきかえを行なって，$(Q = -e)$,

$$\left\{(E + eA_0) - c\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) - mc^2\beta\right\}\psi = 0. \tag{8.11}$$

これが電磁場中での電子の Dirac 方程式である．この章では Minimal 相互作用の仮定

がよく成り立っているかどうかを調べるために (8.11) から導かれる電子の電磁気的性質を調べよう.

[遅い電子の運動]

運動エネルギー, $e|A_0|$, $e|\boldsymbol{A}|$ が電子の静止質量にくらべて小さい場合の電子の運動を考えよう. これは電子が遅い運動をしており, かつ電磁場のエネルギーが電子の静止質量にくらべて小さい場合に相当する. (8.11) の左から $(E+eA_0)+c\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)+mc^2\beta$ をかけると,

$$\left\{(E+eA_0)+c\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)+mc^2\beta\right\}\left\{(E+eA_0)-c\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)-mc^2\beta\right\}\psi$$
$$=\left[(E+eA_0)^2-c^2\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-m^2c^4-c\left\{(E+eA_0)\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)(E+eA_0)\right\}\right]\psi=0.$$

さらに任意の3次元ベクトル $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$ に対し $\boldsymbol{\alpha}$ の間の交換関係を用いると,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{K})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{L})&=\alpha_x{}^2K_xL_x+\alpha_y{}^2K_yL_y+\alpha_z{}^2K_zL_z+\alpha_x\alpha_y(K_xL_y-K_yL_x)\\&\quad+\alpha_y\alpha_z(K_yL_z-K_zL_y)+\alpha_z\alpha_x(K_zL_x-K_xL_z)\\&=(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{L})+i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{L}).\end{aligned}\tag{8.12}$$

ただし,

$$i\sigma_z=\alpha_x\alpha_y,\ \cdots$$
$$(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{L})_z=K_xL_y-K_yL_x,\ \cdots$$

を用いた. (8.12) を用いると,

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2&=\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+i\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\times\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right)\\&=\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+\frac{\hbar e}{c}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}).\end{aligned}\tag{8.13}$$

ここで次式を用いた.

$$\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\times\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)=\frac{e}{c}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{p})=-i\frac{e\hbar}{c}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\right)$$
$$=-\frac{i\hbar e}{c}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=-\frac{i\hbar e}{c}\boldsymbol{H}.$$

また,

$$(E+eA_0)\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)-\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)(E+eA_0)=e\left(\boldsymbol{\alpha},\frac{1}{c}[E\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}E]\right.$$
$$\left.+[A_0\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}A_0]\right)=i\hbar e\left(\boldsymbol{\alpha},\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\frac{\partial A_0}{\partial\boldsymbol{r}}\right)=-i\hbar e(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{E}).\tag{8.14}$$

$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ はそれぞれ電場・磁場の強さで (6.8),

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial \boldsymbol{r}}, \quad \boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{8.15}$$

で与えられる. (8.13), (8.14) を用いると ψ に対する式は,

$$\left[(E+eA_0)^2 - c^2\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - m^2c^4 - ce\hbar\{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}) - i(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E})\}\right]\psi = 0 \tag{8.16}$$

となる. 最初の3項はスピン0の荷電粒子に対する式 (8.8) で $\partial_\mu \to \partial_\mu - i\dfrac{Q}{c\hbar}A_\mu$ ($Q = -e$) のおきかえを行なったものと同一であるが, 最後の $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}$ に関係した項は $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}$ を含み電子がスピンを持つために生じた項である. (7·30) の $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ を用いて (8.11) を ψ の4成分に対する式として書き直すと,

$$\begin{aligned}(E - mc^2 + eA_0)\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix} &= c\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix},\\ (E + mc^2 + eA_0)\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix} &= c\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{8.17}$$

エネルギー $E(>0)$ の固有状態を考え,

$$E = mc^2 + W \tag{8.18}$$

とおくと, 電子が遅い運動をしており, かつ電磁的エネルギーが小さい時は,

$$W \ll mc^2, \quad e|A_0| \ll mc^2, \quad e|\boldsymbol{A}| \ll mc^2, \tag{8.19}$$

(8.17) の第二式より $\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}$ にくらべて小さい. 近似的に,

$$\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix} \approx +\frac{1}{2mc}\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{\sigma}\right)\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix} \approx +\frac{1}{2mc}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}.$$

ここで $mc^2 \gg c|\boldsymbol{p}| \gg e|\boldsymbol{A}|$ として $\boldsymbol{A}$ の項を省略した. これから,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}\\(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}\dfrac{1}{2mc}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}\\(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\dfrac{1}{2mc}\{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{p}) + i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p})\}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}\\(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{8.20}$$

また,

$$(E+eA_0)^2 - m^2c^4 = (mc^2 + W + eA_0)^2 - m^2c^4 = 2mc^2(W+eA_0) + (W+eA_0)^2$$

であるから，結局 (8.16) のうち大きい成分 ψ_1, ψ_2 に対する方程式は，

$$\begin{aligned}\Big\{W + eA_0 - \frac{1}{2m}\Big(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big)^2 + \frac{1}{2mc^2}(W + eA_0)^2 + \frac{ie\hbar}{4m^2c^2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{p}) \\ - \frac{e\hbar}{4m^2c^2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}) - \frac{e\hbar}{2mc}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H})\Big\}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = 0\end{aligned} \tag{8.21}$$

となる．

最後の項は電子のスピンと磁場の間に力が働き，そのため電子は磁場中で，

$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2mc}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}) \tag{8.22}$$

の余分のエネルギーを持つ．このことは Stern-Gerlach の実験（§ 3.3 (3.33) 式参照）で極めてよい精度で確かめられた．$\Delta E = -\mu(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{H})$ とかいたときの比例定数 $\mu = -\frac{e\hbar}{2mc}$ を**電子の磁気能率 μ** という．さらに精密な実験による測定では，

$$\mu = -1.0011596\frac{e\hbar}{2mc}. \tag{8.23}$$

1からの ずれ はより近似の高い計算を行なったときの電磁的補正として説明されている．また μ の単位 $\frac{e\hbar}{2mc}$ を電子の **Bohr 磁子** とよぶ．

次に (8.21) の終りから2項目は電場と電子のスピンの間の力である．電子が速度 $\boldsymbol{v} = c^2\boldsymbol{p}/E \approx \frac{\boldsymbol{p}}{m}$ で電場 $\boldsymbol{E}$ の中を運動しているとき，電子が静止している座標系で眺めれば電子の位置に $-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E}$ の磁場が働くことと同一である．$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p})$ の項はこのように考えた磁場と電子のスピンの間の力であるが，磁気能率に相当するものは $\frac{e\hbar}{4mc}$ である．

$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{p})$ の項はやはり電子がスピンを持つために生じた項でスピン 0 粒子と電磁場の間の力には存在しない．しかし直接スピンには関係していない．(8.21) は **Pauli 近似** の電子の方程式で，原子内の電子の状態等比較的遅い速度で走っている電子と電磁場の間の相互作用をよい近似で記述できる．

[水素原子のスペクトル]

Pauli 近似の電子の方程式を解いて水素原子内の電子の状態と水素原子の発する光について調べよう．水素原子は陽子の作る電場（Coulomb 場）により，電子が陽子のまわりに結びつけられた状態と考えられる．陽子は重くて静止していると考えられるから，その作る電磁ポテンシャルは，

$$\boldsymbol{A}=0,\quad A_0=\frac{e}{4\pi r}. \tag{8.24}$$

したがって，(8.15) により，

$$\boldsymbol{H}=0,\quad \boldsymbol{E}=-\frac{\partial A_0}{\partial \boldsymbol{r}}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{dA_0}{dr}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{e}{4\pi r^2}. \tag{8.25}$$

これを (8.21) に代入すると，

$$\left\{W+eA_0+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+\frac{1}{2mc^2}(W+eA_0)^2-\frac{e\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{dA_0}{dr}\left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{r\hbar}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l})\right)\right\}\psi=0. \tag{8.26}$$

ただし，$\boldsymbol{l}\ (=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})$ は電子の軌道角運動量である．

電子と陽子との間の力は座標系を回転しても変らないので ψ は全角運動量 $\boldsymbol{J}$ の大きさ，およびその z 成分の固有状態である．(8.26) の最後の $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l})$ の項を除いては力は電子のスピンによらず，また A_0 は r の大きさのみの関数で空間座標を回転しても力は不変である．しかし $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l})$ の項はスピン座標と空間座標を同時に回転すれば不変であるが，一方のみの回転に対しては不変でない．したがってスピン・空間の両座標系を同時に回転する全角運動量 $\boldsymbol{J}$ は保存するが，軌道角運量 $\boldsymbol{l}$，スピン角運動量 $\boldsymbol{S}$ は保存されない．しかし $\boldsymbol{l}$ および $\boldsymbol{S}\left(=\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)$ の大きさは $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l})$ と可換なので，

$$[\boldsymbol{l}^2,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l})]=[\boldsymbol{\sigma}^2,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l})]=0,$$

$\boldsymbol{l}^2$ および $\boldsymbol{S}^2$ は保存される．したがって，ψ は $\boldsymbol{J}^2$, J_z, $\boldsymbol{l}^2$, $\boldsymbol{S}^2$ の同時の固有状態でありうる．これら固有値が $j(j+1)$, j_z, $l(l+1)$, $\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}$ である状態 ψ を考えよう．

$$\frac{1}{\hbar}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l})\psi=\frac{2}{\hbar^2}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{l})\psi=\frac{1}{\hbar^2}\{(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{l})^2-\boldsymbol{l}^2-\boldsymbol{S}^2\}\psi$$
$$=\{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)\}\psi.$$

また Δ を極座標を用いて書くと，

$$\Delta=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\boldsymbol{l}^2}{\hbar^2r^2},\quad \boldsymbol{l}^2=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

したがって ψ を，

$$\psi=R_{n,l}(r)\psi_{l,m}(\theta)e^{im\varphi}$$

と書くと (8.26) は $R_{n,l}(r)$ に対する式，

$$WR=\left\{-\frac{e^2}{4\pi r}-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\right\}R$$
$$+\left\{-\frac{1}{2mc^2}\left(W+\frac{e^2}{4\pi r}\right)^2-\frac{e^2\hbar^2}{16\pi m^2c^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}-\frac{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)}{r^3}\right)\right\}R$$

となる．右辺の第一項はスピンのない場合の陽子の Coulomb 場中の電子のエネルギー，第二項がスピンのあるためおよび相対論的な運動をしているための補正項である．第二項は第一項にくらべて小さい．そこで第一項を無摂動系の Hamiltonian H_0，第二項を摂動系の Hamiltonian H' と考え摂動論の計算を行なうことができる（§ 2.5 参照）．

まづ無摂動系の定常状態を求めよう．

$$WR=H_0R,\quad H_0=-\frac{e^2}{4\pi r}-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right). \tag{8.27}$$

この方程式を解くために次の量 κ，x を導入すると，

$$x=\frac{me^2}{2\pi\hbar^2}\kappa r,\quad W=-\frac{me^4}{32\pi^2\hbar^2}\kappa^2, \tag{8.28}$$

(8.27) は次のようになる．

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{d}{dx}-\frac{l(l+1)}{x^2}+\frac{1}{\kappa x}-\frac{1}{4}\right\}R=0.$$

$R=\exp\left(-\frac{x}{2}\right)x^lF(x)$ とおくと，$F(x)$ に対する式は，

$$x\frac{d^2F}{dx^2}+[2(l+1)-x]\frac{dF}{dx}-\left[l+1-\frac{1}{\kappa}\right]F=0 \tag{8.29}$$

となる．これは合流型の超幾何関数といわれるもので，この解の中で原点 $x=0$ で有限な値を持つ解は，

$$F\left(l+1-\frac{1}{\kappa},\quad 2(l+1),\quad x\right)$$

と書ける．ここで

$$F(a,\ c,\ x)=1+\frac{a}{c}x+\frac{a(a+1)}{2!\,c(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)}{3!\,c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots \tag{8.30}$$

である．

さて，この解，

$$R=\exp\left(-\frac{x}{2}\right)x^lF\left(l+1-\frac{1}{\kappa},\ 2(l+1),\ x\right) \tag{8.31}$$

が $x\to\infty$ $(r\to\infty)$ で 0 になり束縛状態を表わすためには F の x のべき展開の係数がある所から先で 0 にならねばならない．このためには $1/\kappa$ は次の正整数値をとらねばな

らない．

$$\frac{1}{\kappa}=n,\ (n=l+1,\ l+2,\ \cdots).$$

もしこの条件がみたされない時は x の大きな所で $F\sim e^x$ となり， $R\sim e^{x/2}$ で x と共に増加し波動関数 R は規格化できない．

水素原子の定常状態は，したがって主量子数 n，角運動量 l に対応する固有状態，

$$\begin{aligned}\psi_{n,l}(r)&=R_{n,l}(r)Y_l{}^m(\theta,\varphi),\\ R_{n,l}(r)&=C_{n,l}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)x^lF(l+1-n,\ 2(l+1),\ x)\end{aligned}\tag{8.32}$$

で与えられる．$C_{n,l}$ は規格化の定数で，

$$C_{n,l}=\frac{\sqrt{\pi/2}}{2^{2l+1}\Gamma\left(l+\dfrac{3}{2}\right)}\left(\frac{me^2}{2\pi\hbar^2n}\right)^{3/2}.\tag{8.33}$$

また固有値は，

$$W_{n,l}=-\frac{me^4}{32\pi^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}=-\frac{mc^2}{2}\frac{\alpha^2}{n^2}\quad(n=l+1,\ l+2,\ \cdots)\tag{8.34}$$

となる．ここで，

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\approx\frac{1}{137}\tag{8.35}$$

で，**微細構造定数**といわれる．

(8.34) は無摂動系のエネルギーであるが， Dirac 電子に対する相対論的補正による1次の摂動エネルギーは (8.32) の $R_{n,l}(r)$ を用いて計算できる．すなわち，

$$\begin{aligned}\Delta W_{n,l}=&-\frac{1}{2mc^2}\int_0^\infty\left(W_{n,l}+\frac{e^2}{4\pi r}\right)^2R_{n,l}{}^2r^2dr-\frac{e^2\hbar^2}{16\pi m^2c^2}\int_0^\infty R_{n,l}\frac{dR_{n,l}}{dr}dr\\ &+\frac{e^2\hbar^2}{16\pi m^2c^2}[j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)]\int_0^\infty R_{n,l}{}^2\frac{dr}{r}\end{aligned}\tag{8.36}$$

となる．$R_{n,l}$ は規格化されており，

$$\int_0^\infty R_{n,l}{}^2r^2dr=1$$

であるが， r のいろいろなべきの $R_{n,l}$ についての平均値を求めると，

$$\int_0^\infty R_{n,l}{}^2r\,dr=\frac{me^2}{4\pi\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2},$$

$$\int_0^\infty R_{n,l}{}^2dr=\left(\frac{me^2}{4\pi\hbar^2}\right)^2\frac{1}{n^3\left(l+\dfrac{1}{2}\right)},$$

$$\int_0^\infty R^2{}_{n,l}\frac{dr}{r}=\left(\frac{me^2}{4\pi\hbar^2}\right)^3\frac{1}{n^3(l+1)\left(l+\frac{1}{2}\right)l}$$

となる. また,

$$\int_0^\infty R_{n,l}\frac{dR_{n,l}}{dr}dr=\frac{1}{2}[R_{n,l}{}^2(\infty)-R_{n,l}{}^2(0)]=-\frac{1}{2}R_{n,l}{}^2(0)\ (=0,\ l\neq 0)$$

で $l\neq 0$ の場合は0となる. これらより (8.36) の右辺の第一項は,

$$-\frac{mc^2}{2}\cdot\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{l+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4n}\right)\alpha^4.$$

第三項は $l\neq 0$ のとき,

$$-\frac{mc^2}{2}\frac{s(s+1)+l(l+1)-j(j+1)}{2n^3(l+1)\left(l+\frac{1}{2}\right)l}\alpha^4$$

となる. $s=1/2$ であるから $j=l\pm 1/2$ の二つの状態があり, 第3項はそのそれぞれに対して,

$$\begin{cases} mc^2\dfrac{1}{4n^3j\left(j+\frac{1}{2}\right)}\alpha^4 & \cdots\cdots j=l+\dfrac{1}{2} \\ -mc^2\dfrac{1}{4n^3(j+1)\left(j+\frac{1}{2}\right)}\alpha^4 & \cdots j=l-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

となる. 第一項と第三項を一緒にすると $j=l\pm\frac{1}{2}$ の両方に対して,

$$-mc^2\frac{1}{2n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4n}\right)\alpha^4$$

となる. 第2項は $l\neq 0$ に対しては0で, $l=0$ では残るが, このときは第3項は0であり ($j=S$), まとめると $\Delta W n,l$ は $l=0$ のときも上式で与えられる.

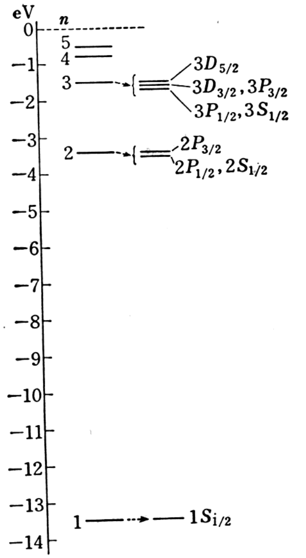
以上をまとめると, 水素原子のエネルギー準位は静止質量を除いて,

$$W=-\left\{\frac{\alpha^2}{2n^2}+\frac{\alpha^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4n}\right)\right\}mc^2 \tag{8.37}$$

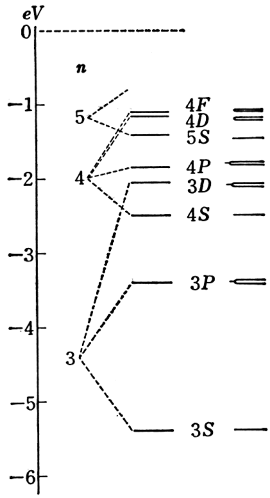
となる.

スピンのない非相対論的取り扱いをした場合に, 主量子数 n が同一の状態は同一エネルギーを持ち縮退していたのが, Dirac 電子の場合には, そのスピンと相対論的影響のために全角運動量 j が異なるとエネルギーが少し変ってくる (8-2 図). さらにアルカリ原子

の場合には，最も外側の電子の受ける力は，閉殻中の電子により，ある程度遮蔽されるので，Coulomb ポテンシャルは $\frac{1}{r}$ からずれてくる．すなわち，r の大きい所で Coulomb 力は $\frac{1}{r}$ より急速に0になり，したがって n が同じで l の異なる状態をくらべると，l の大きい r の大きな所を平均としてまわっている電子状態は l の小さな状態にくらべてエネ



8-2 図　水素原子のエネルギー準位（右側は j の相異による微細構造を示す）



8-3 図　ナトリウム原子のエネルギー準位（1S, 2S, 2P にある10個の電子は閉殻の電子を作っている）

ルギーが高くなる．8-3 図はナトリウム原子のエネルギー準位を示してある．

(8.37) は極めてよく水素原子のエネルギー準位，それら相互間の転移により発生する光のスペクトルの実験結果と一致して，Dirac の電子論の大きな裏づけとなった．また極めて接近した二つの準位 $j=l\pm 1/2$ の存在は電子のスピンが $\frac{1}{2}$ のことをはっきり示している．

さて n, j が同一値を持つ水素原子の $2S_{1/2}$ 準位 ($n=2, l=0, j=1/2$) と $2P_{1/2}$ 準位 ($n=2, l=1, j=1/2$) は縮退しているが，超短波技術を用いた Lamb-Retherford

の精密な測定（1947 年）の結果，この二つの準位間には約 1000 メガサイクルのエネルギー差があり，$2S_{1/2}$ 準位の方がよりエネルギーの高いことがわかった．これは $2P_{1/2}$ と $2P_{3/2}$ 準位の間隔（(8.37) 参照），

$$\frac{\alpha^4}{2\cdot 2^3}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]mc^2=\frac{\alpha^4}{32}mc^2\approx 4\times 10^{-5}\,\mathrm{eV}$$

にくらべて一けた小さい．

$$\Delta E=h\nu\approx(4\times 10^{-15}\,\mathrm{eV\cdot sec})\times(10^9\,\mathrm{sec}^{-1})\approx 4\times 10^{-6}\,\mathrm{eV}.$$

このエネルギーの ずれ は **Lamb-shift** といわれている．

(8.24) のように水素原子のエネルギー準位を求める際 Coulomb ポテンシャルのみを考慮したが，電磁場を量子化して考えると，その零点振動のため $\boldsymbol{A}=0$ として扱うことは許されなくなる．量子化された $\boldsymbol{A}$ の部分による電場を考えると (6.48) より，

$$\boldsymbol{E}=i\sum_{\boldsymbol{k},h}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},h)\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2L^3}}\{a(\boldsymbol{k},h)e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}-a^\dagger(\boldsymbol{k},h)e^{-i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}\}. \tag{8.38}$$

ただし $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},h)$ は実数とした．これは (6.62) のような直線偏光の光子をとることに相当する．この電場による電子の運動を考えると近似的に，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-e\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F}. \tag{8.39}$$

$\boldsymbol{F}$ は Coulomb 場による力である．この式を時間につき 2 度積分すると，

$$\boldsymbol{r}=i\frac{e}{m}\sum_{\boldsymbol{k},h}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},h)\sqrt{\frac{\hbar}{2L^3\omega^3}}\{a(\boldsymbol{k},h)e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}-a^+(\boldsymbol{k},h)e^{-i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}\}+\boldsymbol{r}_0.$$

$\boldsymbol{r}_0$ は零点振動をしている場の影響を考えないときの電子の座標である．$\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ は零点振動による電子の座標の ゆらぎ で，光子の 1 個も存在しない状態での平均値はもちろん 0 である．$\delta\boldsymbol{r}^2$ の平均値は 0 でなく $\langle 0|a(\boldsymbol{k},h)a^\dagger(\boldsymbol{k},h)|0\rangle=1$ により，

$$\langle\delta\boldsymbol{r}^2\rangle=\frac{e^2\hbar}{2m^2L^3}\sum_{\boldsymbol{k},h}\frac{1}{\omega^3}=\frac{e^2\hbar}{2m^2L^3}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\sum_h\int d\boldsymbol{k}\frac{1}{\omega^3}\qquad\left(d\boldsymbol{k}=4\pi\frac{\omega^2d\omega}{c^3}\right)$$

$$=\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\frac{2}{\pi}\int\frac{d\omega}{\omega}=\alpha\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\frac{2}{\pi}\log\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}. \tag{8.40}$$

ω についての積分の上下限は次のようにして定める．光子の振動数が $\dfrac{mc^2}{\hbar}$ の程度より大きくなると電子の運動の相対論的影響が無視できなくなり (8.39) の近似は悪くなる．より詳しい計算を行なうと $\omega\gtrsim mc^2/\hbar$ の振動数の零点振動の影響は無視できることがわかる．また水素原子の電子は陽子の Coulomb 場で束縛されており，光子のエネルギーの大きい間はこの影響は無視できるが，そのエネルギーが電子の束縛エネルギー程度になると

影響が無視できなくなる．すなわち電子を動かすにはより高いエネルギー準位に電子を移すことが必要で $\hbar\omega$ が $2S$ 状態の電子を励起するのに必要な平均の励起エネルギー程度以下になると電子を動かすことは難しくなる．したがって $\omega_{\min}$ は水素原子の $2S$ 状態の電子の平均の励起エネルギーで，数値計算によると約 17.8 rydberg である．1 rydberg は次の量である．

$$1\,\mathrm{Ry}=\frac{\alpha^2\cdot mc^2}{2}\approx 13.605\,\mathrm{eV}. \tag{8.41}$$

さて，この電磁場の零点振動による電子の位置のゆらぎは水素原子の個々のエネルギー準位にどのように影響するであろうか．電子の位置がずれると Coulomb エネルギーに差を生ずる．Coulomb ポテンシャル V は，

$$V(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})=V(\boldsymbol{r})+\delta\boldsymbol{r}\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{1}{2}\left(\delta\boldsymbol{r}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\right)\left(\delta\boldsymbol{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\right)V(\boldsymbol{r})+\cdots.$$

位置のゆらぎ $\delta\boldsymbol{r}$ は球対称で方向によらないから，

$$\langle\delta\boldsymbol{r}\rangle=0,\quad \langle\delta x\delta y\rangle=\langle\delta y\delta z\rangle=\langle\delta z\delta x\rangle==0,\ \cdots$$

$$\langle\delta x^2\rangle=\langle\delta y^2\rangle=\langle\delta z^2\rangle=\frac{1}{3}\langle\delta\boldsymbol{r}^2\rangle.$$

したがって，$\delta\boldsymbol{r}$ について平均すると，

$$V(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})=V(\boldsymbol{r})+\frac{1}{6}\langle\delta\boldsymbol{r}^2\rangle\Delta V+\cdots$$

である．水素原子のときの Coulomb ポテンシャル，

$$V(\boldsymbol{r})=-\frac{e^2}{4\pi r},\quad \Delta V=e^2\delta(\boldsymbol{r}), \tag{8.42}$$

をいれると，電子の位置のゆらぎによるポテンシャルエネルギーのずれは，

$$\Delta W=\frac{1}{6}\langle\delta\boldsymbol{r}^2\rangle\int\psi^*\Delta V\psi d\boldsymbol{r}=\frac{e^2}{6}\langle\delta\boldsymbol{r}^2\rangle|\psi(0)|^2. \tag{8.43}$$

いろいろな状態 (n, l) における $|\psi(0)|^2$ を求めると (8.32), (8.33) より，

$$|\psi(0)|^2=\begin{cases}|C_{n,0}|^2\cdot|Y_0|^2=\dfrac{1}{\pi n^3 a_0{}^3}\cdots l=0\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\cdots l\neq 0.\end{cases} \tag{8.44}$$

ただし，a_0 は Bohr 半経，

$$a_0=\frac{4\pi\hbar^2}{me^2}=\frac{\hbar}{mc\alpha}\approx 0.529\times 10^{-8}\,\mathrm{cm} \tag{8.45}$$

である．

(8.43) の $\langle\delta\boldsymbol{r}^2\rangle$ に (8.40) を代入すると，$n=2$, $l=0$ に対して，

$$\Delta W = \alpha^5 \frac{mc^2}{6\pi} \log \frac{mc^2}{\hbar\omega_{\min}} \approx 1040 \text{ メガサイクル } (l=0,\ n=2). \qquad (8.46)$$

これがちょうど $2S_{1/2}$ と $2P_{1/2}$ 準位のエネルギー差を与えるが実験的に測られた Lamb-shift の値と極めてよく一致している．この一致は光に対し量子化された場の理論が成立していることを示す重要な実験事実の一つである．

以上で議論したように，電子と電磁場の間の力は minimal な力として非常によく理解される．それでは他の粒子に対してはどうだろうか．たとえば π^0 は電気的に中性だから minimal な相互作用は何も持たないが，実際は電磁場との間に力が働き，寿命がくると 2 個の光子に崩壊する ($\pi^0 \to \gamma + \gamma$)．陽子，中性子等スピン 1/2 粒子のスピンと磁場の間に働く力をくらべると，これらの粒子の磁気能率として 8-2 表の値が得られる．これに対し minimal な力から導かれる値 $Q\hbar/2mc$ (Q, m はその粒子の荷電と質量）とをくらべてみると大きな ずれ がみられ，中性子等 $Q=0$ のものでも磁気能率を持っている．これら理論値からのずれ を **異常磁気能率** という．

8-2 表 p, n, Λ の磁気能率
単位は核磁子 $e\hbar/2M_pc$

	磁気能率	理論値
p	2.7986	1
n	− 1.9103	0
Λ	～ − 1	0

また中性子は中性ではあるが空間的に変化する電場との間に力が働くことが知られている．すなわち中性子に電子をあてる（あるいは電子に中性子をあてる）と電気的な力によって散乱される．これは中性子は大きさを持った粒子で，その中に荷電が分布をしている系と考えられる．ただし荷電の総和は 0 なので中性の粒子である．

したがって，p, n, Λ 等のスピン 1/2 の粒子（重粒子）に対しては (8.11) の Dirac 方程式は成り立たず電磁場とこれら粒子の相互作用はより複雑であるようにみえる．重粒子の場，$\pi \cdot K$ 中間子場相互間にはいわゆる強い相互作用といわれる力が存在し（第 10, 11 章参照)，電磁場の存在しないときのこれら粒子の状態自身が極めて複雑なものである．たとえば自由な中性子を例にとると，

$$n \leftrightarrow p + \pi^-, \quad n \leftrightarrow n + \pi^0, \quad n \leftrightarrow \Lambda^0 + K^0, \quad n \leftrightarrow \Sigma^0 + K^0, \quad n \leftrightarrow \Sigma^- + K^+$$

等の力のために実際の中性子は，

$$n, \quad p + \pi^-, \quad n + \pi^0, \quad \Lambda^0 + K^0, \cdots$$

等の状態が重ね合わさった系で $p + \pi^-$ 等より分るように n は電気的構造を持っている．

今日これら素粒子の電磁的性質を論ずるときに，minimal な相互作用をそれぞれの場に対して用い，いろいろな場が互いに移り変ることより磁気能率の ずれ (8-2表) やその他の性質を導いている．強い相互作用の複雑さによる理論計算の難しさのために minimal な相互作用の妥当性は未だ明らかにされてないが，それでは不充分であるという証拠もみつ

かっていない.

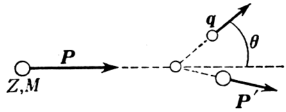
これに対し軽粒子といわれるスピン 1/2 粒子 (μ, e, ν_e, ν_μ) については強い相互作用がないので, minimal な電磁的相互作用の妥当性を調べることができる. μ^- は e^- と同様 (8.11) でよく記述され, 実験的に測られた磁気能率の大きさは非常によく理論値と一致する. またニュートリノ (ν_e, ν_μ) は中性で磁気能率も 0 (またはほとんど 0) で n, Λ と異なり電気的構造は持っていないようにみえる. したがって軽粒子に対しては minimal な力が成り立っていると考えられる

§8.4 荷電粒子と物質との相互作用

荷電粒子が物質中を通過するとき, 物質中の原子と衝突して進行方向を変え (散乱) 原子中の電子をはねとばし, 時には原子核と衝突し, また時には光子等の新しい粒子を作り出す. これらのために粒子はしだいにエネルギーを失い減速し, 十分厚い物質中を通るときはその物質中でとまってしまう. 入射粒子と物質との間に働く力は電磁気的な力の他に強い相互作用といわれる力が働く. この力は素粒子が相互に極めて近い距離まで近づいた時にのみ働くので入射粒子 (たとえば陽子) が原子核に近づかない限り電磁気的な力のみ考慮すればよい. また電子は他の粒子との間にこのような力をおよぼしあわない.

(a) 物質のイオン化

荷電粒子が物質中を通過するとき物質を構成する原子中の電子との間に Coulomb 力が働く. この Coulomb 力による衝突で電子がエネルギーのより高い励起状態に移るかまたは原子から離れて外に飛び出してくる. 後者を原子はイオン化されたという. いずれの場合にも荷電粒子はそのエネルギーの一部を電子に与える. 荷電粒子の質量が電子の質量にくらべて非常に大きい場合の衝突のようすを少しくわしく調べよう.



8-4 図 荷電粒子 (○) と電子 (○) の衝突

荷電粒子の質量, 荷電, 運動量をそれぞれ M, Ze, $\boldsymbol{P}$ とし, これが静止している電子 (質量 m, 荷電 $-e$) に衝突する場合を考える. 衝突後の粒子および電子の運動量を $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{q}(=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}')$ としよう. エネルギー運動量の保存則から (8-4 図)

$$\sqrt{P^2c^2+M^2c^4}+mc^2=\sqrt{P'^2c^2+M^2c^4}+\sqrt{q^2c^2+m^2c^4}$$
$$P'^2=P^2+q^2-2Pq\cos\theta. \tag{8.47}$$

ここで θ は反跳電子の運動量 $\boldsymbol{q}$ と入射粒子の運動量 $\boldsymbol{P}$ の間の角度である. 両式より θ

が決まれば与えられた P に対し q, P' が共に決まる. 電子に与えられるエネルギー T はこの式を解いて,

$$T = 2mc^2 \frac{P^2c^2 \cos^2\theta}{[mc^2 + (P^2c^2 + M^2c^4)^{1/2}]^2 - P^2c^2\cos^2\theta}. \tag{8.48}$$

T は $\cos^2\theta$ の増大関数で $\cos\theta = 1$ のとき最大値 $T_{\max}$ をとる. この場合は入射粒子が電子を前方にはねとばす正面衝突の場合である. その際の T の値は上式で $\cos\theta = 1$ とおいて得られる. $P \ll Mc$ すなわち粒子の速度 V が光速度にくらべて小さいときは,

$$T_{\max} \approx 2mc^2 \frac{P^2}{M^2c^2} \approx 2mV^2. \tag{8.49}$$

逆に, 粒子の速度が極めて光速度に近いとき ($P \gg Mc$) は,

$$T_{\max} \approx cP(\approx \sqrt{c^2P^2 + M^2c^4}) \tag{8.50}$$

となり, 入射エネルギーのほとんどすべてを電子に与える. 一般にエネルギーの保存から $P > P'$ でなければならないから, (8.47) の第2式より $\cos\theta \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ である. $\theta = \pi/2$ のとき $T = 0$ となる.

実際に荷電粒子が電子と衝突してどれだけエネルギーを失うかを知るには, いろいろの方向 θ に電子をはねとばす頻度を求めなければならない. ここでは粒子の速度 V が光速度にくらべて小さく (非相対論的な場合), 原子中の電子の速度よりは大きい場合を考えよう. この第2の条件により電子ははじめに静止していると考えてよい. しかし荷電粒子が電子から遠く離れたところを通過するときは, はねとばそうとする力が弱いので電子が束縛されていることを無視するわけにはいかない. このために電子と荷電粒子の間のポテンシャルエネルギーを Coulomb 力を少し変えて,

$$H = -\frac{Ze^2}{4\pi r}e^{-\kappa r} \tag{8.51}$$

としよう. r が大きい ($> 1/\kappa$) ときはイオン化に寄与しないことを表わすのが $\exp(-\kappa r)$ の因子である.

κ は次のようにして決められる. 電子の受けるポテンシャルエネルギーの変化の割合は $H \propto 1/r$ のとき,

$$\frac{dH}{dt}\Big/ H = \frac{d}{dt}(\log H) = \frac{dr}{dt}\Big/ r \approx V/r,$$

すなわちポテンシャルの変化が感じられるまでに要する時間は $\sim r/V$ である. これが束縛電子が原子核のまわりをまわる周期 T よりも大きくなると, 束縛の影響は無視できなくなり, 電子をはねとばすことはむずかしくなる. 電子の束縛エネルギー (イオン化ポテン

シャル）を I とすれば，$T \approx 2\pi\hbar/I$ だから，$T/2\pi = r/V$ で $r = 1/\kappa$ を決めると，

$$\kappa = I/\hbar V \tag{8.52}$$

で与えられる．

ポテンシャル (8.51) による Rutherford 散乱の確率は摂動論を用いると § 2.5 の例題と同様にして，

$$w(\theta)d\Omega = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{(Ze^2)^2}{L^6}\frac{\hbar^4}{(q^2+\hbar^2\kappa^2)^2}\rho d\Omega. \tag{8.53}$$

ρ は θ 方向に電子が反跳びされた状態の状態密度である．(8.48) と $P \ll Mc$ より，

$$\begin{aligned} &T \approx 2mV^2\cos^2\theta(\ll mc^2), \\ &cq = \{(T+mc^2)^2 - m^2c^4\}^{1/2} \approx \{2Tmc^2\}^{1/2} \approx 2mcV\cos\theta(\ll mc^2). \end{aligned} \tag{8.54}$$

状態密度 ρ は，

$$\rho = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 q^2\frac{dq}{dE}. \tag{8.55}$$

E は衝突後の系の全エネルギーで，

$$E \approx (M+m)c^2 + \frac{P'^2}{2M} + \frac{q^2}{2m} = (M+m)c^2 + \frac{(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{q})^2}{2M} + \frac{q^2}{2m}.$$

したがって，

$$\frac{dE}{dq} \approx \frac{-P\cos\theta + q}{M} + \frac{q}{m} \approx -V\cos\theta + 2V\cos\theta = V\cos\theta \approx \frac{q}{2m}.$$

また

$$d\Omega = 2\pi d(\cos\theta) \approx \frac{\pi}{mV}dq.$$

これらより (8.53) は，

$$w(\theta)d\Omega = 8\pi\left(\frac{Ze^2}{4\pi}\right)^2\frac{1}{L^3}\frac{1}{V}\frac{qdq}{(q^2+\hbar^2\kappa^2)^2}$$

となる．衝突の断面積 $d\sigma(\theta)$ はこれに L^3/V をかけて得られる．

$$d\sigma(\theta) = 8\pi\left(\frac{Ze^2}{4\pi}\right)^2\frac{1}{V^2}\frac{qdq}{(q^2+\hbar^2\kappa^2)^2}. \tag{8.56}$$

1 cm² あたり毎秒1個の粒子が物質中を通るとき，物質中の1個の電子に与えるエネルギーは，

$$\begin{aligned} \langle T\rangle &\equiv \int_0^{T_{\max}} Td\sigma(\theta) = \int_0^{q_{\max}}\frac{q^2}{2m}d\sigma(\theta) = \frac{(Ze^2)^2}{4\pi mV^2}\int_0^{q_{\max}}\frac{q^3dq}{(q^2+\hbar^2\kappa^2)^2} \\ &\approx \frac{(Ze^2)^2}{4\pi mV^2}\int_{\hbar\kappa}^{q_{\max}}\frac{dq}{q} = \frac{1}{4\pi}\frac{(Ze^2)^2}{mV^2}\log\frac{q_{\max}}{\hbar\kappa}. \end{aligned}$$

ここで $q_{\max} \gg \hbar\kappa$ を用いた．

$q_{\max}$, $T_{\max}$ は電子に与えられる運動量，エネルギーの最大値で (8.54) で $\cos\theta=1$ とおいて得られる.

$$q_{\max}=2mV. \tag{8.57}$$

物質中に束縛されている電子の運動エネルギーは I の程度と考えられるから，電子の原子内での速度 v は $I\approx mv^2/2$. 入射粒子の速度がこの速度にくらべて大きく ($V\gg v$) 電子が始めほとんど静止していると考えてよい場合を扱っているから,

$$\hbar\kappa=I/V\approx mv^2/2V\ll q_{\max}$$

である. いろいろな物質中での I の値を 8-3 表に記す. I の値は原子番号 z に大体比例する.

8-3 表　平均のイオン化ポテンシャル I

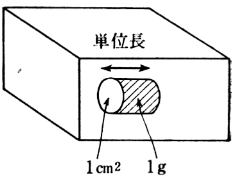
物　質	I	I/z
H	15.6 eV	15.6 eV
C	76.4	12.7
Al	150	11.5
Fe	241	9.3
Ag	418	8.9
Pb	705	8.6

1 cm³ 中に含まれる原子の個数を N, 物質の原子番号を z とすると，物質の厚さ 1 cm を荷電粒子が通過するときに失うエネルギーは Nz 個の電子と衝突するから $zN\langle T\rangle$ で，(8.52), (8.57) を代入すると,

$$-\frac{dE}{dx}=\frac{Z^2e^4Nz}{4\pi mV^2}\log\frac{2mV^2}{I} \tag{8.58}$$

となる. この式は $c\gg V\gg v$ のときに成立すると期待される. ($\langle T\rangle$ は [エネルギー]×[長さ]^2 の次元, N は[長さ]$^{-3}$ の次元を持つから $N\langle T\rangle$ は [エネルギー]/[長さ] の次元を持つ). N は物質の密度を ρ g/cm³ とすると, $N\approx\rho/AM_p\approx N_0\rho/A$, N_0 は Avogadro 数で $N_0=6.023\times10^{23}$, A は物質の質量数である.

$-dE/dx$ は N, したがって物質の密度 ρ に比例するので ρ の大きな程 1 cm あたりにイオン化により失うエネルギーは大きい. そこで物質中での長さの単位として 1 cm の代りに，物質の断面積 1 cm² の中に 1 g の質量の物質が含まれる厚さを長さの単位として選ぶ (8-5 図). L cm の長さはこの単位では $L\rho$ の長さになる. また，この長さの単位は g/cm² の次元を持つ. さて単位の厚さに含まれる原子の数は $N/\rho=N_0/A$ であるから，この単位でのエネルギー損失は,



8-5 図

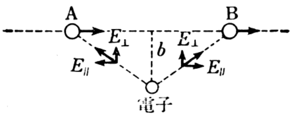
$$-\frac{dE}{dl}=\frac{Z^2zN_0e^4}{4\pi AmV^2}\log\frac{2mV^2}{I} \tag{8.58$'$}$$

となる. l は新しい単位で測った長さである.

荷電粒子のイオン化によるエネルギー損失 (8.58′) が粒子の速度のみに関係してその

質量によらないことは容易に理解できる．粒子の質量が電子の質量にくらべて非常に重い限り，衝突により受ける粒子の運動量変化 q は初めの運動量 P にくらべ非常に小さく ($q/P \approx 2m\cos\theta/M \ll 1$) 粒子は衝突によりほとんど進行方向も速度も変えない．したがって電子に働く Coulomb 場は速度 V の荷電粒子が直進するときに作る場で，この Coulomb 場の強さは荷電粒子と電子との距離だけの関数である．また Coulomb 場の時間による変化のようすも荷電粒子の速度だけで定まる．電子が衝突により得る運動量は衝突中に Coulomb 力により受ける力積に等しく，これは Coulomb 場の強さと衝突時間の関数で，いずれも粒子の質量によらない．

(8.58′) は $V \ll c$ のときに成立するが V が c に近づくと次の二つの事情が生ずる．いま大体のようすを理解するために粒子が衝突距離 b で電子と衝突した場合を考えると，その古典的軌道は 8-6 図のように書ける．粒子はほとんど直進し粒子と電子が最も近づいたときの距離が b である．各時刻において電子におよぼす粒子の電場の方向は異なるが，平均すると電子は粒子の進行方向に垂直な方向の電場 $E_\perp$ を受けて引張られる．この $E_\perp$ は静止した粒子が作る場合にくらべて Lorentz 因子 γ 倍強くなる．



8-6 図　荷電粒子が電子におよぼす電場
粒子がA点にいるときの電場とB点にいるときの電場は $E_\perp$ は同方向，$E_\parallel$ は反対方向で平均して $E_\perp$ のみ有効である．

$$\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}.$$

また衝突時間は Coulomb 場が V 方向に Lorentz 収縮を起すので $1/\gamma$ に短くなる．しかし電子に与えられる運動量・エネルギーは衝突中に電子の受ける力積で決まるので不変である．

ただ κ および $q_{\max}$ の値は次のように変ってくる．粒子が静止している電子に衝突すると考える代りに速度 $-\boldsymbol{V}$ で電子が静止した重い粒子に衝突すると考え直すと，Coulomb ポテンシャルのエネルギーは静止した粒子に対する H (8.51) で与えられる．ただし Coulomb ポテンシャルの時間変化の割合は粒子に固定した時計ではかると V/r であるが，この時計は実験室系の時計（電子が静止）にくらべて γ 倍ゆるやかに進むから，実験室系では H の時間変化の割合は $\gamma V/r$ になる．したがって，原子をイオン化するときの有効なポテンシャルでは，

$$\kappa = \frac{I\sqrt{1 - V^2/c^2}}{\hbar V}. \tag{8.59}$$

次に $q_{\max}$ は $-\boldsymbol{V}$ で衝突した電子が $+\boldsymbol{V}$ で反跳したとき（粒子の静止系）における

q に等しいことは明らかで，

$$q_{\max}=\frac{2mV}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{8.60}$$

となる．$V \lesssim c$ の場合のエネルギー損失の式は，

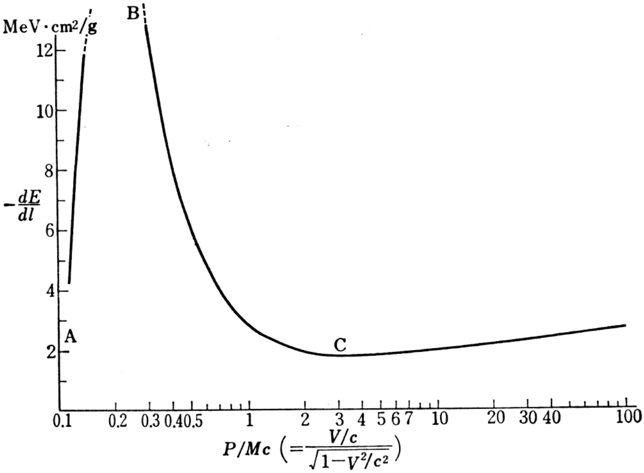
$$-\frac{dE}{dl}=\frac{Z^2e^4N_0z}{4\pi mV^2A}\log\frac{2mV^2}{I(1-V^2/c^2)}$$

となる．よりくわしい Bethe による計算によると，

$$-\frac{dE}{dl}=\frac{Z^2e^4N_0z}{4\pi mV^2A}\left\{\log\frac{2mV^2}{I}-\log\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)-\frac{V^2}{c^2}\right\} \tag{8.61}$$

である．

8-7 図は荷電粒子の物質のイオン化によるエネルギー損失 $-dE/dl$ を P/Mc の関数として表わしたものである．距離の単位としては cm の代りに物質が 1 cm² あたり 1g の質量を持つ厚さを単位にとってある．B—C の領域は $-dE/dx$ は大体 $1/V^2$ で減少



8-7 図　重い荷電粒子の $-\dfrac{dE}{dx}$（空気中）

し，C点をこえると V はほとんど c に等しく $-dE/dx$ は $-\log(1-V^2/c^2)$ のために対数的に徐々に増大する．C点ではイオン化によるエネルギー損失が極小で，このときの P の値は，

$$\frac{P}{Mc}\approx 3 \tag{8.62}$$

である．Bより速度の小さい点では粒子の速度は原子内の電子速度と同程度になり，衝突

は粒子と電子の間ではなく，粒子と原子全体の衝突と考えなければならない．したがって，この衝突のようすは物質によって異なり，粒子速度 V・イオン化ポテンシャル I だけからは決まらない．

荷電粒子が陽子等の正荷電の重い粒子であるときは，その速度が原子内の電子の速度と同程度となると，電子との間の Coulomb の引力で電子をひきつけ，電子はその粒子のまわりをまわったり元の原子のまわりをまわったりする．これに反し負荷電を持つ μ^- 等の場合には電子との衝突でエネルギーを失った後，最後には原子核の Coulomb 場に引かれて原子内軌道におちつく．これらの現象はなかなか複雑で，たとえば陽子のエネルギー 1 MeV 以下（α 粒子では 4 MeV 以下）の場合の dE/dl は物質により変ってくるので，ここではふれないことにする．

(8.58)，(8.61) は電子にくらべて重い粒子のイオン化によるエネルギー損失であるが，入射粒子が電子の場合には，（i）入射粒子も衝突の相手も電子で共に同一粒子であるため Pauli の禁制原理の存在すること，(ii) $M=m$ のため入射粒子の散乱により受ける運動量変化は入射運動量と同程度になりうるので散乱により進行方向がほとんど変らないとすることはできない，等の違いがある．Bethe によれば，

$$-\frac{dE}{dl}=\frac{e^4N_0z}{8\pi mV^2A}\left[\log\frac{mV^2T}{2I^2(1-V^2/c^2)}-\log 2\left(2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}-1+\frac{V^2}{c^2}\right)\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\right]. \tag{8.63}$$

T は電子の運動エネルギーである．

［荷電粒子の走行距離］

荷電粒子が物質中を通過するとイオン化によりエネルギーを失い，十分な厚さの物質中では最後にとまってしまう．質量 M・荷電 Ze の粒子がある物質中で静止するまでに走る距離を，その粒子の**走行距離** (range) という．これは M, Z, および粒子のエネルギー・物質によって異なる．単位長さを走るときに粒子の失うエネルギー $-dE/dl$ がわかっていれば，エネルギー E の粒子がとまるまで ($E=0$) に走る距離 $R(E)$ は，

$$R(E)=\int_0^E\frac{dE}{-dE/dl}. \tag{8.64}$$

粒子の質量 M が電子の質量よりはるかに重いならば，$-dE/dl$ は M によらず Z, V, および物質の A, z, およびイオン化ポテンシャル I の関数で (8.58′)，(8.61) より，

$$-\frac{dE}{dl}=\frac{Z^2z}{V^2A}f(V,I) \tag{8.65}$$

と書ける．また E は質量 M に比例する．

$$E = Mc^2\{(1 - V^2/c^2)^{-1/2} - 1\} \approx \frac{MV^2}{2}.$$

したがって，

$$R(E) = \frac{MA}{zZ^2}g(V, I) \tag{8.66}$$

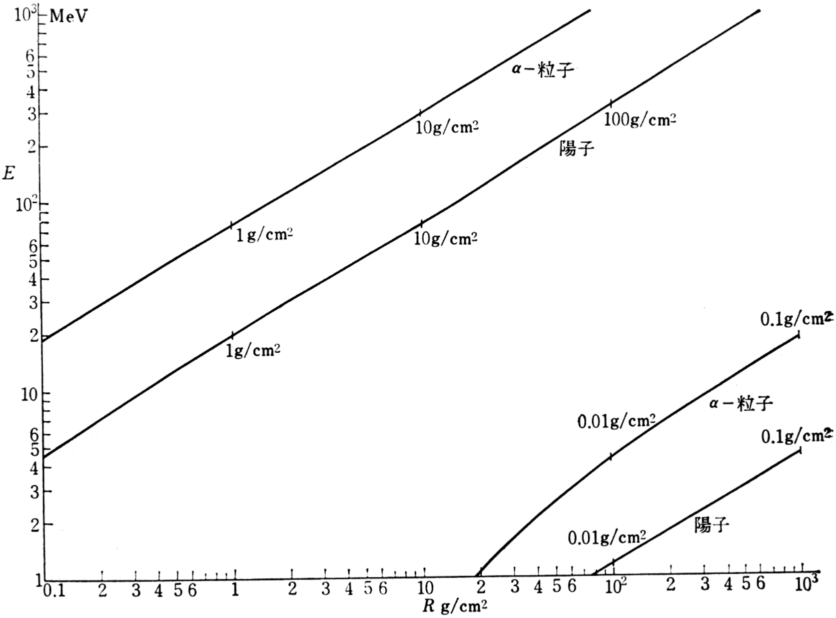
と書ける．$g(V, I)$ は V と I のみの関数で M, Z によらない．この関係よりたとえば陽子 ($Z=1$, $M=M_p$) に対する $R(E)$ がわかれば，同じ物質中での α 粒子 ($Z=2$, $M \approx 4M_p$) に対する $R(E)$ を知りうる．

$-dE/dl \propto 1/V^2$ の成立する低エネルギー領域の V に対しては g/cm² 単位で測った range は，

$$R(E) = \frac{MA}{zZ^2}\int\frac{V^2d(V^2/2)}{f(V, I)} \approx \frac{MA}{zZ^2}\frac{1}{f(\overline{V}, I)}\frac{V^4}{4} \approx \frac{AE^2}{zZ^2Mf(\overline{V}, I)} \tag{8.67}$$

となる．$f(\overline{V}, I)$ は $f(V, I)$ の速度についての適当な平均値で V にあまりよらない．したがって，荷電粒子の走行距離は M, Z^2，に逆比例し E^2 に比例する．

8-8 図は陽子および α 粒子の鉛に対する $R(E)$ である．同一の E に対する $R(E)$ の



8-8 図 鉛中での陽子および α 粒子の range

陽子に対する値と α 粒子に対する値の比は E によらず大体一定であり，また (8.67) よ

りこの比は $(Z^2M)_\alpha/(Z^2M)_p = 16$ になるはずである．これに対し 8-8 図からわかるように実験値は大体 10 である．この違いは主として α による I が陽子による I と異なるためによる（8-3 表の I は陽子によるもの）．8-8 図の R は g/cm² 単位で書かれているが，これを cm 単位に直すには密度 $\rho(=11.4)$ で割ればよい．

空気中での R の値は陽子に対し次の実験式がよく合うことが知られている．

$$R(E) = (E/9.3)^{1.8} \quad 数\ \mathrm{MeV} < E < 200\ \mathrm{MeV}. \tag{8.68}$$

E, R はそれぞれ MeV, meter で測る．数 MeV より低いエネルギーでは $R \propto E^n$ としたときの n は減少し $n \approx 1.5$ くらいになる．

〔イオン対の数〕

荷電粒子の物質をイオン化するようすは泡箱・霧箱・放電箱・原子核乾板等により目で見ることができる．またいろいろな計数管で作られたイオンを集めて電気的に測定しうる．粒子が物質中で失うエネルギー $-dE/dx$ と単位長さ中で作られるイオン対の数には大体比例関係がある．速度 V の粒子が電子に与える速度は $0\sim 2V$ の間に分布しており（(8.49) 参照），このため粒子は $I \sim I+2mV^2$ までのエネルギーを失って物質をイオン化する．しかし比較的 q（運動量変化）の少ない，したがってエネルギー損失の小さい衝突が多く，イオン対一個を作るに失うエネルギーは V によらず，大体一定で気体では陽子に対して 30 eV の程度である．したがって $-dE/dx$ とイオン対の数の間の比例関係が成立する．8-4 表はいろいろなガス中で 1 個のイオン対を作る際の平均のエネルギー損失 ω である．この ω と I の関係も同時に記してある．固体中での ω および I は気体中の値より大きい（8-3 表参照）．

8-4 表　イオン対一個を作るに要する平均のエネルギー ω

	ω	ω/I
H	~35 eV	2.2
He	~30 eV	1.2
O	~32 eV	2.6
A	~26 eV	1.6
Xe	~22 eV	1.8
Air	~35 eV	

〔多重散乱〕

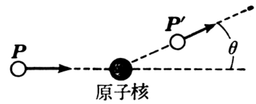
荷電粒子が物質中を通過するときイオン化によりエネルギーを失う．同時に運動量変化 q を受ける．この q は最大限 $q_0 = 2mV$ (8.57) で，入射粒子の運動量 MV にくらべて非常に小さいので，電子との衝突により受ける進行方向の角度の変化 θ は極めて小さい．すなわち $\theta \lesssim m/M$ の程度である．

一方で粒子は物質中を通過するとき，その原子核の作る Coulomb 場により散乱をうける．入射粒子の質量が原子核の質量にくらべて小さい時は，散乱により核はほとんど動かないので，入射粒子の衝突前後の運動量 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}'$ の大きさはエネルギー保存則より大体同じ

になる．したがって

$$q=|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}'|=2p\sin\frac{\theta}{2}\,(\approx p\theta,\ \cdots\ \theta\ll 1)\quad(8.69)$$

となる（8－9 図）．この q を用いると核の Coulomb ポテンシャル $\dfrac{Zze^2}{4\pi r}$ により入射粒子が θ 方向に散乱される Rutherford 散乱の断面積は（8.56）より，



8－9 図　荷電粒子の原子核による Rutherford 散乱

$$d\sigma(\theta)=\frac{(Zze^2)^2}{2\pi V^2}\,\frac{qdq}{(q^2+\hbar^2\kappa^2)^2}$$

となる．ze は原子核の荷電で q と θ の関係は（8.69）で与えられる．

この場合の κ は，粒子と原子核の距離が大きくなり核の Coulomb 場が原子中の電子により遮蔽されるようになる距離を r_1 とすると $\kappa r_1\approx 1$ で与えられる．すなわち，$r>r_1$ では Coulomb ポテンシャル（8.51）は電子に遮蔽されて急速に減少する．r_0 としてその原子（原子番号 z ）の半径をとると，

$$\frac{1}{\kappa}=r_1=a_0z^{-1/3}. \qquad (8.70)$$

a_0 は Bohr 半径で水素原子の拡がりである（8.45）．

さて，核による散乱と電子による散乱（8.56）とをくらべると，核１個に対し電子は z 個存在するから同じ q に対し断面積の比は $z(z^2:z)$ である．したがって z の大きい物質中では核による散乱が大部分である．また後者では電子が軽いため粒子の散乱角 θ は m/M の程度を越えないが，核による散乱では $0\sim\pi$ のすべての値が可能である．そこで核による散乱だけを考えることにする．（8.69）より小さな θ に対して $d\sigma(\theta)\propto\theta d\theta/(\theta^2+\hbar^2\kappa^2/p^2)^2$ で，大部分の散乱は θ の小さな散乱である．しかしある厚さの物質中を通る間には多数の核により小角度散乱が重なって，粒子の進行方向の変化は相当の大きさになりうる．一回の散乱での散乱角の自乗平均を $\langle\Delta\theta^2\rangle$ と書くと，

$$\langle\Delta\theta^2\rangle=\int\theta^2d\sigma(\theta)\Big/\int d\sigma(\theta) \qquad (8.71)$$

で与えられ，n 回散乱されたあとでの散乱角 θ_n の平均は，

$$\langle\theta_n{}^2\rangle=n\langle\Delta\theta^2\rangle$$

で与えられる．したがって厚さ D cm の物質を通過した時うける散乱角の平均値は（8.71）に散乱の起こる回数 $\left(ND\int d\sigma(\theta)\right)$ を掛けて得られる．

$$\langle\theta^2\rangle=ND\int_0^{\theta_{\max}}\theta^2d\sigma(\theta)\approx\frac{ND(Zze^2)^2}{2\pi V^2P^2}\log\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}. \qquad (8.72)$$

ただし，

$$\theta_{\min}=\frac{\hbar\kappa}{P}=\frac{\hbar z^{1/3}}{a_0P}. \tag{8.73}$$

$\theta_{\max}$ は π でもよいが，核の大きさが問題になるときなどはもっと小さい値に制限されることがある．

粒子のエネルギー $E(\propto VP)$ および物質の厚さ D を変えると，

$$\langle\theta^2\rangle^{1/2}\propto D^{1/2}|Z||z|/E \tag{8.74}$$

で変化する．log の項の D, E による変化はゆるやかである．同一のエネルギーの陽子と電子の場合をくらべると，上式は粒子の質量によらないので（かつ $|Z|$ も同一で $|Z|=1$）同じ厚さ D なら $\langle\theta^2\rangle$ は同一であるが，$R(E)$ は質量に逆比例するので電子の方が M_p/m (≈ 1840) 倍だけ長い距離走る．したがって，とまるまでにはより大きな角度散乱される．

一例として，電子の鉛中および空気中における $\langle\theta^2\rangle$ は，

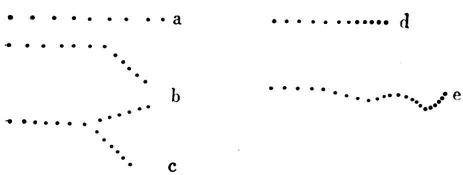
$$\langle\theta^2\rangle\approx\frac{6\times10^2D}{E^2}\quad(\text{鉛})$$

$$\langle\theta^2\rangle\approx\frac{7\times10^{-3}D}{E^2}\quad(\text{空気})$$

である．ただし，D は cm, E は MeV, $\langle\theta^2\rangle$ は (radian)^2 単位で測った値である．

［原子核乾板］

荷電粒子のイオン化損失を肉眼で見る方法の例として原子核乾板について調べよう．原子核乾板は臭化銀結晶粒を多数含む写真乾板で，荷電粒子が結晶粒を通過してイオン化しエネルギーを与えると結晶は感光作用を持ち，これを現像すると銀による黒い粒子像ができる．これを **grain** とよぶ．grain のできる頻度 P は $-dE/dx$ の小さい間は $-dE/dx$ に比例する．grain の大きさはいろいろな原子核乾板により異なり，また P と $-dE/dx$ の比例係数も乾板の感度等により異なる．大体の大きさは $(0.4\sim0.1)\,\mu$ 程度の直径で顕微鏡で拡大して肉眼で見ることができる．

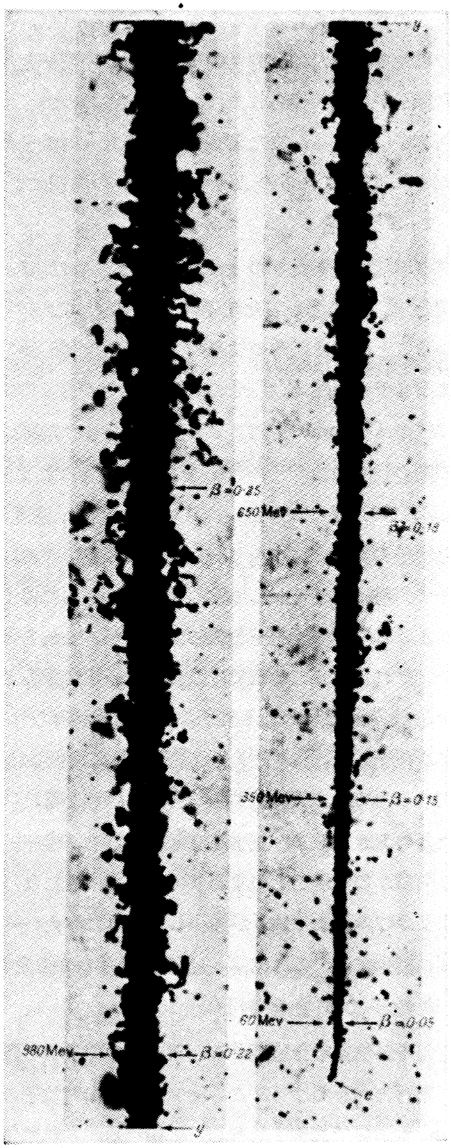


8-10 図　原子核乾板中の荷電粒子の飛跡
a 直進　b 弾性散乱　c 荷電粒子の発生
d 重い荷電粒子が止まる所　e 電子の止まる所

この乾板は乾板中に作られる多数の grain のようすから入射粒子の質量，荷電，速度についての知識を与える．第一に粒子が通過してイオン化作用を受けた臭化銀のみ感光作用を持つから，grain を結ぶ線は粒子の運動した径路を示す．またある



8-11 図　Z の大きな核の飛跡と δ 線



8-12 図　$Z=24\pm2$ の荷電粒子の止まりかけの飛跡 ($\beta=V/c$)

所からこの径路が大きくその方向を変えていれば，荷電粒子が乾板中の原子核と衝突して散乱されたり，または非弾性衝突して新しい粒子を作り出すことを示している．もし新たに荷電粒子が何個か作られれば，そのおのおのがイオン化作用を持ち粒子の飛跡はその点から何本かにふえる．また衝突しなくても入射粒子が崩壊すれば飛跡の曲がりまたは分れが観測される． これらの ようすは §1 の泡箱による飛跡の場合と同様である（1-1, 1-2, 1-3 図参照）．

飛跡の単位長さあたりの grain の数は $-dE/dx$ に比例するので，あらかじめこの比例係数を Z, V のわかった粒子につき測定しておけば， 逆に飛跡に沿って grain の密度をはかることにより，その粒子の Z^2/V^2 を (8.58) より決定できる．また乾板中で粒子がとまるまでの距離 $R(E)$ を測定して，その点での粒子の E^2/MZ^2 を測定しうる．次に，粒子は核の Coulomb 力により多重散乱をうけ飛跡は直線でなく一般に曲っている．単位長さの間の飛跡の曲り $\sqrt{\langle\theta^2\rangle}$ を測定するとこれより Z/E を測定できる．

もし Z があらかじめわかっていれば，grain 密度と $\langle\theta^2\rangle$ の同時測定から E と V，すなわち粒子の質量とエネルギーを同時に測定できる．

粒子の飛跡はよりくわしく検討すれば，さらに多くの知識を与えてくれる．粒子は電子をはねとばしてエネルギーを失っていくが，これら電子のあるものは十分なエネルギーをもらい，それ自身止まるまでに数個の粒子像を作ることができる．この場合，粒子の飛跡の所々から δ 線といわれる電子の短い飛跡がみられる．単位長さあたりの δ 線の数はあるエネルギー（$\sim 10^4$ eV）以上の電子の数に比例し，これはまた (8.58) より大体 Z^2/V^2 に比例するので，δ 線の数から Z^2/V^2 がわかる．(8-11 図)

また Z の大きな粒子が止まる直前になると，粒子速度と物質中の電子の速度とは同程度になり何個かの電子をそのまわりにつけて中性になろうとする傾向がある．このため粒子の止まりかけの場所では Z が減少したようにみえ $-dE/dx$ (8.58)，したがって grain の密度は減少する．これは Z の値を知る手がかりを与える．(8-12 図)

［荷電粒子の制動放射］

荷電粒子が物質中を通過するとき，その原子核の作る Coulomb 場で Rutherford 散乱を受け進行方向を曲げる．この衝突による荷電粒子の速度変化（運動量変化）は粒子が核の Coulomb 場で加速されることに相当し，古典電磁気学によれば，このような荷電粒子の加速（電流の変化）には光の放出を伴う．この現象を **制動放射** という．

量子化された場の理論では電磁場 A_μ は量子化された部分と古典的部分 $A_\mu{}^{Cl}$ の和である．荷電粒子と原子核の衝突を考えると核の荷電 ze による $A_\mu{}^{Cl}$ は，

$$\square A_\mu{}^{Cl} = -j_\mu \tag{8.75}$$

によって与えられる．ここで j_μ は核の作る荷電，電流密度で入射粒子の質量・エネルギーが核の質量にくらべて小さい場合には，核は衝突の間中ほとんど原点（$\boldsymbol{r}=0$）に静止していると考えてよいから，

$$j_\mu = (0,\ 0,\ 0,\ ze\delta(\boldsymbol{r})) \tag{8.76}$$

で，荷電密度 j_0 のみを持つ．したがって，

$$A_0{}^{Cl}(\boldsymbol{r}) = \frac{ze}{4\pi r}, \quad \boldsymbol{A}^{Cl} = 0. \tag{8.77}$$

入射粒子が電子である場合を考えると，電子と電磁場との minimal な相互作用は次の Hamiltonian で与えられる．

$$H = e\int \psi^\dagger\{(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}) - A_0\}\psi d\boldsymbol{r} = e\int \bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu \psi d\boldsymbol{r}. \tag{8.78}$$

A_μ を量子化された部分と $A_\mu{}^{Cl}$ とに分けると H は二つに分れる．

$$H_1 = e\int \psi^\dagger(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{A})\psi d\boldsymbol{r}, \quad H_2 = -z\frac{e^2}{4\pi}\int \frac{\psi^\dagger\psi}{r} d\boldsymbol{r}. \tag{8.79}$$

H_1 は電子と量子化された電場 $\boldsymbol{A}$ との minimal な相互作用，H_2 は電子と核の Coulomb 場 $A_0{}^{Cl}$ との相互作用である．ψ, $\psi^\dagger$ は量子化された電子の場である．

A_μ, ψ, $\psi^\dagger(=\bar{\psi}\gamma_0)$ はそれぞれ光子の吸収・放出，電子の吸収・陽電子の生成，陽電子の吸収・電子の生成の演算子であるから，H_1, H_2 は次のような遷移をひき起こす．

H_1：電子 ⇄ 電子 ＋ 光子，陽電子 ⇄ 陽電子 ＋ 光子，光子 ⇄ 電子 ＋ 陽電子

H_2：電子（$\boldsymbol{p}$, h）⇄ 電子（$\boldsymbol{p}'$, h'），陽電子（$\boldsymbol{p}$, h）⇄ 陽電子（$\boldsymbol{p}'$, h'），電子（$\boldsymbol{p}$, h）＋ 陽電子（$\boldsymbol{p}'$, h'）⇄ 真空．

すなわち H_1 は電子または陽電子による光子の放出，光子による陰陽電子対の発生（およびそれらの逆過程），H_2 は電子または陽電子の核の Coulomb 場による散乱および電子対の消滅，発生をひき起こす．

電子（$\boldsymbol{p}$, h）が核により散乱されて（$\boldsymbol{p}'$, h'）になる行列要素は ψ, $\bar{\psi}$ の展開式 (7.53), (7.54) より，

$$\begin{aligned} \psi &\sim \sqrt{\frac{1}{L^3}}a(\boldsymbol{p},\ h)u(\boldsymbol{p},\ h)e^{i\boldsymbol{pr}/\hbar}, \\ \psi^\dagger &\sim \sqrt{\frac{1}{L^3}}a^\dagger(\boldsymbol{p}',\ h')\bar{u}(\boldsymbol{p}',\ h')\gamma_0 e^{-i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}/\hbar}. \end{aligned} \tag{8.80}$$

これを H_2 に代入し（(2.74) 参照），

$$\int \frac{\exp[i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\boldsymbol{r}/\hbar]}{r}d\boldsymbol{r} = \frac{4\pi\hbar^2}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'|^2}$$

を用いると，

$$\langle \boldsymbol{p}',\ h'|H_2|\boldsymbol{p},\ h\rangle = -\frac{\hbar^2 ze^2}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'|^2}\cdot\frac{1}{L^3}\bar{u}(\boldsymbol{p}',\ h')\gamma_0 u(\boldsymbol{p},\ h). \tag{8.81}$$

光速度にくらべて，おそい電子に対しては（(7.37) 参照），

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}',\ h')\gamma_0 u(\boldsymbol{p},\ h) \approx \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

で $\bar{u}\gamma_0 u$ は電子のスピンの向きに変化のないとき 1，向きが逆転するとき 0 になる．すなわち H_2 による散乱の行列要素にはスピンの向きの変らない散乱のみ存在し，この大きさはちょうど（8.51）の $H=-ze^2/4\pi r$（ただし $\kappa=0,\ Z=z$）による散乱と同一になる．したがって（8.53），（8.56）の Rutherford 散乱は量子化された場の理論では H_2 を通して導かれる．

さて，H_1, H_2 を摂動として取り扱うと，H_2 の 1 次の摂動では上述のように電子の弾性散乱が起こる．これに対し H_1 による 1 次の摂動では電子または陽電子による光の放出等の過程が起こるが，自由電子に対してはエネルギー・運動量の保存則を両方同時にみたすことができないので，実際には起こらない（問題 4.2 参照）．そこで自由電子（または陽電子）による光の放出・吸収を考えるには H_1, H_2 につき 2 次の摂動まで考えに入れなければならない．（2.70）により H_1, H_2 それぞれにつき 1 次，合せて 2 次の摂動による遷移確率は，

$$w = \frac{2\pi}{\hbar}|T|^2\rho, \tag{8.82}$$

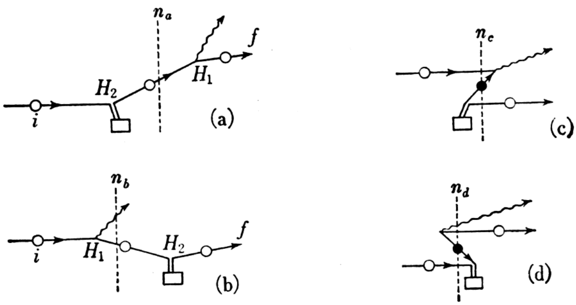
$$T = \sum_n \frac{\langle f|H_1|n\rangle\langle n|H_2|i\rangle}{E-E_n} + \sum_n \frac{\langle f|H_2|n\rangle\langle n|H_1|i\rangle}{E-E_n} \tag{8.83}$$

となる．i, f はそれぞれ初めおよび終りの状態，n は中間状態である．これら中間状態と遷移のようすは 8-13 図（a）～（d）に示す．（a）図ではまず入射した電子が Rutherford 散乱をうけ（H_2），次に H_1 により光子を放出する．（b）図ではその順序が逆になっている．（c）図は H_2 により核の Coulomb 場で電子対が作られ，その陽電子が入射電子と対消滅して光子になる（H_1）．（d）図では H_1 により f 状態の光子・電子の他に陽電子が作られ，次に H_2 によりこの陽電子が入射電子と対消滅する．

E, E_n は i（または f），n 状態のエネルギーで，中間状態ではエネルギーの保存は要求されないから E_n は E と異なる．

核は非常に重いので衝突中運動量は貰うがエネルギーはほとんど受けとらないとすると

$$E - E_n = \begin{cases} c\hbar k + E(\boldsymbol{p}') - E(\boldsymbol{p}' - \hbar \boldsymbol{k}) & \cdots \text{a)} \\ -c\hbar k + E(\boldsymbol{p}) - E(\boldsymbol{p} - \hbar \boldsymbol{k}) & \cdots\cdots \text{b)} \\ c\hbar k - E(\boldsymbol{p}) - E(-\boldsymbol{p} + \hbar \boldsymbol{k}) & \cdots \text{c)} \\ -c\hbar k - E(\boldsymbol{p}') - E(-\boldsymbol{p}' - \hbar \boldsymbol{k}) & \cdots \text{d)}. \end{cases} \tag{8.84}$$



8-13 図　制動放射

i : 電子 $(\boldsymbol{p}, h)$
f : 電子 $(\boldsymbol{p}', h')$ + 光子 $(\boldsymbol{k}, \lambda)$
n_a : 電子 $(\boldsymbol{p}' + \hbar\boldsymbol{k}, h_n)$
n_b : 電子 $(\boldsymbol{p} - \hbar\boldsymbol{k}, h_n)$ + 光子 $(\boldsymbol{k}, \lambda)$
n_c : 電子 $(\boldsymbol{p}, h)$ + 電子 $(\boldsymbol{p}', h')$ + 陽電子 $(\hbar\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}, h_n)$
n_d : 電子 $(\boldsymbol{p}, h)$ + 電子 $(\boldsymbol{p}', h')$ + 陽電子 $(-\hbar\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}', h_n)$
+ 光子 $(\boldsymbol{k}, \lambda)$

○電子　●陽電子　□原子核

ここで $E(\boldsymbol{p})$ は運動量 $\boldsymbol{p}$ の電子の全エネルギーである. $\hbar/|E - E_n|$ は不確定関係より系が状態 n に存在する時間の程度で H_1, H_2 による二つの過程が次々に起こる時間間隔はこの程度と考えてよい. 特に波長の長い光 $(k \sim 0)$ を放出する場合には (a), (b) に対する中間状態 n_a, n_b ではこの時間は $1/ck = 1/\omega$ の程度となり，光子の振動数に逆比例して無限に長い時間まで増大しうる. これに反し (c), (d) 状態ではこの時間は $k \to 0$ のときそれぞれ $\hbar/2E(\boldsymbol{p}), \hbar/2E(\boldsymbol{p}')$ の程度となる.

光子 $(\boldsymbol{k}, \lambda)$ を放出する H_1 の遷移行列は A_μ, ψ, ψ に対する展開式 (6.43), (7.53), (7.54) を使って求められる.

$$\begin{aligned} \langle f|H_1|n\rangle &= e\sqrt{\frac{c\hbar}{2k}} \cdot L^{-3/2}\bar{u}(\boldsymbol{p}', h')\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}, \lambda)\gamma u(\boldsymbol{p}' + \hbar\boldsymbol{k}, h_n) \cdots \text{a)}, \\ \langle n|H_1|i\rangle &= e\sqrt{\frac{c\hbar}{2k}} \cdot L^{-3/2}\bar{u}(\boldsymbol{p} - \hbar\boldsymbol{k}, h_n)\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}, \lambda)\gamma u(\boldsymbol{p}, h) \cdots \text{b)}, \\ \langle f|H_1|n\rangle &= e\sqrt{\frac{c\hbar}{2k}} \cdot L^{-3/2}\bar{v}(\boldsymbol{p} - \hbar\boldsymbol{k}, h_n)\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}, \lambda)\cdot\gamma u(\boldsymbol{p}, h) \cdots \text{c)}, \\ \langle n|H_1|i\rangle &= e\sqrt{\frac{c\hbar}{3k}} \cdot L^{-3/2}\bar{u}(\boldsymbol{p}', h')\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}, \lambda)\gamma v(\boldsymbol{p}' + \hbar\boldsymbol{k}, h_n) \cdots \text{d)}. \end{aligned} \tag{8.85}$$

同様に H_2 による部分は (8.81) を参照して,

$$\begin{aligned}
\langle n|H_2|i\rangle &= -\frac{\hbar^2 ze^2}{q^2}\cdot\frac{1}{L^3}\bar{u}(\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k},\ h_n)\gamma_0 u(\boldsymbol{p},\ h) \quad \cdots\mathrm{a}),\\
\langle f|H_2|n\rangle &= -\frac{\hbar^2 ze^2}{q^2}\cdot\frac{1}{L^3}\bar{u}(\boldsymbol{p}',\ h')\gamma_0 u(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k},\ h_n) \quad \cdots\mathrm{b}),\\
\langle n|H_2|i\rangle &= -\frac{\hbar^2 ze^2}{q^2}\cdot\frac{1}{L^3}\bar{u}(\boldsymbol{p}',\ h')\gamma_0 v(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k},\ h_n) \quad \cdots\mathrm{c}),\\
\langle f|H_2|n\rangle &= -\frac{\hbar^2 ze^2}{q^2}\cdot\frac{1}{L^3}\bar{v}(\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k},\ h_n)\gamma_0 u(\boldsymbol{p},\ h) \quad \cdots\mathrm{d})
\end{aligned} \tag{8.86}$$

である．$\boldsymbol{q}$ は Rutherford 散乱のときの運動量変化で，

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}. \tag{8.87}$$

遷移行列 T は H_1, H_2 の行列要素の積から作られるが，この際，電子が Fermi 統計にしたがうために起こる次の符号に注意する．電子 $(\boldsymbol{p},\ h)$ の消滅の演算子を a_i, 電子 $(\boldsymbol{p}',\ h')$ の生成の演算子を $a_f^\dagger$, n 状態に存在するもう一つの電子（または陽電子）の生成・消滅の演算子を $a_n^\dagger$, a_n（または $b_n^\dagger$, b_n）で記すと，（a）～（d）の遷移で，これら演算子の積の順序は，

$$\begin{aligned}
&a_f^\dagger a_n a_n^\dagger a_i \quad (\mathrm{a}),\ (\mathrm{b})\\
&b_n a_i a_f^\dagger b_n^\dagger \quad (\mathrm{c}),\ (\mathrm{d})
\end{aligned}$$

である．これらは交換関係を用いて書き直すと，

$$a_f^\dagger a_i a_n a_n^\dagger\cdots(\mathrm{a}),\ (\mathrm{b}) \qquad -a_f^\dagger a_i b_n b_n^\dagger\cdots(\mathrm{c}),\ (\mathrm{d})$$

となり，$i\to f$ 遷移に対して（a），（b）と（c），（d）では符号が異なる．

終状態の状態密度 ρ は，

$$\rho dE=\frac{L^6}{(2\pi\hbar)^6}d\boldsymbol{p}'d(\hbar\boldsymbol{k})=\frac{L^6}{(2\pi)^6}\frac{p'E'dE'd\Omega'k^2dkd\Omega_k}{\hbar^3c^2}.$$

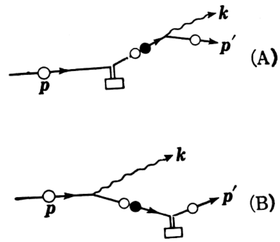
ここで $d\Omega$, $d\Omega_k$ は $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{k}$ の方向の小立体角である．$E=E'+c\hbar k$ より $dE=dE'$, したがって，

$$\rho=\frac{L^6}{(2\pi)^6}\frac{p'E'k^2d\Omega'd\Omega_kdk}{\hbar^3c^2}. \tag{8.88}$$

制動放射の断面積は w(8.82) に $L^3/V=L^3E/pc^2$ をかけて得られる．(8.84)～(8.88) および前述の符号のことを考慮すると，

$$\begin{aligned}
d\sigma=&\frac{\alpha z^2e^4\hbar^2}{(2\pi)^4c^2}\frac{kp'E'E}{pq^4}d\Omega'd\Omega_kdk\\
&\times\left|\sum_{\pm}\sum_{h_n}\left\{\frac{(\bar{u}(\boldsymbol{p}',\ h')\gamma_0u_\pm(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k},\ h_n))(\bar{u}_\pm(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k},\ h_n)\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{\gamma}u(\boldsymbol{p},\ h))}{E-(c\hbar k\pm E(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k}))}\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{(\bar{u}(\boldsymbol{p}',\ h')\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{\gamma}u_\pm(\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k},\ h_n))(\bar{u}_\pm(\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k},\ h_n)\gamma_0u(\boldsymbol{p},\ h))}{E\mp E(\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k})}\right\}\right|^2
\end{aligned} \tag{8.89}$$

となる．$u_\pm$ は中間状態における電子および陽電子の状態（$u_+=u,\ u_-=v$）であり，Σ は ± およびそのヘリシティ h_n についての和をとる．



8-14 図　○ 正エネルギー電子
● 負エネルギー電子
□ 原子核

この式から（a），（d）はまとめて 8-14（A）図，（b），（c）は 8-14（B）図に対応することがわかる．ただし，中間状態の電子は正・負エネルギー状態の両方をとり，その正負に応じて，

$$E_n=\begin{cases}\pm E(\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k}) & \cdots(\mathrm{A})\\ c\hbar k\pm E(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k}) & \cdots(\mathrm{B})\end{cases}$$

と考える．

（a）**電子の速度の遅い場合**（非相対論的場合）

$d\sigma$(8.89) は極めて複雑であるから，電子の速度 $V\ll c$ の場合につき $d\sigma$ を計算する．この近似では $p,\ p'\ll mc$ でエネルギー保存則は次式となる

$$c\hbar k=(p^2-p'^2)/2m.$$

これより $\hbar k\ll p, p'$，$\boldsymbol{q}\approx\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'$，$E\approx E'\approx mc^2$，

$$\bar{u}_+\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{\gamma}u(\boldsymbol{p},\ h)\sim\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{p})}{mc},\quad \bar{u}(\boldsymbol{p}',\ h')\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{\gamma}u_+\sim\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{p}')}{mc},$$

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}',\ h')\gamma_0u_+\sim1,\quad \bar{u}_+\gamma_0u(\boldsymbol{p},\ h)\sim1,$$

$$E-(c\hbar k+E(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k}))\approx-c\hbar k,\quad E-E(\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{h}')\sim c\hbar k$$

等が得られる．

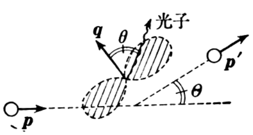
中間状態が $u_-(=v)$ である陽電子発生を媒介（8.13 図（c），（d））とする制動放射の行列要素 T は $V\ll c$ の場合は 8-13 図（a），（b）からの T にくらべて $\hbar k/mc$ の程度小さいことがわかるので省略できる．$d\sigma$ は上の近似式を代入すると，

$$d\sigma\approx\frac{z^2\alpha^3}{\pi^2}\frac{p'\hbar^2}{kpq^4}(\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{q})^2d\Omega'd\Omega_kdk\quad(\alpha=e^2/4\pi\hbar c)$$

となる．光の偏りの2方向につき和をとると，

$$\sum_{\lambda=1,2}(\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{q})^2=q^2-(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2/k^2,$$

$$d\sigma=\frac{z^2\alpha^3}{\pi^2}\frac{p'\hbar^2}{kpq^4}\left\{q^2-\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2}{k^2}\right\}d\Omega'd\Omega_kdk.$$



8-15 図　光子放出の角度分布（非相対論的場合）．

光子は電子の運動量変化 $\boldsymbol{q}$（加速度）の方向には放出されず，それに垂直な方向に一番強く放出される．$\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{k}$ の間の角度を θ とすると，その強度分布は $\sin^2\theta$ に比例する．$d\Omega',\ d\Omega_k$ で積分す

るとエネルギー $c\hbar k$ の光子を放出する全断面積が得られる．

$$\int d\Omega_k\left\{q^2-\frac{(\boldsymbol{q}\boldsymbol{k})^2}{k^2}\right\}=\frac{8\pi}{3}q^2,$$

$$\int q^{-2}d\Omega'=2\pi\int_{-1}^{1}\frac{d\cos\Theta}{p^2+p'^2-2pp'\cos\Theta}=\frac{2\pi}{pp'}\log\frac{p+p'}{p-p'}$$

により（Θ は $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ の間の角度），

$$\sigma(k)dk=\frac{16}{3}\bar{\phi}\left(\frac{mc}{p}\right)^2\frac{dk}{k}\log\frac{p+p'}{p-p'}. \tag{8.90}$$

ここで，

$$\phi=\alpha\cdot z^2r_0{}^2\approx z^2\times 5.79\times 10^{-28}\,\mathrm{cm}^2,$$
$$r_0=\frac{e^2}{4\pi mc^2}\approx 2.82\times 10^{-13}\,\mathrm{cm}\ (\textbf{古典電子半径}\text{といわれる}). \tag{8.91}$$

$\sigma(k)$ は k の小さい所で $1/k$ に比例するので，振動数の低い光子は極めて放出されやすく，実際に電子が核で Rutherford 散乱をうけると，単に 1 個の光子が放出されるだけでなく，非常に多数個の小さな k の光子が同時に放出される．このことは同時に k の小さい光子の放出吸収に対しては摂動論がよくないことを意味しており，H_1 は小さな摂動としては扱えない．より正確な計算によると，多数個の光子の放出が行なわれ，それら光子の全エネルギーが $c\hbar k\sim c\hbar(k+dk)$ の間にあるような制動放射の $d\sigma$ が大体 (8.90) で与えられる．

(b) 相対論的場合 ($V\approx c,\ E\gg mc^2$)

この場合は $E\approx cp\gg mc^2,\ E'\approx cp'\gg mc^2$ であるから $mc/p,\ mc/p'$ につき展開すると，簡単な計算から，

$$[E-(c\hbar k+E(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k}))][E-(\hbar k-E(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k}))]$$
$$=-2c\hbar k(E-cp\cos\theta)\approx-4c^2\hbar kp\left\{\sin^2\frac{\theta}{2}+\left(\frac{mc}{2p}\right)^2\right\}$$

および，

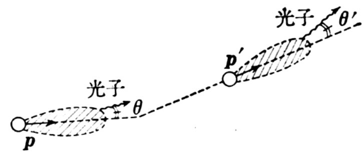
$$[E-E(\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k})][E+E(\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k})]=2c\hbar k(E_{p'}-cp'\cos\theta')$$
$$\approx 4c^2\hbar kp'\left\{\sin^2\frac{\theta'}{2}+\left(\frac{mc}{2p'}\right)^2\right\}$$

となる．θ, θ' は $\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{p}'$ と $\boldsymbol{k}$ の間の角度である．$(mc/2p')^2, (mc/2p)^2\ll 1$ より，これらはそれぞれ $\theta'\approx 0, \theta\approx 0$ のとき小さな値を持つので，(8.89) より光子は $\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{p}'$ の方向に強く放出されることがわかる．光の強く放出される範囲は大体，

$$|\theta|\lesssim\frac{mc}{p},\qquad |\theta'|\lesssim\frac{mc}{p'} \tag{8.92}$$

で与えられる小さな角度範囲である．(8-16図参照)

この場合の (8.89) の計算は複雑であるが $d\sigma$ を $d\Omega' d\Omega_k$ について積分すると次の結果が得られる．$k \sim k+dk$ の光子を放出する断面積は，



8-16 図 光子放出の角度分布（相対論的場合）

$$\sigma(k)dk = 2\bar{\phi}\frac{E'}{E}\cdot\frac{dk}{k}\left[-\frac{2}{3}+\frac{E^2+E'^2}{EE'}\right]\left[2\log\frac{2EE'}{mkc^3\hbar}-1\right]. \qquad (8.93)$$

よりくわしい核の Coulomb 場に対する電子の遮蔽を考えた計算では，

$$\sigma(k)dk = 4\bar{\phi}\frac{E'}{E}\,\frac{dk}{k}\left[\left(-\frac{2}{3}+\frac{E^2+E'^2}{EE'}\right)\cdot\log\left(\frac{4}{3\alpha z^{1/3}}\right)+\frac{1}{9}\right]. \qquad (8.94)$$

この式は $EE'/mkc^3\hbar \gg 1/\alpha z^{1/3} \approx 137z^{-1/3}$ のとき成立する．

[制動放射によるエネルギー損失]

電子が物質 1 cm を通過するとき，制動放射により失うエネルギーはイオン化によるエネルギー損失と同様に求められる．すなわち，

$$-\frac{dE}{dx} = N\int_0^{k_{\max}} c\hbar k\sigma(k)dk, \qquad (8.95)$$

$k_{\max}$ は入射エネルギーのすべてが光子に与えられる場合で，次式で与えられる．

$$c\hbar k_{\max} = E - mc^2. \qquad (8.96)$$

(8.90) または (8.94) を (8.95) の $\sigma(k)$ に代入すると，非相対論的および相対論的の場合のおのおのについて $-dE/dx$ が得られる．簡単な計算から，

$$-\frac{dE}{dx} = \begin{cases} \dfrac{16}{3}\bar{\phi}mc^2N \text{（非相対論的場合）} \\ \left\{4\log\left(\dfrac{4}{3\alpha z^{1/3}}\right)+\dfrac{2}{9}\right\}\bar{\phi}EN \text{（相対論的場合）} \end{cases} \qquad (8.97)$$

となる．いずれの場合にも $-dE/dx$ は入射エネルギー E（非相対論的 $V \ll c$ の場合には $E \approx mc^2$）に比例する．また物質の N, z^2 に比例する．

長さを g/cm² の単位で測ると，

$$-\frac{dE}{dl} = \begin{cases} \dfrac{16}{3}\bar{\phi}\dfrac{mc^2N_0}{A} \\ \left\{4\log\left(\dfrac{4}{3\alpha z^{1/3}}\right)+\dfrac{2}{9}\right\}\bar{\phi}\dfrac{EN_0}{A}. \end{cases} \qquad (8.97')$$

以上は核の Coulomb 場内での電子の制動放射を考えたが，電子が原子と衝突するとき原

子内の電子との衝突によっても制動放射が起こる．$\hbar\nu \gg mc^2$ の領域では大体 $z=1$ の核の Coulomb 場による制動放射の σ と同程度となり，電子が z 個存在するから，その z 倍となる．したがって電子と原子との衝突による制動放射のエネルギー損失は (8.97′) で $\bar{\phi}$(8.91) の代りに，

$$\bar{\phi}_{\mathrm{atom}} = \alpha z(z+1)r_0{}^2 \approx z(z+1)\times 5.79\times 10^{-28}\,\mathrm{cm}^2 \tag{8.98}$$

を用いて得られる．

$-dE/dx$ と E の比例係数を λ とすると，

$$-\frac{dE}{dx} = \lambda E$$

より，

$$E = E_0 e^{-\lambda x}. \tag{8.99}$$

E_0 は物質に入射したときの電子のエネルギー，E はその電子が物質 x cm を通過したときに持つエネルギーである．$E/E_0 = 1/e$ (e は自然対数の底) になる距離 l_r を **radiation length** とよぶ．相対論的速度で走っている電子に対しては (8.97′) より，

$$l_r \approx \frac{1}{4N\bar{\phi}\log(4/3\alpha z^{1/3})} \tag{8.100}$$

である．

イオン化エネルギー損失の場合と同様に g/cm² を単位で測ると (8-5 図)，

$$l_r \approx \frac{A}{4N_0\bar{\phi}\log(4/3\alpha z^{1/3})} \propto \frac{A}{z^2}. \tag{8.101}$$

8-5 表にいろいろな物質に対する l_r を記してある．

8-5 表　いろいろな物質中での電子の radiation length l_r および E_c.

	z	A	l_r (g/cm²)	E_c (MeV)
H	1	1	58	340
C	6	12	44.6	103
O	8	16	35.3	77
Al	13	27	24.5	47
Fe	26	56	14.1	35
Pb	82	207	6.5	6.9
空　気			37.7	83
水			37.1	93

電子の制動放射による $-dE/dl$(8.97′) とイオン化によるエネルギー損失 (8.63) とをくらべるといちじるしい差がある．まず物質の原子番号に対して放射損失は z^2 に比例し，

イオン化エネルギー損失は z に比例する．次に $E \gg mc^2 (V \approx c)$ の電子に対して放射損失は E に比例して増大するが，イオン化損失は $\log E$ に比例して徐々に増大するだけである．したがって E, z の大きな程放射損失はイオン化損失にくらべて重要となる．

$V \ll c$ の非相対論的領域ではイオン化損失は $1/E$ に比例して E が小さくなると共に増大し，この領域では放射損失は重要ではない．電子に対して放射損失とイオン化損失の等しくなるエネルギー E_c を 8-5 表に記してある．$E > E_c$ では放射損失，$E < E_c$ ではイオン化損失が主なエネルギー損失になる．エネルギー E の電子の原子番号 z の物質中における放射損失とイオン化損失の比は大体次式で与えられる．

$$(dE/dl)_{\text{放射}}/(dE/dl)_{\text{イオン化}} \approx \frac{zE}{800}. \qquad (8.102)$$

ここで E は MeV 単位でのエネルギーの値である．

これまで電子による制動放射を考えてきたが，他のより重い荷電粒子による制動放射も同様にして扱える．質量 M，荷電 Z の Dirac 粒子による放射の断面積，エネルギー損失は電子の質量 m の代りに M，電子の荷電 $-e$ の代りに Ze を使えば電子の場合と同じ式が使える．制動放射によるエネルギー損失は $\bar{\phi}E$ に比例するが，粒子 M, Z に対する $\bar{\phi}$ としては (8.91) の代りに，

$$\phi \to Z^2\left(\frac{m}{M}\right)^2 \bar{\phi}$$

を使わねばならないから，たとえば，同じエネルギー E の陽子と電子では陽子の $-dE/dl$ は $(m/M)^2 \approx 3 \times 10^{-7}$ 程度小さい．これに対し，イオン化によるエネルギー損失は質量にあまりよらないので，電子以外の重い荷電粒子に対しては多くの場合放射損失は無視できる．

§ 8.5 光と物質の相互作用

光が物質中を通過するとき，光と物質中の電子との間に働く minimal な電磁的相互作用により，電子にエネルギーを与えて光が吸収されたり，また散乱されたりする．このようすは光のエネルギーにより変ってくる．

(a) 光子の原子による共鳴吸収

原子中の電子はある特定のエネルギーを持つ固有状態に存在する．たとえば水素原子中の電子は主量子数 n，全角運動量 j，軌道角運動量 $l\left(=j \pm \frac{1}{2}\right)$ で指定される一つの固有状態に存在し，そのエネルギー $E_{n,j,l}$ は近似的に ((8.34) 参照)，

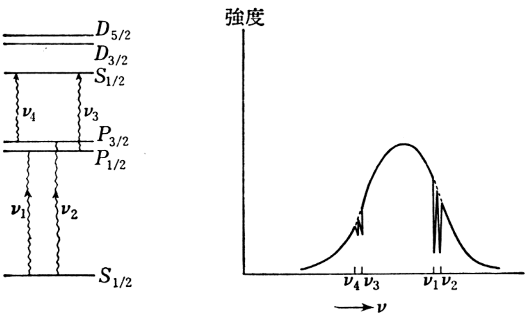
$$E_{n,j,l} = -\frac{\alpha^2}{2n^2} mc^2$$

で与えられる．もし電子の二つのエネルギー準位 (n, j, l) と (n', j', l') のエネルギー差に等しいエネルギーの光子が入射すると，初め (n, j, l) 状態にあった原子は光子を吸収して，よりエネルギーの高い (n', j', l') 状態に移る．水素原子が励起されてない状態では，電子は最底エネルギー状態 $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)S_{1/2}$ 状態にあるから，光子の振動数 ν が，

$$\hbar\nu = \frac{\alpha^2}{2}mc^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots) \tag{8.103}$$

になったとき光子の吸収が起こり主量子数 n の状態に電子は励起される．

実際には (8.37) で与えられるように n が同一でも j の異なる状態のエネルギーは異なるので(8-2 図) $n = 1 \to n$ に対応して吸収される光の振動数は j により少し異なる．またアルカリ原子の例 (8-3 図) でわかるように，一般には j, l により異なってくる．



8-17 図　光の吸収スペクトル

さて，いろいろな振動数の光子の集まりからなる光波が物質中を通過すると，光子のうちでその振動数が (8.103)，一般には（原子の二つのエネルギー固有値の差）$/\hbar$ に等しくなったとき吸収が起こる．したがって光波の強度スペクトルをとると物質を通過後特定の振動数の光の選択吸収がみられる (8-17 図)．この吸収スペクトルは線スペクトルであるが，n が同一でも j, l が異なるとエネルギーが少し異なることに対応して，極めて接近した何本かの線が集まっているのが普通である．

このような遷移は電子と光子の間の相互作用 H_1 の1次の摂動で起こり (8.79)，

$$H_1 = e\int \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha A}\psi d\boldsymbol{r},$$

§ 6.3 の例題（100 ページ）と同様にして計算できる．

いま原子の二つの状態 a, b を考え $E_b - E_a = \hbar\nu$ で与えられる振動数 ν，かつある特定の立体角 $d\Omega$ 方向に進行し，特定の偏りを持つ光子が $n(\nu)\,d\Omega$ 個存在する系を考えよう．

b 状態から a 状態に原子が遷移して ν の光子を立体角 $d\Omega$ 内に放出する確率を w（放出），逆に $d\Omega$ 方向に進む光子 ν を吸収して $a \to b$ の遷移を行なう確率を w（吸収）と

する．H_1 の中のA_μ は演算子 a, $a^\dagger$ を含み，光子の放出の場合は初め $n(\nu)$ 個の光子が $n(\nu)+1$ 個に，吸収の場合は $n(\nu)$ が$n(\nu)-1$ になるから，

$$\langle n+1|a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1},\quad \langle n-1|a|n\rangle=\sqrt{n}$$

より，

$$\frac{w\,(\text{放出})}{w\,(\text{吸収})}=\frac{n+1}{n} \tag{8.104}$$

である．w（放出）は § 6.3 の例題で与えられているから w（吸収）は上の関係から導かれる．

もし a, b 状態にある原子の個数を N_a, N_b とし原子と光が平衡状態にあるとすると，a 状態にある原子による光子 ν の吸収の確率と b 状態にある原子による放出の確率は等しいから，

$$N_a w\,(\text{吸収})=N_b w\,(\text{放出}). \tag{8.105}$$

さらにこの系が温度 T の熱平衡状にあるとすると Boltzmann 統計により（5.14），

$$N_a \exp(E_a/kT)=N_b \exp(E_b/kT). \tag{8.106}$$

(8.104)～(8.106) より，

$$n(\nu)=\frac{1}{\exp(\hbar\nu/kT)-1}. \tag{8.107}$$

(b) 光電効果

光子のエネルギーが十分高くなると，光子が電子と衝突して吸収され $E>0$ の状態に電子を励起する．すなわち原子はイオン化されて電子は原子外に飛び出していく．**光電効果**といわれるこの現象は，(a) の場合と異なり原子をイオン化するに十分なエネルギーの光子であれば，そのエネルギーの値を連続的に変えても常に起こりうる．原子をイオン化するに要するエネルギー I は原子内のどの電子を叩き出すかにより異なり，その電子の結合エネルギーの絶対値に等しい．(8-3 表の I は原子内のそれぞれの電子に対する I を適当に平均したものであり**平均のイオン化エネルギー**といわれる．) 原子番号 z の原子では主量子数 n の電子に対する I は大体

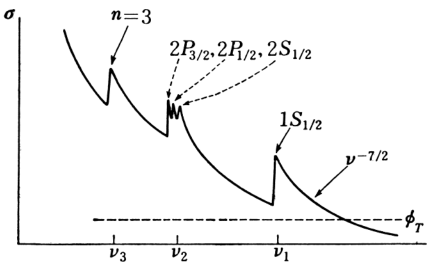
$$I_n\approx\frac{z^2\alpha^2}{2n^2}mc^2 \tag{8.108}$$

である．振動数 ν の光子による光電効果で叩き出される電子のエネルギーは，エネルギー保存則から，

$$T=\hbar\nu-I \tag{8.109}$$

で与えられる．

振動数 ν が $I/\hbar$ に等しいときが，その電子をはね飛ばすことによる光電効果の起こる限界で，ν をだんだん大きくしていくと，ある所から先ではより強く束縛されている電子も叩き出されるようになり，最終的には ν が十分大きくなると原子内で最も強く束縛されている電子も叩き出される．



8－18 図　光電効果の断面積 $\sigma(\nu)$

8－18 図は光電効果で光子の振動数と吸収の強さの関係の大体のようすを記したものである．$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \cdots$ $(\nu_1 > \nu_2 > \nu_3 \cdots)$ は主量子数 $n=1, 2, 3, \cdots$ の状態の電子が光電効果により飛び出す臨界の振動数であり，ν がだんだん大きくなり ν_n を越えると，n 状態の電子が新たに叩き出されるようになり，光子の吸収の断面積は不連続的に増加する．ν_2 に対応する山が三つに分れているのは $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$, $2P_{3/2}$ 状態の固有エネルギーが少しずつ異なるためで，n の大きくなる程さらに多くの山に分れる．（ただし実験的な分離はより難しくなる．）

光電効果の断面積は（a）の場合と同様にして計算できる．たとえば水素原子の $1S$ 電子に対する光電効果の断面積は，

$$d\sigma_K = \frac{L^3}{c} \cdot \frac{2\pi}{\hbar} |H_1|^2 \rho. \tag{8.110}$$

$n=1, 2, 3, \cdots$ の状態は，それぞれ K, L, M 状態といわれるので，K 状態電子が叩き出される光電効果の断面積を σ_K と書く．

(8.32), (8.33) より，

$$\psi_a \equiv \psi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}} u_a e^{-r/a_0}, \qquad \psi_b = \frac{1}{\sqrt{L^3}} u_b e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}/\hbar}.$$

u_a, u_b は a, b 状態の4次元スピノルである．ρ は電子が立体角 $d\Omega$ の方向に運動量 $\boldsymbol{p}$ で放出されるときの状態密度で，

$$\rho = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} p^2 \frac{dp}{dE} d\Omega \approx \frac{L^3 mp}{(2\pi\hbar)^3} d\Omega. \tag{8.111}$$

（$\approx$ は $p \ll mc$ のとき），

原子番号 z の原子の場合は，ψ_a は Bohr 半径 a_0 の代りに，

$$a = \frac{a_0}{z} = \frac{\hbar^2}{me^2} \frac{1}{z} \tag{8.112}$$

を用いればよい．ψ_a, ψ_b を（8.79）に代入すると，

$$\langle b|H_1|a\rangle = e\sqrt{\frac{c\hbar}{2L^3k}}\int \psi_b{}^\dagger(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\alpha})e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\psi_a d\boldsymbol{r} \tag{8.113}$$

である．

1）**非相対論的場合**　$p \ll mc$ のときは，電子は非相対論的に扱えるので（a 状態の電子は c にくらべ遅い速度で走っている）$\boldsymbol{\alpha} \approx \boldsymbol{p}/mc$ とおけるから（問題 7.6 参照），

$$\int e^{-r/a_0}e^{i(\hbar\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{r}/\hbar}d\boldsymbol{r} = \frac{8\pi}{a_0(q^2/\hbar^2+1/a_0{}^2)^2}$$

を使って書き直すと，

$$\langle b|H_1|a\rangle = \frac{4e\hbar^2}{mcL^3}\sqrt{\frac{2\pi c\kappa}{k}}\frac{\kappa^2}{(q^2+\kappa^2)^2}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{p})(u_b{}^\dagger,\ u_a). \tag{8.114}$$

ただし，

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \hbar\boldsymbol{k}, \quad \kappa = \hbar/a_0 \tag{8.115}$$

である．これより，

$$d\sigma_K = r_0{}^2\frac{32}{\alpha}\frac{mc\kappa^5 p(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{p})^2}{(q^2+\kappa^2)^4\hbar k}d\Omega. \tag{8.116}$$

（8.114）よりわかるように放出された電子のスピンは核内電子（ψ_a）のスピンと同方向である．また電子の放出される方向と光子の直線的偏りの向きのなす角を Θ とすると $d\sigma_K \propto \cos^2\Theta$ である．光子の偏りにつき平均すると，

$$(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{p})^2 \to \frac{1}{2}[p^2-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})^2/k^2] = p^2\frac{\sin^2\theta}{2},$$ 　θ は $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}$ の間の角度である．

$n=1$ 状態に対する I は（8.108）より，

$$I = \frac{z^2\alpha^2}{2}mc^2 = \frac{\kappa^2}{2m} \tag{8.117}$$

であるから，光電効果に対するエネルギー保存則（8.109）は，

$$c\hbar k = \frac{p^2+\kappa^2}{2m}. \tag{8.118}$$

ψ_b 状態が平面波で表わされるためには，b 状態の運動エネルギーが核の Coulomb 場による束縛エネルギーより大きいことが必要である．この条件がみたされなければ ψ_b に対する H_2(8.79) の影響を考えなければならない．すなわち，

$$p^2 \gg \kappa^2 \to \frac{V}{c} \gg z\alpha. \tag{8.119}$$

これは H_2 を摂動項として扱える条件で，電子速度が光速度 c の $z\alpha(\approx z/137)$ 倍程度以下になると電子は平面波として扱えなくなる．

(8.119) および $p \ll mc$ の条件の成り立つ領域 $1 \gg \dfrac{V}{c} \gg z\alpha$ では,

$$c\hbar k \approx p^2/2m,\quad q^2+\kappa^2=(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k})^2+\kappa^2 \approx p^2$$

で，これらを (8.116) に代入すると，$ck=\nu$ を用い，

$$d\sigma_K = r_0{}^2 z^5 \alpha^4 \left(\frac{mc^2}{\hbar\nu}\right)^{7/2} 2\sqrt{2}\,\sin^2\theta d\Omega. \tag{8.120}$$

すべての電子の放出の方向につき加えた全断面積は,

$$\sigma_K = \phi_T 4\sqrt{2}\,\alpha^4 z^5 \left(\frac{mc^2}{\hbar\nu}\right)^{7/2} \left(1 \gg \frac{V}{c} \gg z\alpha,\ \frac{V}{c} \approx \frac{p}{mc} \approx \sqrt{\frac{2\hbar\nu}{mc^2}}\right). \tag{8.121}$$

ここで,

$$\phi_T = \frac{8\pi}{3} r_0{}^2 \approx 6.65\times 10^{-25}\ \mathrm{cm}^2 \tag{8.122}$$

は後述する Thomson 散乱の全断面積である．$n=1$ 状態には 2 個の電子が存在するので σ_K の値は (8.120) の $d\sigma_K$ に 2をかけて，$d\Omega$ につき積分した値である．

2) **相対論的場合** 光子のエネルギーが非常に大きくなった場合 ($\hbar\nu \gg mc^2$), (8.113) 等より σ_K を求めると,

$$\sigma_K = \phi_T \frac{3}{2} \alpha^4 z^5 \frac{mc^2}{\hbar\nu} \qquad (\hbar\nu \gg mc^2) \tag{8.123}$$

となり，σ_K は ν が大きくなると $1/\nu$ で減少する．

また角分布は $(q^2+\kappa^2)^{-4}$ の項が (8.116) 式と同様に存在し,

$$q^2+\kappa^2=(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k})^2+\kappa^2 \approx 2p^2(1-\cos\theta)+\kappa^2 = 4p^2\left\{\sin^2\frac{\theta}{2}+\left(\frac{\kappa}{2p}\right)^2\right\}$$

であるから，$\theta \lesssim \kappa/p = \hbar/a_0 p$ で与えられる $\theta=0$ のまわりの小さな角度内に電子は放出される．ここでエネルギー保存則,

$$c\hbar k = \sqrt{m^2c^4+c^2p^2}+\frac{\kappa^2}{2m} \approx cp$$

を用いた．

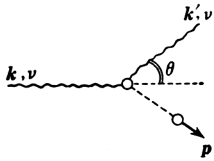
さて，光子が原子に衝突すると，$\hbar\nu$ より小さな束縛エネルギーで原子に結合されている電子はすべて光電効果に関与する．したがって原子に対する σ は $\sigma_K, \sigma_L, \sigma_M, \cdots$ 等を加え合わせたものになる (8-18 図).

(c) Compton 散乱

光子のエネルギーがさらに大きくなり，原子中の電子の束縛エネルギーが無視できるようになると，光子と電子の衝突は光子と自由な電子の衝突と考えることができる．自由電

子はエネルギー・運動量の保存則から光子を吸収することはできないので，起こりうる過程は電子による光子の散乱である．これを **Compton 散乱** という．

振動数 ν, 波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の光子が静止している電子に衝突して θ 方向に散乱されたとき，散乱後の振動数を ν', 波数ベクトルを $\boldsymbol{k}'$, 反跳をうけた電子の運動量を $\boldsymbol{p}'$ としよう．



8-19 図 電子による Compton 散乱

運動量・エネルギーの保存則，

$$mc^2 + \hbar\nu = \hbar\nu' + \sqrt{c^2p'^2 + m^2c^4},\qquad \hbar\boldsymbol{k} = \hbar\boldsymbol{k}' + \boldsymbol{p}' \tag{8.124}$$

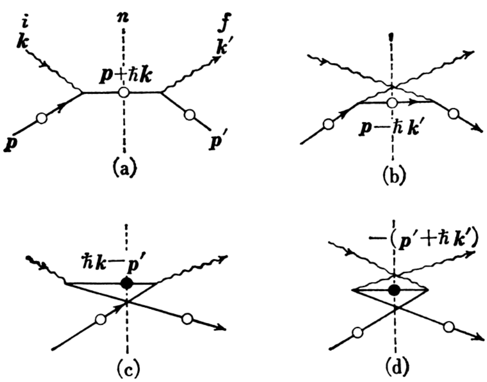
を解くと（ただし $\nu = ck,\ \nu' = ck'$），θ 方向に散乱される光の振動数は，

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + (\hbar\nu/mc^2)(1-\cos\theta)} \tag{8.125}$$

となる．前方散乱（$\theta = 0$）では $\nu' = \nu$，θ が増すにつれ ν' は減少し後方散乱（$\theta = \pi$）では ν' は最小で，

$$\nu'_{\mathrm{min}} = \frac{\nu}{1 + 2\hbar\nu/mc^2} \tag{8.126}$$

となる．



8-20 図 Compton 散乱
○電子 ●陽電子 〜光子

さて，電子と量子化された光子の場 A_μ との間の minimal な電磁的相互作用 H_1 (8.79) を考えると（H_1 の 1 次の項は電子による光子の吸収で光電効果のように束縛された電子に対しては起こるが自由電子に対しては起こらない），Compton 散乱では光子 $\boldsymbol{k}$ の吸収と光子 $\boldsymbol{k}'$ の放出が起こらねばならないから，H_1 の 2 次の摂動を考えねばならない．8-20 図は H_1 の 2 次の摂動で Compton 散乱の起こるようすを図示したもので，

四つの異なる過程で Compton 散乱が起こりうる．

（a） 電子 $p(=0)$ による光子 $\boldsymbol{k}$ の吸収で運動量 $\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k}$ の電子になり，次にこの電子が光子 $\boldsymbol{k}'$ を放出．

（b） 電子 $\boldsymbol{p}$ がまず光子 $\boldsymbol{k}'$ を放出して $\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k}'$ の電子になり，次にこの電子が光子 $\boldsymbol{k}$ を吸収．

（c） 光子 $\boldsymbol{k}$ が電子 $\boldsymbol{p}'$ と陽電子 $\hbar\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}'$ になり，次にこの陽電子と電子 $\boldsymbol{p}$ が消滅して光子 $\boldsymbol{k}'$ を作る．

（d） まず光子 $\boldsymbol{k}'$，電子 $\boldsymbol{p}'$，陽電子 $-(\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k}')$ が作られ，次に光子 $\boldsymbol{k}$，電子 $\boldsymbol{p}$，陽電子 $-(\boldsymbol{p}'+\hbar\boldsymbol{k}')$ が消滅する．

Compton 散乱の断面積は，

$$
\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{L^3}{c}\frac{2\pi}{\hbar}|T|^2\rho,\\
T &= \sum_n \frac{\langle f|H_1|n\rangle\langle n|H_1|i\rangle}{E-En}.
\end{aligned}
\tag{8.127}
$$

ここで i は始状態（電子 $\boldsymbol{p}+$ 光子 $\boldsymbol{k}$），f は終状態（電子 $\boldsymbol{p}'+$ 光子 $\boldsymbol{k}'$），n は中間状態を表わす． n 状態は図の四過程 a), b), c), d) で異なり図の点線で示した時刻における状態である．

1） 一般の場合は複雑なので，ここでは $\hbar\nu \ll mc^2$ の場合につき $d\sigma$ を求めよう．この場合は，終状態の電子および中間状態のすべての電子・陽電子はほとんど静止していると考えることができ，そのエネルギーを mc^2 と考えてよい．たとえば a) 過程での中間状態の電子のエネルギー E_n は，

$$
E_n = \sqrt{m^2c^4+\hbar^2\nu^2} \approx mc^2\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\nu}{mc^2}\right)^2+\cdots\right\}
$$

で，$(\hbar\nu/mc^2)^2$ 以上の項を省略すると mc^2 とおける．他の場合も同様で $\hbar\nu/mc^2$ の2乗以上の項を省略する近似ですべての電子・陽電子のエネルギーは mc^2 である．また (8.125) より $\nu \approx \nu'$ である（$\hbar\nu/mc^2$ の一次の項を省略）．

a) と d) とをとり出して考えると，それぞれの T は (8.85) 等より，

$$
\begin{aligned}
T_a &= \frac{c\hbar e^2}{2kL^3}\,\frac{(\bar{u}_f\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}',\lambda')\cdot\boldsymbol{\gamma}u_a)(\bar{u}_a\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\gamma}u_i)}{E-E_a},\\
T_d &= -\frac{c\hbar e^2}{2kL^3}\,\frac{(\bar{u}_f\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}',\lambda')\cdot\boldsymbol{\gamma}\bar{v}_d)(v_d\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\gamma}u_i)}{E-E_d}.
\end{aligned}
\tag{8.128}
$$

（T_d の負符号は制動輻射の時に論じたように電子が Fermi 統計にしたがうために現われる）．ここで，u_i, u_f は始めおよび終りの電子の4成分スピノル，u_a, v_d は a), d) 過程

の中間状態として現われる電子および陽電子の 4 次元スピノルである. E_a, E_d は中間状態のエネルギー.

さて, T_a, T_d を比較すると, 1) $E-E_n$ は

$$E-E_a \approx \hbar\nu = c\hbar k, \quad E-E_d \approx -2mc^2$$

で, a) 過程の方が d) 過程より $1/(E-E_n)$ は $2mc^2/\hbar\nu$ ($\gg 1$) 倍大きい. 一方で, 2) 分子をくらべると非相対論的近似では (問題 7.6 参照),

$$\bar{u}\gamma u \sim v/c \sim \hbar k/mc \sim \hbar\nu/mc^2,$$

$$\bar{v}\gamma u \sim \bar{u}\gamma v \sim \boldsymbol{\sigma}$$

で, $\boldsymbol{\sigma}$ は 1 の程度の大きさの量であるから, 陰陽電子対の発生の行列要素の方が電子間の遷移の行列要素より $mc^2/\hbar\nu$ の程度大きい. 分子は H_1 の 2 乗に比例するので,

$$T_d/T_a \sim mc^2/\hbar\nu.$$

同様に $T_c/T_b \sim mc^2/\hbar\nu$ である. したがって $\hbar\nu \ll mc^2$ の場合には c), d) 過程が主になる.

$$T_c \approx -\frac{c\hbar e^2}{2kL^3}\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\sigma}_{fc})(\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}',\lambda')\cdot\boldsymbol{\sigma}_{ci})}{-2mc^2},$$

$$T_d \approx -\frac{c\hbar e^2}{2kL^3}\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}',\lambda')\boldsymbol{\sigma}_{fd})(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\boldsymbol{\sigma}_{di})}{-2mc^2}.$$

非相対論的近似では電子・陽電子は 4 成分スピノルの代りに近似的に 2 成分スピノルで表わされる. $\sigma_z=\pm 1$ に応じて u, v は,

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdots\sigma_z=+1, \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdots\sigma_z=-1$$

である. σ_{fc}, σ_{ci} 等は i, c, f, d 状態の 2 成分スピノルを u_i, v_c, u_f, v_d 等と書いたとき

$$\boldsymbol{\sigma}_{fc}=(u_f{}^\dagger\boldsymbol{\sigma}v_c), \ \boldsymbol{\sigma}_{ci}=(v_c{}^\dagger\boldsymbol{\sigma}u_i), \ \cdots$$

である. 中間状態 (c, d) の陽電子のスピンの方向についての和をとると,

$$\sum_{c=\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\sigma}_{fc})(\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}',\lambda')\cdot\boldsymbol{\sigma}_{ci})=\{(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}',\lambda')\cdot\boldsymbol{\sigma})\}_{fi}$$

等が得られる. 終りおよび始めの状態を表わす添字 f, i は書かないことにし, Pauli スピンの性質を用いると, この量は,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}',\lambda')+i\sigma\{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\times\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k}',\lambda)\}$$

となる. したがって,

$$T \approx T_c+T_d \sim \frac{2\pi\alpha\hbar^2}{mkL^3}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}',\lambda'). \qquad (8.129)$$

また状態密度 ρ は,

$$\rho dE = \frac{d(\hbar \boldsymbol{k}')}{(2\pi\hbar)^3}L^3 = \frac{k'^2 dk' d\Omega}{(2\pi)^3}L^3.$$

(8.124) より,

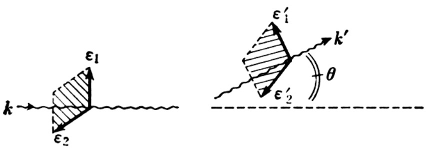
$$dE = c\hbar dk' + \frac{c^2 p' dp'}{\sqrt{m^2c^4 + c^2p'^2}} \approx c\hbar dk', \quad k' \approx k$$

であるから,

$$\rho \approx \frac{k^2 d\Omega}{(2\pi)^3 c\hbar}L^6.$$

したがって,

$$d\sigma = r_0{}^2(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, \lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'(\boldsymbol{k}', \lambda'))^2 d\Omega = r_0{}^2\cos^2\Theta d\Omega. \qquad (8.130)$$



8-21 図

光子の偏りのベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}', \lambda')$ と $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, \lambda)$ のなす角度を Θ とした. $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, \lambda)$ は $\boldsymbol{k}$ と垂直な 2 方向 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ のいずれかで, 同様に $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}', \lambda')$ は $\boldsymbol{k}'$ に垂直な2方向 $\boldsymbol{\varepsilon}_1'$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2'$ のいずれかであるから (8-21 図), $\boldsymbol{\varepsilon}'$ の 2 方向につき和をとり $\boldsymbol{\varepsilon}$ の2方向につき平均すると偏りのない光子が Compton 散乱で θ 方向に散乱される断面積が求まる.

$$\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\sum_{\varepsilon_1',\varepsilon_2'}\cos^2\Theta = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)$$

より,

$$d\sigma = \frac{r_0{}^2}{2}(1+\cos^2\theta)\,d\Omega. \qquad (8.131)$$

あらゆる方向 θ に散乱される全断面積は,

$$\sigma = \int d\sigma = \frac{2\pi r_0{}^2}{2}\int_{-1}^{1}(1+\cos^2\theta)d(\cos\theta) = \frac{8\pi}{3}r_0{}^2 = \phi_T. \qquad (8.132)$$

$\hbar\nu \ll mc^2$ のときの散乱は **Thomson 散乱** といわれ, エネルギーによらぬ一定の値を持つ. 荷電 ze, 質量 M の粒子による Thomson 散乱は同様にして,

$$d\sigma = \left(\frac{ze^2}{4\pi Mc^2}\right)^2\frac{1+\cos^2\Theta}{2}d\Omega. \qquad (8.133)$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{ze^2}{4\pi Mc^2}\right)^2 \qquad (8.134)$$

となる. したがって z/M の大きな荷電粒子ほど Thomson 散乱の断面積は大きく, たとえば電子による σ は (8.122),

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3}\times(2.82\times10^{-13}\mathrm{cm})^2 \approx 6.65\times10^{-25}\,\mathrm{cm}^2$$

であるのに対し，陽子に対する σ は上の値の $(m/M_p)^2 \approx 2.9\times10^{-7}$ 倍にすぎない．一般にあるエネルギーの光子に対する Compton 散乱の断面積は $(z/M)^2$ に比例するので光子が物質中を通るときに受ける Compton 散乱は原子中の電子によるものを考えれば十分である．

Thomson 散乱の式はより簡単に導くことができる．電磁場と Minimal な相互作用をしている電子に対し，電子が非相対論的な場合に成り立つ式 (8.21) を使うと，(8.21)の左辺の第三項 $-(1/2m)(\boldsymbol{p}+e/c\boldsymbol{A})^2$ は $\boldsymbol{A}^2$ の項を含む，これに対応する Hamiltonian

$$\frac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2\psi^\dagger\psi = 2\pi r_0\boldsymbol{A}^2\psi^\dagger\psi \tag{8.135}$$

は，光子の電子による Compton 散乱を 1 次の摂動でひき起こす．

$$T = 2\cdot\frac{2\pi c\hbar}{kL^3}\frac{r_0}{2}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}',\lambda') = \frac{2\pi\alpha\hbar^2}{mkL^3}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{k}',\lambda').$$

初めの因子 2 は $\boldsymbol{A}^2$ の二つの $\boldsymbol{A}$ のうち，どちらの $\boldsymbol{A}$ が光子 $(\boldsymbol{k},\lambda)$ の吸収（残りの $\boldsymbol{A}$ は放出）を行なうかの二つの可能性の存在による．したがって (8.129) と同じ T を与え断面積も (8.130)～(8.132) となる．

スピン 0 の荷電粒子に対しても Minimal な電磁的相互作用の中には (8.8) に $\partial_\mu \to \partial_\mu - i\dfrac{Q}{c\hbar}A_\mu$ のおきかえを行なうとわかるように，相互作用

$$\frac{Q^2}{c^2\hbar^2}\boldsymbol{A}^2\varphi^\dagger\varphi \tag{8.136}$$

の項が存在する（問題 8.8）．この項は $\hbar\nu \ll Mc^2$ のとき Compton 散乱の一番主な寄与を与え，その断面積は (8.134) である $(Q=ze)$．このように Thomson 散乱は minimal な相互作用をする荷電粒子に共通な散乱であるといえる．

2）一般のエネルギーに対する Compton 散乱の断面積は (8.127) を計算して求められる．その結果のみを記すと，

$$d\sigma = \frac{r_0{}^2}{4}\frac{\nu'^2}{\nu^2}\left[\frac{\nu}{\nu'}+\frac{\nu'}{\nu}-2+4\cos^2\Theta\right]. \tag{8.137}$$

これを **Klein—仁科の式**という．ν' と ν の関係は (8.125) より散乱角 θ を与えれば決まる．

もし入射光が偏りのない光であるときは，散乱された光子の偏りにつき和をとると，

$$d\sigma = \frac{r_0{}^2}{2}\frac{\nu^2}{\nu'^2}\left(\frac{\nu}{\nu'}+\frac{\nu'}{\nu}-\sin^2\theta\right)d\Omega. \tag{8.138}$$

すべての散乱角について和をとった全断面積は，

$$\sigma = \begin{cases} \phi_T & \hbar\nu \ll mc^2 \\ \phi_T \dfrac{3}{8}\,\dfrac{mc^2}{\hbar\nu}\left(\log\dfrac{2\hbar\nu}{mc^2}+\dfrac{1}{2}\right) & \hbar\nu \gg mc^2 \end{cases} \tag{8.139}$$

となる．したがって低エネルギーの光子の Compton 散乱は Thomson 散乱で与えられ，高エネルギーになると $(\log \hbar\nu)/\hbar\nu$ で σ は減少する．

光子と原子の衝突を考えると原子中のすべての電子は Compton 散乱に関与する． $\hbar\nu \gg I$ の領域では電子は自由電子とみなせるので，光子の1原子あたりの Compton 散乱の断面積は (8.139) の z 倍になる．(z は物質の原子番号)．

(d) 光子による電子の対発生

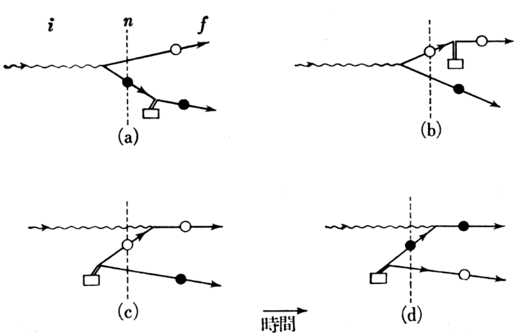
H_1(8.79) による1次の摂動項は光子が電子・陽電子対になる遷移を起こすが，エネルギー・運動量の保存則をみたすことはできない．しかし他の荷電粒子の存在する物質中では，作られた電子・陽電子は物質中の原子核の Coulomb 場で散乱を受け，自由な粒子ではない．

すなわち，これら散乱を通じて運動量の一部を核に与え，そのため全体としてエネルギー・運動量の保存則をみたすことができる．もちろん電子対を作るには，少くとも $2mc^2$ のエネルギーを必要とする．核が十分重くて衝突中ほとんど静止している場合には核に与えるエネルギーは無視できるから $\hbar\nu \geqq 2mc^2$ のとき，光子により電子対発生が起こる．

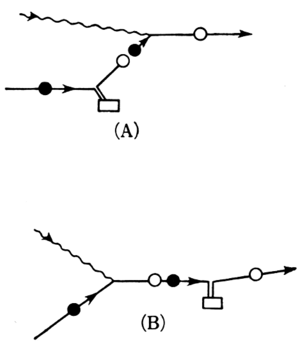
2次の摂動による対発生の断面積は電子による制動放射と同様な式で与えられる．

$$d\sigma = \frac{L^3}{c}\cdot\frac{2\pi}{\hbar}|T|^2\rho. \tag{8.140}$$

$$T = \sum_n \frac{\langle f|H_1|n\rangle\langle n|H_2|i\rangle}{E-E_n} + \sum_n \frac{\langle f|H_2|n\rangle\langle n|H_1|i\rangle}{E-E_n}. \tag{8.141}$$



8-22 図　光子による電子対発生
○電子　●陽電子　□原子核　〰光子



8-23 図　○正エネルギー電子　●負エネルギー電子

$\boldsymbol{i}$ は入射光子（$\boldsymbol{k}, \lambda$）の状態，f は電子（$\boldsymbol{p}_+, h_+$），陽電子（$\boldsymbol{p}_-, h_-$）の作られた状態，$\boldsymbol{n}$ は中間状態で 8－22 図に示してある 4 個の異なる中間状態が存在する．

制動放射の場合と同様に（(8.89) 参照）(a)，(c) 図からの T はまとめて 8－23(A) 図，(b)，(d) 図からの T は (B) 図からの寄与になることを示しうる．(A)，(B) 図は光子（$\boldsymbol{k}, \lambda$）と負エネルギーの電子（$-E_-, -\boldsymbol{p}_-, h_-$）が衝突して Coulomb 場の中で電子（$\boldsymbol{p}_+, h_+$）に移る遷移であり，(A) 図ではまず Coulomb 散乱が，(B) 図では光子の吸収が起こる．中間状態の電子は正・負エネルギーのいずれの状態をもとる．

これより明らかなように，光子による電子対の発生は電子 → 負エネルギー電子 ＋ 光子すなわち制動放射の逆過程と考えられ，制動放射の場合と同様にして計算できる．
ただし ρ は，

$$\rho dE = \frac{d\boldsymbol{p}_+ d\boldsymbol{p}_-}{(2\pi\hbar)^6} L^6 \tag{8.142}$$

で与えられる．

制動放射の場合と同様に，光子のエネルギーが十分大きいときのみ対発生が重要になるので，$\hbar\nu \gg mc^2$ のときの断面積のみを記すと $E_+ \sim E_+ + dE_+$ のエネルギーの電子が作られる断面積は，

$$\sigma(E_+)dE_+ = 2\bar{\phi}\, dE_+ \frac{E_+{}^2 + E_-{}^2 + (2/3)E_+E_-}{(\hbar\nu)^3}\left[2\log\frac{2E_+E_-}{\hbar\nu mc^2} - 1\right]. \tag{8.143}$$

$$(\hbar\nu \gg mc^2)$$

$\bar{\phi}$ は (8.91) で与えられる．ここでエネルギー保存則から

$$\hbar\nu = E_+ + E_-. \tag{8.144}$$

E_+, E_- は作られた電子・陽電子のエネルギーである．

核の Coulomb 場に対する電子の遮蔽の影響を考えた計算では，

$$\sigma(E_+)dE_+ = 4\bar{\phi} dE_+\left[\frac{E_+{}^2 + E_-{}^2 + (2/3)E_+E_-}{(\hbar\nu)^3}\log\left(\frac{4}{3\alpha z^{1/3}}\right) - \frac{1}{9}\,\frac{E_+E_-}{(\hbar\nu)^3}\right] \tag{8.145}$$

$$(2E_+E_-/\hbar\nu mc^2 \gg 1/\alpha z^{1/3} \approx 137 z^{-1/3})$$

となる．
光子による電子対発生の全断面積は (8.143)，(8.145) を dE_+ につき積分して得られる．

$$\sigma = \bar{\phi}\left(\frac{28}{9}\log\frac{2\hbar\nu}{mc^2} - \frac{218}{27}\right) \qquad \left(\frac{mc^2}{\alpha z^{1/3}} \gg \hbar\nu \gg mc^2\right), \tag{8.146}$$

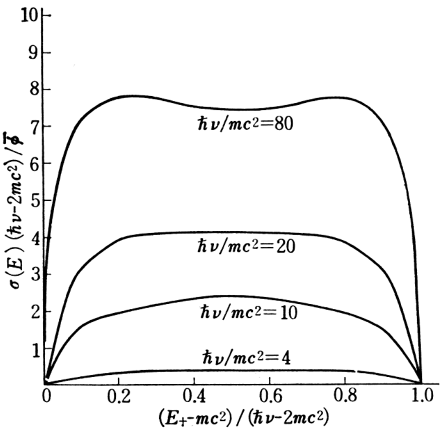
$$\sigma = \bar{\phi}\left(\frac{28}{9}\log\frac{4}{3\alpha z^{1/3}} - \frac{2}{27}\right) \qquad \left(\hbar\nu \gg \frac{mc^2}{\alpha z^{1/3}}\right). \tag{8.147}$$

$$\left(\bar{\phi}=\frac{3}{8\pi}\alpha z^2\phi_T\right).$$

また，電子・陽電子の放出される方向は，これらと $\boldsymbol{k}$ のなす角を θ_+, θ_- としたとき，

$$|\theta_+|\lesssim\frac{mc^2}{E_+},\quad |\theta_-|\lesssim\frac{mc^2}{E_-} \tag{8.148}$$

で与えられる前方方向の小立体角内に放出される．振動数 ν の光子で作られる電子のエネルギー E_+ の分布は 8-24 図に示す．



8-24 図　光子 ($\hbar\nu$) による電子対発生 (E_+, E_-) のエネルギー分布

以上は原子核の Coulomb 場による光子の対発生であるが，もちろん原子中の電子の Coulomb 場によっても対発生が起こる．$\hbar\nu\gg mc^2$ の領域では $z=1$ の核の Coulomb 場による σ と大体同じであり，z 個の電子が存在するから，1原子内にある電子による光子の対発生はその z 倍になる．これと (8.146), (8.147) の σ を一緒にすると，原子による光子の対発生の σ は (8.146), (8,147) で $\bar{\phi}$ を $\bar{\phi}_{\text{atom}}$(8.98) でおきかえたものになる．

(e)　光の吸収

光が物質中を通過するとき (a)～(d) で論じた諸過程により光の吸収，散乱が起こり，入射方向と同方向に進む光の強度はだんだんに減少する．特定の振動数のときのみに起こる共鳴吸収を別にすれば，一般に任意の振動数の光に対し光電効果，Compton 効果，電子対生成が起こる．これら諸過程の断面積の光子のエネルギー $\hbar\nu$，原子番号 z に対する依存の仕方はそれぞれの過程により異なる．

$\hbar\nu\gg mc^2$ の領域で，光子の1個の原子による反応の断面積は原子中に z 個の電子が存在することを考慮すると次のようになる．

$$\sigma=\phi_T\frac{3}{4}\alpha^4z^6\frac{mc^2}{\hbar\nu}\ (\text{光電効果}),$$

$$\sigma=\phi_T\frac{3z}{8}\ \frac{mc^2}{\hbar\nu}\left(\log\frac{2\hbar\nu}{mc^2}+\frac{1}{2}\right)\ (\text{Compton 効果}), \tag{8.149}$$

$$\sigma = \begin{cases} \bar{\phi}_{\text{atom}}\left(\dfrac{28}{9}\log\dfrac{2\hbar\nu}{mc^2} - \dfrac{218}{27}\right) & (mc^2/\alpha z^{1/3} \gg \hbar\nu \gg mc^2) \\ \bar{\phi}_{\text{atom}}\left(\dfrac{28}{9}\log\dfrac{4}{3\alpha z^{1/3}} - \dfrac{2}{27}\right) & (\hbar\nu \gg mc^2/\alpha z^{1/3}). \end{cases} \quad （対発生）$$

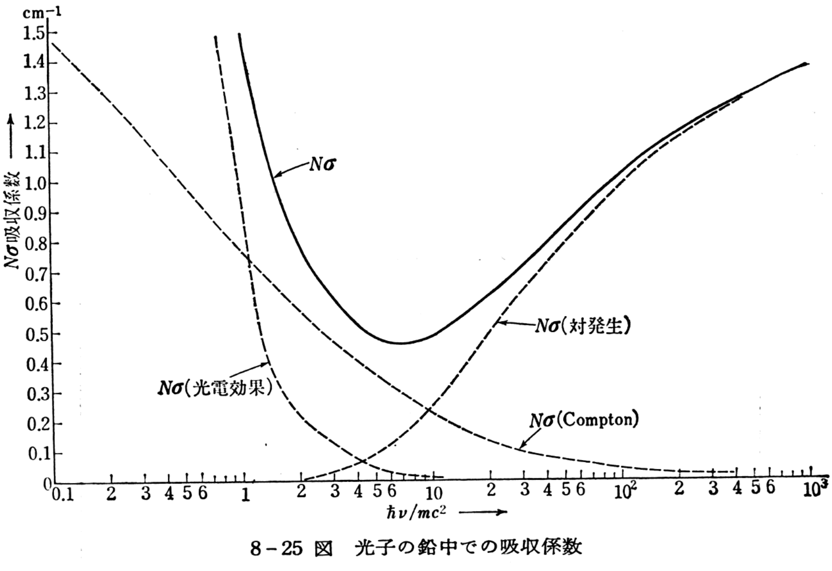
光電効果と Compton 散乱の比は大体 $\alpha^4 z^5$ に比例し，z の非常に大きな核を除いては $\hbar\nu \gg mc^2$ の領域では光電効果は無視できる．対発生と Compton 散乱の σ をくらべるとその比は，

$$(\bar{\phi}_{\text{atom}}/z\phi_T)\cdot\frac{\hbar\nu}{mc^2} \propto \alpha(z+1)\frac{\hbar\nu}{mc^2}$$

に比例する．

$\hbar\nu$ が mc^2 にくらべて非常に大きい時はこの比は $\hbar\nu$ に比例して増大するので対発生の断面積の方が大きく，$\hbar\nu$ が減少すると小さな係数 $\alpha(z+1)$ のために Compton 散乱の方が重要になる．$\hbar\nu$ がさらに小さくなると，光電効果の σ は $(\hbar\nu)^{-7/2}$ に比例する (8.121) ので，ある程度 $\hbar\nu$ の値が小さくなると光電効果が主な吸収過程になる．

以上の議論から明らかなように，低エネルギー領域では光電効果，高エネルギー領域では電子対発生，中間領域では Compton 散乱が主な吸収過程になる．



8-25 図　光子の鉛中での吸収係数

エネルギー $\hbar\nu$ の光子が物質中を通るとき光子の数は吸収により減少する．

厚さ dx cm の物質を通過したとき光子の数 n が dn だけ減少したとすると，

$$-dn = N\sigma n dx. \tag{8.150}$$

N は 1cm^3 中の原子数，σ は1原子あたりの光子の吸収の全断面積で，

$$\sigma = \sigma\,(\text{光電効果}) + \sigma(\text{Compton}) + \sigma\,(\text{対発生}) \tag{8.151}$$

である．(8.150) より，

$$n(x) = e^{-N\sigma x}. \tag{8.152}$$

したがって光子は，$1/N\sigma$ cm 通過するごとにその強度は $1/e$ になる．$N\sigma(\text{cm}^{-1})$ を光子に対する**吸収係数**という．

いろいろな $\hbar\nu$ の光子に対する鉛の吸収係数を 8－25 に図示する．また 8－6 表にいろいろな物質に対する吸収係数の表を記す．cm^{-1} 単位の代りに長さの単位を g/cm^2 で測るときの単位 cm^2/g を用いてある．したがって 8－6 表より $\hbar\nu = 0.1\,\text{mc}^2 \approx 51$ keV の光子は空気 0.168 g 通過すると強度が 1/e になる．

光子の吸収は特定方向に進む特定エネルギーの光子に注目する限り確かに吸収を意味しているが，同時に，より低いエネルギーで一般に異なる方向に進む光子の発生をもたらす．$\hbar\nu \gg mc^2$ の時は対発生で作られた陰陽電子は大きなエネルギーを持ち（$E_\pm \gg mc^2$）制動放射を行なって光子をそれぞれ放出する．これら作られた光子もエネルギーが十分大きければ再び対発生を行ない，対発生・制動放射の交互のくり返しで光子の数は物質中を通過する距離がふえると共に，或る所まで鼠算的にふえる．この現象を**カスケード・シャワー**という．それ以後作られた光子，陰陽電子のエネルギーが小さくなるため対発生・制動放射の断面積が小さくなり光電効果等により光子の数は減少していく．また Compton 散乱は光子の数を増減せずただその方向を変え，エネルギーを電子に与えて減らす役目をする．

8－6 表　物質中での光子の吸収係数（cm^2/g）

$\hbar\nu/mc^2$	Air	Al	Pb
0.1	0.168	0.315	—
0.5	0.112	0.11	0.4
1	0.087	0.081	0.15
2	0.062	0.059	0.071
5	0.039	0.037	0.042
10	0.027	0.028	0.042
20	0.019	0.023	0.054
50	0.017	0.021	0.075
100	0.017	0.024	0.092
1,000	0.019	0.028	0.124

〔問題 8.1〕 Bose 粒子のみの干与する現象を調べる限り，（第一種の）荷電は π^+ 中間子の荷電を $+1$ と定めれば，他の Bose 粒子に対して決まることを示せ．

〔問題 8.2〕 電子と電磁場との間の相互作用エネルギー密度として，

$$g\bar{\psi}\{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H})-i(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E})\}\psi$$

をとると，この相互作用は第一および第二種のゲージ変換，Lorentz 変換の両方に対して不変のことを示せ． g は相互作用の強さをあらわす任意の定数とする．

〔問題 8.3〕 水素原子の (n, l) 状態の電子の波動関数 $\psi_{n,l}$(8.32) を用い，

$$\int_0^\infty R_{n,l}{}^2dr, \qquad \int^\infty R_{n,l}{}^2r\,dr$$

を $n=2, l=0$ に対し求めよ．

〔問題 8.4〕 中性子が異常磁気能率を持つので，中性子の電磁場中での波動方程式を

$$E\psi=\{c(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})+mc^2\beta-g\beta[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}]\}\psi$$

とするとき，電子の作る Coulomb 場 $-e/4\pi r$ の中で非常に遅く運動している中性子は次の電磁的エネルギーを持つことを示せ．

$$\frac{ge\hbar}{2mc}\delta(\boldsymbol{r})+\frac{ge(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{L})}{4\pi mcr^3}.$$

〔問題 8.5〕 200 MeV のエネルギーの陽子が炭素の 1 g を通過するに失うエネルギーを (8.58′) を使って求めよ．ただし $I=76\,\mathrm{eV}$ とせよ．

〔問題 8.6〕 200 MeV のエネルギーの陽子の炭素中での range R は 2.85 g/cm^2 である．これより 200 MeV のエネルギーの α 粒子の R を求めよ．

〔問題 8.7〕 200 MeV のエネルギーの電子の Al および Pb 中での制動輻射によるエネルギー損失 $-dE/dl$ を (8.97′) を用いて求めよ．

〔問題 8.8〕 正荷電スピン 0 粒子 (π^+) が電磁場と minimal な相互作用をしているときに，その相互作用のエネルギー密度は次式になることを示せ．

$$H=H_1+H_2,$$

$$H_1=-\frac{ie}{\hbar c}\left(\frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial r}\varphi-\varphi^\dagger\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\boldsymbol{A}+\frac{ie}{\hbar}(\dot{\varphi}^\dagger\varphi-\varphi^\dagger\dot{\varphi})A_0,\quad H_2=\frac{e^2}{\hbar^2c^2}\boldsymbol{A}^2\varphi^\dagger\varphi.$$

φ は π^+ の量子化された場，$\varphi^\dagger$ はそのエルミット共役量である．

〔問題 8.9〕 光子が原子番号 z の物質により電子対を作るとき，作られた電子の平均のエネルギー $\langle E_+\rangle$ を (8.145) を使って求めよ．

〔問題 8.10〕 鉛に対して Compton 散乱による光の吸収係数と電子対発生による光の吸収係数か等しくなるときの光子の振動数を (8.139), (8.146) を使って求めよ．

第9章　素粒子間の相互作用と S-行列

§9.1　S-行列

第 6, 7 章では自由に飛んでいる粒子をあつかってきた．それらの粒子は一定の運動量，エネルギー（これは関係式 (4.8) を満足する）をもっていて，霧箱等のなかで飛跡を作り，計数管等で検出されるものである．自由粒子は力を受けなければそのまま飛んでいるが，他の粒子と衝突すると，方向を変えたり別の粒子に変わったりという変化が起こる．前章では光子の関係する各種の現象を調べたが，この章ではもっと一般の場合を考えよう．たとえば陽子に負の π 中間子を衝突させると，エネルギーの低いうちは弾性散乱のみが起こるが，入射エネルギーが高くなると次のようないろいろの反応が可能となる．

$$\begin{aligned} \pi^- + p &\to \pi^- + p \text{（弾性散乱）} \\ &\to \pi^+ + \pi^- + n \\ &\to \pi^- + \pi^0 + p \\ &\to K^0 + \Lambda \\ &\to K^+ + \Sigma^- \\ &\to \cdots . \end{aligned} \tag{A}$$

荷電，重粒子数その他の量子数の保存則がみたされる限り，新しい粒子が生成されたりして，いろいろの粒子の状態に移り得る．このような粒子の組のおのおのを**チャンネル** (**channel**) という．π^- を p に当てたときは，弾性チャンネル π^-p の他に（A）の右辺の各行に示されるようなチャンネルが存在する．

入射粒子のエネルギーを上げていくと，あるエネルギー以上から新しいチャンネルが開けるようになる．この点をそのチャンネルの **しきい** (**threshold**) といい，このときのエルギーを **しきい値** (**threshold energy**) という．(4.25) で計算したように核子核子衝突で π 中間子を作るための しきい値は実験室系で 308 MeV である．一般に，

$$a + b \to c + d + \cdots$$

の反応で各粒子の質量を m_a, m_b, $\cdots$ とすると，この反応が起こるためには重心系で，

$$m_c c^2 + m_d c^2 + \cdots - m_a c^2 - m_b c^2 = T$$

だけの運動エネルギーが必要で，これが重心系でのしきい値である．

場合によっては，上の T が負になるときがある．たとえば重陽子（d）に負の π 中間子を当てると 2 個の中性子になる．

$$d + \pi^- \to n + n.$$

このときは質量の差は，

$$(m_d + m_{\pi^-} - 2m_n)c^2 = 136\ \mathrm{MeV}$$

であって，π^- の運動エネルギーが 0 でも反応が起こって 68 MeV ずつの運動エネルギーを持った中性子が飛び出してくる．このような場合は**発熱反応**（**exothermic reaction**）といい，質量差

$$m_a c^2 + m_b c^2 - m_c c^2 - m_d c^2 - \cdots = Q \qquad (9.1)$$

を反応の **Q-値**（**Q-value**）という．化学反応で化学エネルギーが熱という形で放出されるように，粒子 a, b の持っていた質量エネルギーの一部が運動エネルギーの増加として現われるのである．

大部分の粒子は不安定であって，他の粒子と衝突しないでも有限の時間のうちに崩壊して他の粒子に変化する．たとえば，

$$\begin{aligned} K^+ &\to \mu^+ + \nu \\ &\to \mu^+ + \nu + \pi^0 \\ &\to \pi^+ + \pi^0 \\ &\to \cdots \end{aligned} \qquad \text{(B)}$$

のように，保存則に反しない各種の崩壊が起こる．これらの反応の Q- 値はもちろん正であって，それぞれ 388 MeV，253 MeV，219 MeV，$\cdots$ である．陽子，反陽子はこれに反し安定であって，他の粒子と衝突しない限りいつまでも変化は起こらない．これは重粒子数保存のため陽子が陽電子と光子等にこわれる Q が正の反応が禁止されるためと考えられる．

上に述べたような反応が生ずるのは，素粒子間に力（相互作用）が働くからである．前章で扱った荷電粒子と電磁場との相互作用はその一例であった．この力の Hamiltonian H' が与えられれば § 2.5 の方法によって状態の変化していくようすを調べることができる．そこでは時刻 $t=0$ に系が一つの固有状態 u_0 にあって，時間とともに他の状態に移っていくと考えたが，これは，たとえば $t=0$ に K 中間子が作られ，これが崩壊する場合に適用できる．この章では少し違った条件の下で考えよう．

衝突の起こる前および起こった後では，粒子が互に充分離れて相互作用の力が無視できるので，いくつかの粒子が自由に飛んでいる状態で表わされる．すなわち，それらは自由粒子の Hamilonian H_0 の固有状態で，それを u_n とする．初めにある状態 u_m から出発したとしよう．たとえば運動量 $\boldsymbol{k}$ の負 π 中間子と止っている陽子という状態が（A）の

始状態である．時間がたつにしたがって粒子間の相互作用により状態の遷移が起こり，充分に時間のたった後の終状態にはいろいろの状態 u_n がまざっている．

$$\psi^{(f)}=\sum_n a_n u_n. \tag{9.2}$$

この a_n は (2.61) の方程式を解くことより与えられる．すなわちある時刻 t での状態を

$$\psi(t)=\sum a_n(t)u_n e^{-iE_nt/\hbar}$$

とし，相互作用の Hamiltonian を H' とすると a_n は ((2.61) 参照)，

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{a}_n(t)&=\sum_m\langle n|H'(t)|m\rangle a_m(t),\\ \langle n|H'(t)|m\rangle&=\langle n|H'|m\rangle e^{i(E_n-E_m)t/\hbar}\end{aligned} \tag{9.3}$$

という運動方程式にしたがって変化する．時刻 t_0 に $a_n(t_0)$ であったとき，後の時刻 t の $a_n(t)$ を，

$$a_n(t)=\sum_m\langle n|U(t,\ t_0)|m\rangle a_m(t_0)$$

のように行列 $U(t,\ t_0)$ で表わすことにすれば，U は，

$$i\hbar\frac{\partial\langle n|U(t,\ t_0)|m\rangle}{\partial t}=\sum_l\langle n|H'(t)|l\rangle\langle l|U(t,\ t_0)|m\rangle$$

の運動方程式を，

$$\langle n|U(t_0,\ t_0)|m\rangle=\delta_{n,m}$$

という初期条件の下で解いて得られる．上の式を添字を略して書けば，

$$i\hbar\frac{\partial U(t,\ t_0)}{\partial t}=H'(t)U(t,\ t_0), \tag{9.4}$$

$$U(t_0,\ t_0)=1 \tag{9.5}$$

となる．反応の起こる前の状態から始めて，充分時間がたって相互作用の影響が完全になくなるまでの変化を与えるものとして，

$$S=\lim_{\substack{t\to\infty\\ t_0\to-\infty}}U(t,\ t_0) \tag{9.6}$$

という行列 S を定義する．

運動量一定で自由に走っている粒子の状態は平面波で表わされる．平面波は空間に無限に拡がっているので，もし始（終）状態にこれら平面波で表わされる何個かの粒子が存在するときはそれぞれの平面波が相互に重なり，これら粒子間の力は $t_0\to-\infty(t\to+\infty)$ でも 0 にならず，$U(t,\ t_0)$ の $t\to\infty,\ t_0\to-\infty$ の極限値は振動して不定となることがある．それは次のように考える．実際に実験をするときは，入射粒子は無限に拡がった平面波ではなく，有限の大きさの波束である．したがって衝突前は相互作用は全然働かず，粒子が近づくにしたがって少しずつ働きだして，波束が重り合うと完全に相互作用が生ずる

ことになる．衝突後離れていくときはこの逆である．このように相互作用がしだいに強くなりまた弱くなることをとり入れるには，$H'(t)$ に $e^{-\varepsilon|t|}$ $(\varepsilon>0)$ をかけておき，ε は充分小さい $(\varepsilon\to 0)$ とする．こうすれば波束の代りに平面波をつかっても $U(t, t_0)$ の $t\to\infty$，$t_0\to-\infty$ の極限が存在する．

始状態が u_m ならば，終りの状態は，

$$\psi_m^{(f)}=\sum_n\langle n|S|m\rangle u_n \tag{9.7}$$

で与えられる．$\langle n|S|m\rangle$ は初めに u_m から出発したとき最後に u_n という状態が実現される確率振幅であり，したがって $m\to n$ という変化の起こる確率 p_{nm} は，

$$p_{nm}=|\langle n|S|m\rangle|^2 \tag{9.8}$$

である．この行列 S を **S-行列（S-matrix）**あるいは**散乱行列**という．

S を逐次近似（摂動論）で求めてみよう．(9.4)，(9.5) を書き直せば，U の方程式は

$$U(t, t_0)=1-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}H'(t')U(t', t_0)dt' \tag{9.9}$$

である．右辺の U に第0近似の1を代入すれば第1近似の U が求まる．逐次代入することにより S に対し次の展開式が得られる．

$$S=1-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dtH'(t)-\frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2H'(t_1)H'(t_2)+\cdots. \tag{9.10}$$

第2項の行列要素を計算してみると，

$$\langle n|S^{(1)}|m\rangle=-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dte^{i(E_n-E_m)t/\hbar}\langle n|H'|m\rangle=-i2\pi\delta(E_n-E_m)\langle n|H'|m\rangle. \tag{9.11}$$

t についての積分は $e^{-\varepsilon|t|}$ を加えて考えてもわかるように，$E_n=E_m$ では非常に大きく，$E_n\neq E_m$ ならばほとんど0となるもので，Dirac のデルタ関数である．このことはエネルギーの等しい状態間にだけ遷移が起こること，すなわちエネルギーが反応の前後で保存されることを示している．

$m\to n$ の確率は (9.8) で与えられるが，n の近くに非常にたくさんの状態が存在するので，そのうちの一つだけえの遷移というものはあまり意味がない．n の近くの状態について加え合わせると，

$$\sum p_{nm}^{(1)}=\sum_n|\langle n|S^{(1)}|m\rangle|^2=2\pi\delta(0)2\pi\sum_n|\langle n|H'|m\rangle|^2\delta(E_n-E_m). \tag{9.12}$$

$\delta(0)$ は $\delta(x)\delta(x)=\delta(0)\delta(x)$ をつかって記号的に書いた．S でなく有限時間間隔の $U(t, t_0)$(t, $|t_0|$ は充分大きいとする）を考えると，$2\pi\delta(0)$ の代りに，

$$2\pi\delta(0)\to\frac{1}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dte^{i0t/\hbar}=\frac{1}{\hbar}T \tag{9.13}$$

となる．ただし T は衝突の始めから終りまでの時間で，(9.12) は，

$$\sum p_{nm}^{(1)}=T\cdot\frac{2\pi}{\hbar}\sum_n|\langle n|H'|m\rangle|^2\delta(E_n-E_m).$$

これが時間Tの間に起こった全確率であるから，単位時間に起こる割合は，

$$w^{(1)}=\frac{2\pi}{\hbar}\sum_n|\langle n|H'|m\rangle|^2\delta(E_n-E_m). \tag{9.14}$$

nについての和を状態密度 $\rho(E)$ を用いて積分におきかえれば (2.66) が得られる．

H' について2次の項，すなわち (9.10) の第3項の行列要素を計算すると，

$$\langle n|S^{(2)}|m\rangle=-2\pi i\delta(E_n-E_m)\sum_l\frac{\langle n|H'|l\rangle\langle l|H'|m\rangle}{E_m-E_l+i\varepsilon} \tag{9.15}$$

となり，(2.70) と同じものが得られる．ただし分母の $i\varepsilon$ は H' に付け加えた $e^{-\varepsilon|t|}$ からくるもので，$E_l=E_m$ となる中間状態 l が存在するときは問題となる．

S - 行列の行列要素は，

$$\langle n|S|m\rangle=\delta_{nm}-2\pi i\delta(E_n-E_m)\langle n|T|m\rangle \tag{9.16}$$

と書かれる．第1項は何も変化の起こらないときで，第2項が実際に変化の起こった部分を表わす．Tを**遷移行列**(**transition matrix**) という．

$$\langle n|T|m\rangle=\langle n|H'|m\rangle+\sum_l\frac{\langle n|H'|l\rangle\langle l|H'|m\rangle}{E_m-E_l+i\varepsilon}+\cdots. \tag{9.17}$$

nの近くのどこかに遷移の起こる単位時間ごとの確率は，

$$w_{nm}=\frac{2\pi}{\hbar}\sum_n|\langle n|T|m\rangle|^2\delta(E_n-E_m)=\frac{2\pi}{\hbar}|\langle n|T|m\rangle|^2\rho(E_n) \tag{9.18}$$

で与えられる．

2粒子の衝突のときは w のかわりに断面積で反応の割合を表わすのがよい．$m\to n$ の断面積 $d\sigma$ は 29 ページで与えられるように，始状態の2粒子の相対速度を v とすれば，

$$d\sigma_{nm}=\frac{L^3}{v}w_{nm} \tag{9.19}$$

である．全断面積はあらゆるnについて加え合わせれば得られる．

(9.2) では終状態も u_n で展開したが，反応後の自由粒子状態を初めのと同じものにとらねばならない理由はない．終状態の系を v_α として，

$$\psi_m^{(f)}=\sum_\alpha\langle\alpha|S|m\rangle v_\alpha \tag{9.20}$$

のように書いてもよい．$|\langle\alpha|S|m\rangle|^2$ は $u_m\to v_\alpha$ という反応が起こる確率を与える．次の節ではこのような場合も考えるが，ここでは簡単のため始めも終りも同じ u_n をとることにする．

S - 行列あるいは遷移行列Tは素粒子間の相互作用 Hamiltonian H' を与えることによって決まるものだが，まず具体的な H' の与え方には無関係に S - 行列のみたすべきいくつかの性質を調べてみる．

[S-行列の不変性と保存則]

系の Hamiltonian がある操作に対して不変ならば，それに対応して保存則が成り立つ (§ 2.6). たとえば，座標系を平行移動しても Hamiltonian が変らないので (§ 4.2) 全運動量は保存する．したがって任意の反応の前後でもそうであって，S-行列は全運動量の保存する状態の間にのみ行列要素を持っていて，もし $\boldsymbol{p}_n \neq \boldsymbol{p}_m$ ならば $\langle n|S|m\rangle = 0$ である．

H' がある変換 $\mathcal{T}$ を行なっても変らないとき，すなわち，$[\mathcal{T}, H'] = 0$ ならば，(9.4) より $\mathcal{T}U(t, t_0)$ および $U(t, t_0)\mathcal{T}$ は同一の式

$i\hbar\dfrac{\partial A(t, t_0)}{\partial t} = H'(t)A(t, t_0)$ をみたすことが示される．ここで A は $\mathcal{T}U$ または $U\mathcal{T}$ である．また $\mathcal{T}U(t, t_0)$ と $U(t, t_0)\mathcal{T}$ は (9.5) より $t = t_0$ で同一の値 $\mathcal{T}$ を持つので，両者はすべての時刻 t で同一になる．$\mathcal{T}U(t, t_0) = U(t, t_0)\mathcal{T}$. $t \to +\infty$, $t_0 \to -\infty$ の極限を考えると $\mathcal{T}S = S\mathcal{T}$ が得られる．書き直すと，

$$\mathcal{T}^{-1}S\mathcal{T} = S. \tag{9.21}$$

これより状態 m, n 間の S-行列は，

$$\langle \mathcal{T}n|S|\mathcal{T}m\rangle = \langle n|S|m\rangle \tag{9.22}$$

をみたす．n, m が $\mathcal{T}$ の固有状態のときは，この式から保存則が得られる．たとえば $\mathcal{T}$ か x 軸の方向に座標系を a だけ平行移動するという変換とし，m, n が運動量の x 成分がそれぞれ p_m, p_n の状態とすると，(4.17) より，

$$\mathcal{T}u_m = e^{ip_m a/\hbar}u_m, \quad \mathcal{T}u_n = e^{ip_n a/\hbar}u_n$$

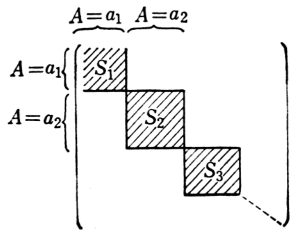
である．これから (9.22) は，

$$e^{-ia(p_n-p_m)/\hbar}\langle n|S|m\rangle = \langle n|S|m\rangle.$$

これが任意の a に対して成り立つためには，

$$p_n \neq p_m \text{ ならば } \langle n|S|m\rangle = 0 \tag{9.23}$$

が必要である．すなわち反応の前後で運動量は保存する．他の保存量についても同様である．



9-1 図

運動量の他に荷電，パリティ等の保存量があるが，反応前後の自由な状態 u_n として保存量 A の固有状態をとると，S-行列は A の固有値にしたがっていくつかの部分行列に分けられ，それ以外の行列要素は 0 となる (9-1 図). (9.23) の関

係および 9－1 図のような分解は遷移行列 T についても同様に成り立つ．

［S-行列のユニタリー性］

m という状態で入射したとき，終状態に n が得られる確率は (9.8) で与えられる．反応後にどれかの状態が見出される確率の総和は 1 でなければならないから，(9.8) をあらゆる状態 n について加え合わせたものは 1 となる．

$$\sum_n p_{nm} = \sum_n |\langle n|S|m\rangle|^2 = 1. \tag{9.24}$$

あるいはエルミット共役行列の定義から，

$$\sum_n \langle m|S^\dagger|n\rangle\langle n|S|m\rangle = 1 \tag{9.25}$$

である．

ところで u_m, u_l が系のとりうる状態なら，それらを任意の割合いで重ね合わせた，

$$u_a = \alpha u_m + \beta u_l, \quad l \neq m$$
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{9.26}$$

も一つの可能な状態である．始状態 u_m のときの終状態は (9.7)，u_l からの終状態も同様にかけるから，u_a を始状態としたときの終りの状態は，

$$\psi_a^{(f)} = \sum_n (\alpha\langle n|S|m\rangle + \beta\langle n|S|l\rangle)u_n.$$

どれかの状態が見出される確率の総和はやはり 1 であるから，

$$1 = \sum_n |\alpha\langle n|S|m\rangle + \beta\langle n|S|l\rangle|^2$$
$$= |\alpha|^2\sum_n |\langle n|S|m\rangle|^2 + |\beta|^2\sum_n |\langle n|S|l\rangle|^2 + 2\mathrm{Re}\{\alpha^*\beta\sum_n\langle m|S^\dagger|n\rangle\langle n|S|l\rangle\}.$$

ここで (9.24) および (9.26) を考慮すると，

$$2\mathrm{Re}\{\alpha^*\beta\sum_n \langle m|S^\dagger|n\rangle\langle n|S|l\rangle\} = 0 \tag{9.27}$$

でなければならない．α, β は (9.26) の関係をみたす任意の複素数であるから，

$$\sum_n \langle m|S^\dagger|n\rangle\langle n|S|l\rangle = 0, \quad l \neq m \tag{9.28}$$

が必要である．たとえば $\alpha^*\beta$ が実数の場合，次に純虚数の場合を考えると，(9.27) から (9.28) の左辺の実数部も虚数部も 0 であることがいえる．

状態 m と l がいちじるしく異なるとき（たとえば荷電が異なるとき）は (9.26) のような始状態を用意できないかもしれない．そのときは上の議論は使えなくなるが，これは $m \to l$ という遷移が決して起こらない場合である．その場合は $l \to n$, $m \to n$ が起こり得るような共通な n も存在しないから (9.28) の左辺はやはり 0 となる．

(9.25) と (9.28) をまとめると，

$$\sum \langle m|S^\dagger|n\rangle\langle n|S|l\rangle = \delta_{ml}, \tag{9.29}$$

あるいは，

$$S^\dagger S = 1 \tag{9.30}$$

と書ける．Hamiltonian が与えられているときは (9.30) は次のように証明される．(9.4) およびそのエルミット共役の方程式から，

$$\frac{d}{dt}U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = \dot{U}^\dagger U + U^\dagger \dot{U} = \frac{i}{\hbar}(U^\dagger H' U - U^\dagger H' U) = 0.$$

すなわち $U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0)$ は時間とともに変化しない．特に $t = t_0$ では $U^\dagger U = 1$ であるから，

$$U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = 1.$$

これは相互作用 H' がエルミットであることの結果である．$t \to \infty$, $t_0 \to -\infty$ の極限をとれば (9.30) が得られる．

(9.30) からただちに $SS^\dagger = 1$ は結論できない．有限次元の行列なら (9.30) から S の逆の存在がいえるので，(9.30) の左から S, 右から S^{-1} を掛けて $SS^\dagger = 1$ となる．しかし今は無限に多くの状態を問題にしているので S に逆があるとは限らず，$SS^\dagger = 1$ はすぐにはいえない．しかしこれは次の要求から導かれる．(9.7) は u_m が入射したときの終状態で，mをいろいろかえたときそれらは互に直交しかつ規格化されている ((9.28) および (9.24))．さらにこれが完全系であるとしよう．すなわち任意の状態 ψ は $\{\psi_m^{(f)}\}$ で展開できるとする．特に u_m をこれで展開すると，

$$u_m = \sum_n c_n \psi_n^{(f)} = \sum_n \psi_n^{(f)} \langle \psi_n^{(f)\dagger}, u_m \rangle.$$

これに $u_l^\dagger$ を掛けると，

$$\sum_n \langle u_l^\dagger, \psi_n^{(f)}\rangle\langle \psi_n^{(f)\dagger}, u_m\rangle = \delta_{lm}.$$

(9.7) およびその複素共役の式をつかって上の式を S-行列要素で書くと

$$\sum_n \langle l|S|n\rangle\langle n|S^\dagger|m\rangle = \delta_{lm}.$$

結局 S-行列は，

$$S^\dagger S = 1, \quad SS^\dagger = 1 \tag{9.31}$$

という性質がある．すなわち S-行列はユニタリーである．ユニタリー性は S-行列の基本的な重要な性質である．

ウニタリー性の式 (9.30) を (9.16) によって，遷移行列についての式になおすと

$$\sum_n (\delta_{mn} + 2\pi i\delta(E_n - E_m)\langle m|T^\dagger|n\rangle)(\delta_{nl} - 2\pi i\delta(E_l - E_n)\langle n|T|l\rangle)$$

$$= \delta_{ml} + 2\pi i\delta(E_l - E_m)(\langle m|T^\dagger|l\rangle - \langle m|T|l\rangle)$$

$$+ (2\pi)^2\delta(E_l - E_m)\sum_n \delta(E_n - E_m)\langle m|T^\dagger|n\rangle\langle n|T|l\rangle = \delta_{ml}.$$

したがって，

$$i(\langle m|T|l\rangle-\langle m|T^\dagger|l\rangle)=2\pi\sum\delta(E_n-E_m)\langle m|T^\dagger|n\rangle\langle n|T|l\rangle. \tag{9.32}$$

この式で $l=m$ とすると，

$$-2\,\mathrm{Im}\langle m|T|m\rangle=2\pi\sum_n\delta(E_n-E_m)|\langle n|T|m\rangle|^2=\frac{v\hbar}{L^3}\sigma_{tot,m}. \tag{9.33}$$

ただし，$\sigma_{tot,m}$ は m で入射したときの全断面積である．$\langle m|T|m\rangle$は始めと同じ状態への遷移，すなわち前方散乱の振幅に比例するもので，この式は前方散乱振幅の虚数部が全断面積 $\times v$ に比例することを示している．

[S-行列の相反性]

時間反転に対する不変性が成り立つならば $m\to n$ という反応と，その逆の $n\to m$ という反応の間には密接な関係があることが予想される．時間反転に対しては (9.22) の関係式は注意を要する．時間反転の際は演算子の並び方の順序を逆にしなければならないからである．(§ 6.6, § 7.2 参照)．これは行列でいうと転置行列をとることになる．したがって m, n の時間反転された状態をそれぞれ $\overline{m}, \bar{n}$ と書くと時間反転に対する不変性から，

$$\langle\overline{m}|S|\bar{n}\rangle=\langle n|S|m\rangle$$

が成り立つことになる．この関係式をもう少しくわしく考えてみよう．

はじめに簡単な場合としてスピンのない粒子で Hamiltonian が実数である場合を考えよう (§ 4.3)．このときは $\psi(t)$ が Schrödinger 方程式の解ならば $\psi^*(-t)$ もやはり解であって，実際に起こり得る状態である．したがって，ψ_a から出発して充分時間がたった後に ψ_b となったならば，ψ_b^* から出発して充分時間がたつと状態は ψ_a^* になることになる．ψ_a として u_m, ψ_b として $S\psi_m$ をとると，

$$u_m\to\sum_n\langle n|S|m\rangle u_n \tag{9.34}$$

という反応が起こるなら，時間反転をして，

$$\sum_n\langle n|S|m\rangle^*u_n^*\to u_m^* \tag{9.35}$$

という変化も起こるはずである．u_n^* は自由粒子を表わす Hamiltonian の固有状態で，u_n の時間反転された状態 $u_{\bar{n}}$ である．(9.35) は，

$$\sum_n\langle n|S|m\rangle^*u_{\bar{n}}\to u_{\overline{m}}. \tag{9.36}$$

一方，$u_{\bar{n}}$ から出発すると反応後は，

$$u_{\bar{n}}\to\sum_l\langle\bar{l}\,|S|\bar{n}\rangle u_{\bar{l}} \tag{9.37}$$

となるのだから，(9.36) の左辺を始状態としたときの終状態を比較して，

$$\sum_{n,l}\langle n|S|m\rangle^*\langle \bar{l}\,|S|\bar{n}\rangle u_{\bar{l}}=u_{\bar{m}}$$

でなければならない．この式から（両辺に $u_{\bar{l}}^\dagger$ をかけて)，

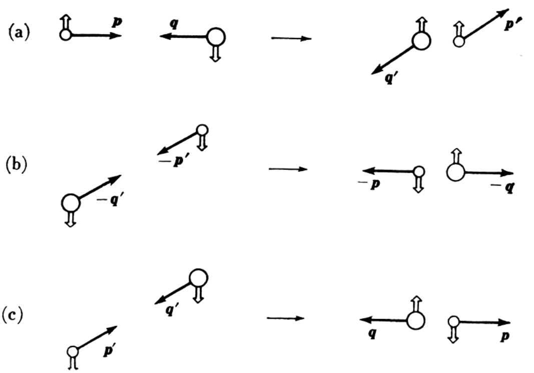
$$\sum_{n}\langle m|S^\dagger|n\rangle\langle \bar{l}\,|S|\bar{n}\rangle=\delta_{lm}$$

である．$\langle k|S|m\rangle$ をかけて m について加え，S がユニタリーであることをつかうと，

$$\langle \bar{l}\,|S|\bar{k}\rangle=\langle k|S|l\rangle \tag{9.38}$$

が得られる．

スピンがあるときは ψ の時間反転された状態は ψ^* ではなく，これにスピンを逆転させる演算子を作用させたものである．しかし (9.36) 式はやはり成り立つので前と同じく (9.38) が得られる．これを S－行列の **相反性 (reciprocity)** という．$\bar{n}$ は n の時間反転された状態で，n と比較して運動量角運動量の向きが逆で，ヘリシティは等しい状態である．



9－2 図　(a) は元の反応，(b) は時間反転をした反応，(c) はさらに空間反転したもの．(9.39) により (a) と (b) の S－行列要素は等しく，(9.40) により (c) のとも等しい．

自由粒子の状態として運動量の固有状態をとり，状態を各粒子の運動量，ヘリシティで表わすと (9.38) は，

$$\langle \boldsymbol{p}',\,h';\,\cdots|S|\boldsymbol{p},\,h;\,\cdots\rangle=\langle -\boldsymbol{p},\,h;\,\cdots|S|-\boldsymbol{p}',\,h';\,\cdots\rangle \tag{9.39}$$

である．もし空間反転に対しても不変ならば，右辺に空間反転をすると運動量の向きは逆になるが，h も $-h$ になり，

$$\langle \boldsymbol{p}',\,h';\,\cdots|S|\boldsymbol{p},\,h;\,\cdots\rangle=\langle \boldsymbol{p},\,-h;\,\cdots|S|\boldsymbol{p}',\,-h';\,\cdots\rangle \tag{9.40}$$

が得られる．(9.39)，(9.40) の関係は 9－2 図に示すとおりである．(9.38) 等の reciprocity の式はもちろん S のかわりに遷移行列 T に対しても成り立つものである．

$$\langle \bar{l}\,|T|\bar{k}\rangle=\langle k|T|l\rangle. \tag{9.41}$$

〔問題 9.1〕 (A) の各反応に対するしきい値（実験室系での値）を求めよ．

〔問題 9.2〕 2行2列の S-行列がユニタリーで対称であるとする．その最も一般な形を求めよ．

［ヒント］

$$S=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

とおく．a, b, c は複素数である．特に b の偏角は a, c の偏角により決ってしまうことを示せ．

〔問題 9.3〕 (9.10) の展開式を用いて S-行列のユニタリー性を証明せよ．

§ 9.2 部分波展開

反応前後の自由な状態 u_n としては一定の運動量を持ったものをとることが多い．しかし系の全角運動量も保存量であるので，全角運動量の大きさ J と z 方向の成分 J_z の固有状態を自由な状態としてとると便利なことがある．このときは S-行列は，

$$\langle J',\, J_z',\, \alpha' | S | J,\, J_z,\, \alpha\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{J_zJ_z'}\langle\alpha' | S(J, J_z) | \alpha\rangle$$

という形になる．α は角運動量の他に状態を指定するのに必要な量子数である．$S(J, J_z)$ のうち J が等しく J_z の値が異なるものは全部等しい．それは座標系の回転に対して S が不変だからである．いま固有状態 $u_{J,J_z,\alpha}$ を $u_{J,J_z-1,\alpha}$ に移すような演算子 $\mathcal{T}_-$ を考えよう．$\mathcal{T}_-$ は角運動量の演算子 $\boldsymbol{J}$ で書くことができ（問題 [3.2] 参照）H と可換なので (9.22) が成立する．$\mathcal{T}_-$ は $J_z \to J_z - 1$ に移す演算子であるから (9.22) は，

$$S(J,\, J_z) = S(J,\, J_z - 1)$$

になる．したがって，J_z は書く必要がなく $S(J)$ を問題にすればよい．もし量子数 α を適当にとって S を対角行列，

$$\langle J',\, \alpha' | S | J,\, \alpha\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{\alpha\alpha'}S(J,\, \alpha) \tag{9.42}$$

とすることができれば，S-行列のユニタリー性から $S(J, \alpha)$ は絶対値1の数で次のように書ける．

$$S(J, \alpha) = e^{2i\delta(J,\alpha)}. \tag{9.43}$$

$\delta(J, \alpha)$ は実数で，これを J, α の状態での散乱の**位相のずれ**（**phase shift**）という．

エネルギー E はもちろん J, J_z と可換な保存量だから α として採用できる．一般にはこれだけではまだ状態は決まらず，S-行列は完全な対角行列とはならない．特にたくさんのチャンネルが開いているとき，粒子が内部自由度を持つときなどは $S(J, E)$ は何行，何列かの行列である．しかし弾性散乱のみが起こるような低エネルギーで，またスピン変数が問題にならないときは状態はエネルギーと軌道角運動量 l, m で決ってしまうので，この場合は散乱は実数の位相のずれ $\delta_l(E)$, $l = 0, 1, 2, \cdots$ だけで表わされることになる．

粒子が球対称な力の場で弾性散乱される場合を考えよう．簡単のため力は粒子のスピン方向を変えないとすればスピン変数は考えなくてよく，波動関数は粒子の位置のみの関数である．散乱の前後すなわち力の場から充分離れたところでは力は全然働かないとしてよい．このような自由な粒子の状態としては平面波が一つの可能性であるが，ここでは角運動量の固有状態をとろう．

$$u_{k,l,m}(r,\ \theta,\ \varphi)=R_{k,l}(r)Y_l{}^m(\theta,\ \varphi). \tag{9.44}$$

$Y_l{}^m$ は球関数（3.21）で $R_{k,l}$ は（166 ページ参照）自由粒子の方程式，

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}+k^2\right)R_{k,l}(r)=0,\quad E=\frac{\hbar^2k^2}{2m} \tag{9.45}$$

をみたす．

この方程式は変数 $\rho=kr$ を用いて書き直すと $\rho R_{k,l}$ に対する式，

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+1-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)(\rho R_{k,l})=0 \tag{9.45$'$}$$

になる．2階の微分方程式なので二つの独立な解が存在する．$l=0$ の場合はただちにわかるように，それらの解 $R_{k,0}$ は，

$$\alpha\frac{e^{-i\rho}}{\rho},\quad \beta\frac{e^{i\rho}}{\rho}$$

の2個で $\alpha,\ \beta$ は定数である．$\alpha,\ \beta$ を適当にとり次のものを $h_{k0}{}^{(1)}(r)$, $h_{k0}{}^{(2)}(r)$ と書く．

$$h_{k0}{}^{(1)}(r)=-\frac{e^{-ikr}}{ikr},\quad h_{k0}{}^{(2)}(r)=\frac{e^{ikr}}{ikr}. \tag{9.46}$$

$l\neq 0$ の場合も $r\to\infty(\rho\to\infty)$ では（9.45′）の $l(l+1)/\rho^2$ の項は省略できるので漸近的に（9.46）に近づく解が存在する．これらをそれぞれ $h_{kl}{}^{(1)}$, $h_{kl}{}^{(2)}$ と書く．

$$h_{kl}{}^{(1)}(r)\sim-\frac{e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}}{ikr},\quad h_{kl}{}^{(2)}(r)\sim\frac{e^{i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}}{ikr},\ (r\to\infty). \tag{9.47}$$

$-l\pi/2$ を指数関数に加えた理由はあとでわかる．

$h_{kl}{}^{(1)}$ は中心に向って進む波，$h_{kl}{}^{(2)}$ は中心から外に向って進む波であり，前者は散乱前の状態，後者は散乱後の状態に対応する．エネルギーが一定の定常的な扱いでは $u_{k,l,m}(r,\ \theta,\ \varphi)$（9.44）は時間によらず，絶えず波を散乱中心に向って入射させ，したがってまた散乱中心からも絶えず散乱波がでてくる．散乱の波動関数は，したがってこれら入射波と散乱波を重ね合せたもので，その重ね合せ方は r の小さな所で働く力によって決まる．

$R_{k,l}(r)$ 等の関数を規格化するためには空間を有限の大きさに制限しなければならない．

また角運動量が良い量子数になるためには球対称な境界条件にしなければいけない．ここではむしろ空間を制限せず，波動関数も規格化しないで使うのが便利である．このとき粒子の存在する全確率は無限大で，空間の各点に存在する相対確率だけが問題である．

以下粒子の波動関数とは次の意味で用いる．粒子を消す働きを持つ場の量を $\varphi(\boldsymbol{r})$ とし，粒子の存在する状態を $|1\rangle$ としたとき波動関数を，

$$\psi(\boldsymbol{r})=\langle 0|\varphi(\boldsymbol{r})|1\rangle$$

で定義する．$|0\rangle$ は真空状態である．たとえば運動量 $\boldsymbol{p}$ の荷電スピン 0 粒子が 1 個存在する状態では (6.93) により，

$$\psi(\boldsymbol{r})=\hbar c\sqrt{\frac{1}{2EL^3}}e^{i\boldsymbol{pr}/\hbar}$$

であるが，$|1\rangle$ の規格化を問題にしないならば単に $e^{i\boldsymbol{pr}/\hbar}$ としてよい．$\psi(\boldsymbol{r})$ が平面波でないときは $|1\rangle$ がいろいろの運動量の粒子の重ね合わされた状態であることを示している．

普通実験を行なう場合は入射粒子は一定の運動量を持った平面波の状態である．これを角運動量の固有状態で展開しよう．平面波の波動関数（規格化しない）は運動量 $\boldsymbol{p}$ の方向を z 軸にとると，

$$e^{i\boldsymbol{pr}/\hbar}=e^{ikz},\quad k=|\boldsymbol{p}|/\hbar \tag{9.48}$$

である．z 方向に進む波の持つ軌道角運動量は z 軸に垂直であるから $(\boldsymbol{M}\perp\boldsymbol{p}/\!/z)$，これを球関数で展開すると $Y_l^m(\theta,\varphi)$ のうち $m=0$ のもののみが現われる．したがって，

$$e^{ikz}=\sum_{l=0}^{\infty}i^l(2l+1)P_l(\cos\theta)j_l(kr) \tag{9.49}$$

と書ける．i^l は展開の係数（これはあとで確かめる）で，P_l は (3.21) より，

$$P_l(\cos\theta)\equiv P_l^0(\cos\theta)=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_l^0(\theta,\varphi). \tag{9.50}$$

また $j_l(kr)$ は (9.45) の解で，$h_{kl}^{(1)}$ と $h_{kl}^{(2)}$ を次のように重ね合わせたものである．$r=0$ で波動関数は有限でなければならないので（$h_{kl}^{(1)}$, $h_{kl}^{(2)}$ は $r\to0$ でそれぞれ無限大），$j_l(kr)$ は $r\to0$ で $h_{kl}^{(1)}$ と $h_{kl}^{(2)}$ の無限大が打ち消すように加え合わせる．

$l=0$ の場合，$r=0$ で有限で値が 1 の解を j_0 とする．ただちにわかるように，

$$j_0(kr)=\frac{\sin kr}{kr}=\frac{1}{2}(h_{k0}^{(1)}(r)+h_{k0}^{(2)}(r)). \tag{9.51}$$

$j_0(\rho)$ は (9.45′) より次式をみたす．

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+1\right)(\rho j_0(\rho))=0 \quad \text{または} \quad \left(\frac{d^2}{d\rho^2}+1\right)j_0=-\frac{2}{\rho}\,\frac{dj_0}{d\rho}.$$

この $j_0(\rho)$ より，

$$j_l(\rho)=(-\rho)^l\left(\frac{d}{\rho d\rho}\right)^l j_0(\rho) \tag{9.52}$$

を作る．$\rho j_1(\rho) = -\rho \dfrac{dj_0}{d\rho}$ のみたす式を求めると，

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+1\right)(\rho j_1) = -\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+1\right)\left(\rho\frac{dj_0}{d\rho}\right) = -\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+1\right)\left\{\frac{d}{d\rho}(\rho j_0) - j_0\right\}$$

$$= \left(\frac{d^2}{d\rho^2}+1\right)j_0 = -\frac{2}{\rho}\frac{dj_0}{d\rho} = \frac{2}{\rho^2}(\rho j_1).$$

したがって ρj_1 は $l=1$ に対する (9.45′) をみたす．同様に $j_l(\rho)$ は (9.45′) の解であることを示しうる．$\rho\to 0$ の近傍では，

$$j_0(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho} = 1 - \frac{\rho^2}{3!} + \frac{\rho^4}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{\rho^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$$

で，したがって，

$$j_l(\rho) \approx \frac{2^l l!}{(2l+1)!}\rho^l + \cdots \tag{9.53}$$

で，$\rho\to 0$ に対し $j_l(\rho)$ は $\propto \rho^l$ で 0 に近づく $(l\neq 0)$．(9.49) の両辺で $(kr\cos\theta)^l$ の係数を比較すると $(P_l(\cos\theta) = \cos^l\theta(2l)!/2^l(l!)^2 + \cdots)$，右辺の展開係数を i^l ととってちょうどよいことがわかる．一方，$\rho\to\infty$ では，

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l\left(\frac{1}{\rho d\rho}\right)^l j_0(\rho) \approx \frac{(-\rho)^l}{\rho^{l+1}}\frac{d^l\sin\rho}{d\rho^l}$$

$$= \frac{(-1)^l}{2i\rho}\frac{d^l}{d\rho^l}(e^{i\rho}-e^{-i\rho}) = \frac{1}{2i\rho}\left(e^{i\left(\rho-\frac{l\pi}{2}\right)} - e^{-i\left(\rho-\frac{l\pi}{2}\right)}\right) \tag{9.54}$$

となる．これと (9.47) とより，

$$j_l(\rho) = j_l(kr) = \frac{1}{2}(h_{kl}{}^{(1)}(r) + h_{kl}{}^{(2)}(r)).$$

(9.49) の平面波は r の大きい所では，

$$e^{ikz} \approx \frac{1}{2ikr}\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)\left[e^{i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)} - e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right]P_l(\cos\theta)$$

$$= \sqrt{\pi}\sum_{l=0}^{\infty} i^l\sqrt{2l+1}(v_{k,l}+u_{k,l}),\quad r\to\infty \tag{9.55}$$

となる．ここで

$$u_{k,l} = -\frac{e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}}{ikr}Y_l{}^0(\theta,\varphi),$$

$$v_{k,l} = \frac{e^{i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}}{ikr}Y_l{}^0(\theta,\varphi) \tag{9.56}$$

で，それぞれ散乱前後の角運動量 l, $(m=0)$, 運動量の大きさ $\hbar k$ の波を表わす．

平面波とは入射波が散乱を受けずにそのまま出ていく場合である．(9.55) の右辺の括弧内の第 2 項は入射してくる球面波，第 1 項は出ていく球面波で u がそのまま v となって出ていく：$u\to v$.

力が働いて散乱があるときは，u_i が入射したとき，

$$\sum_j \langle j|S|i\rangle v_j$$

となって出ていくのであるが，S は対角行列なので，

$$u_{k,l} \to S_l(k)v_{k,l} = e^{2i\delta_l(E)}v_{k,l}$$

となる．したがって，u の重ね合わせである平面波で入射したとき，充分遠くでの波動関数は，

$$\psi \approx \sqrt{\pi}\sum_l i^l\sqrt{2l+1}(u_{k,l}+S_l(k)v_{k,l})$$

$$= \frac{1}{2ikr}\sum_l i^l(2l+1)\left[S_l e^{i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)} - e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right]P_l(\cos\theta),\ r\to\infty. \quad (9.57)$$

このなかには平面波が素通りしたものが含まれている．この部分 (9.55) を分けて書くと

$$\psi \approx e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}, \quad r\to\infty, \quad (9.58)$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(S_l-1)P_l(\cos\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta) \quad (9.59)$$

と書ける．(9.58) の第2項が散乱された波を表わし，$f(\theta)$ を**散乱振幅** (**scattering amplitude**) という．

平面波 e^{ikz} の状態で飛んでいるときの粒子の流れの大きさを考えよう．非相対論的粒子の量子力学では，z 軸に垂直な単位面積を単位時間ごとに $v=\hbar k/m$ 個の粒子が通過する．Dirac 粒子のときは流れの密度として $c\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi$ をとるのであるが，$\boldsymbol{\alpha}$ の平面波状態での期待値は $\boldsymbol{v}/c$ なのでやはり同じ結果が得られる．スピン0粒子の流れは (6.95) で与えられ，単位面積を単位時間ごとに $2k/\hbar$ 個の粒子が通過する（規格化してないので次元が合っていない）．球面波 e^{ikr}/r に対しても同様に計算され，充分大きい r に対して r に垂直な単位面積を単位時間に通過する粒子数は Dirac 粒子のとき v/r^2 個，スピン0粒子のとき $2k/\hbar r^2$ 個である．そこで (9.58) の波を考えると，いずれの粒子の場合でも z 軸に垂直な単位面積を N 個の粒子が通過するとき，θ 方向の単位立体角内に散乱される粒子の数は $|f|^2N$ 個である．したがって散乱の断面積は，

$$d\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{1}{4k^2}\left|\sum_l(2l+1)(S_l-1)P_l(\cos\theta)\right|^2 d\Omega \quad (9.60)$$

で与えられる．全断面積は立体角について積分して得られるが，球関数の直交性，

$$\int P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1}\delta_{l,l'} \quad (9.61)$$

から l の異なる項の積は落ちて，

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \tag{9.62}$$

が得られる．k は運動量 p に相当する波数である．このように散乱断面積は $\delta_l(E)$，$l=0, 1, 2, \cdots$ が与えられれば，それによって書き表わされる．

波動関数 ψ を，

$$\psi = \sum i^l(2l+1) w_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

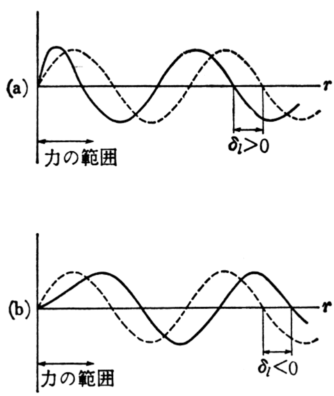
と書くとき，(9.57) から r の大きいところで，

$$w_l(kr) \approx e^{i\delta_l} \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right). \tag{9.63}$$

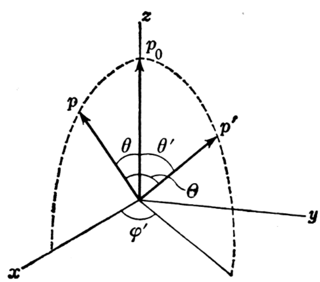
これと平面波に現われる j_l の漸近式 (9.54)，

$$j_l(kr) \approx \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \tag{9.64}$$

と比較してみると，散乱のある場合はないときにくらべて三角関数の位相が δ_l だけずれている．phase shift の名称はこれからきたものである．波が力の中心の方に引きこまれるときは δ_l は正であり，外の方に押し出されるときは δ_l は負となる．(9－3 図)．



9－3 図 波動関数と位相のずれ．点線は力の働かないときの krj_l ($l=0$ の場合を書いてある)，実線は力の働くときの krw_l．(a) は力が引力のとき，(b) は力が斥力のときに相当する．



9－4 図

位相のずれ δ_l の意味を知るには r 空間で考えるとよいが，(9.59) の関係式は遷移行列に対するユニタリー性の式 (9.32) から直接出すことができる．p_0 から p に散乱され

るときの行列要素 $\langle \boldsymbol{p}|T|\boldsymbol{p}_0\rangle$ は運動量の大きさ $p=|\boldsymbol{p}|$ と散乱角 θ だけの関数であるから，これを球関数で展開して，

$$\langle \boldsymbol{p}|T|\boldsymbol{p}_0\rangle = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_l(p)P_l(\cos\theta) \tag{9.65}$$

とする．ウニタリー性の条件，

$$i(\langle \boldsymbol{p}|T|\boldsymbol{p}_0\rangle - \langle \boldsymbol{p}|T^\dagger|\boldsymbol{p}_0\rangle) = 2\pi\sum_{\boldsymbol{p}'}\delta(E'-E_0)\langle \boldsymbol{p}|T^\dagger|\boldsymbol{p}'\rangle\langle \boldsymbol{p}'|T|\boldsymbol{p}_0\rangle \tag{9.66}$$

に展開 (9.65) を入れると，

$$i\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(a_l-a_l^*)P_l(\cos\theta) = 2\pi\sum_{\boldsymbol{p}'}\sum_{l}\sum_{l'}\delta(E'-E_0)(2l+1)(2l'+1) \times a_l^* a_{l'} P_l(\cos\Theta)P_{l'}(\cos\theta'). \tag{9.67}$$

Θ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ のなす角である．9－4 図のように角 θ', φ' をとると，

$$\cos\Theta = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi' \tag{9.68}$$

であるが，球関数の公式により，

$$P_l(\cos\Theta) = P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')\cos m\varphi' \tag{9.69}$$

と書くことができる．(9.67) で $\boldsymbol{p}'$ についての和を積分でおきかえ (9.69) 等を用いると

$$(9.67)\ の右辺 = \frac{L^3}{(2\pi)^2\hbar^3}\sum_{l}\sum_{l'}(2l+1)(2l'+1)a_l^* a_{l'}\int p'^2 dp'\delta(E'-E_0) \times\int d\cos\theta' d\varphi' P_l(\cos\Theta)P_{l'}(\cos\theta') = \frac{L^3}{\pi\hbar^3}\sum_{l}(2l+1)|a_l|^2 p^2\frac{dp}{dE}P_l(\cos\theta).$$

これと (9.67) の左辺をくらべると，

$$-2\mathrm{Im}\,a_l = \frac{L^3}{\pi\hbar^3}p^2\frac{dp}{dE}|a_l|^2 \tag{9.70}$$

の関係がある．もう少し見やすくするために，

$$a_l(p) = -\frac{2\pi\hbar^2}{L^3 p}\frac{dE}{dp}f_l(p) \tag{9.71}$$

とおくと，f_l に対する条件は，

$$\mathrm{Im}\,f_l = k|f_l|^2, \quad k = p/\hbar \tag{9.72}$$

となる．このような f_l は δ_l を実数として，

$$f_l = \frac{e^{i\delta_l}\sin\delta_l}{k} \tag{9.73}$$

という形に書くことができる．こうして遷移行列要素は，

$$\langle \boldsymbol{p}|T|\boldsymbol{p}_0\rangle = -\frac{2\pi\hbar^2}{L^3 p}\frac{dE}{dp}f(\theta) \tag{9.74}$$

となる．$f(\theta)$ は散乱振幅（9.59）である．散乱断面積はこれから（9.19）(9.18）の公式を用いて得られる．dE/dp は粒子の速度 v であり，終状態の密度は，

$$\rho(E) = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 p^2 \frac{dp}{dE} d\Omega = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \frac{p^2}{v} d\Omega. \tag{9.75}$$

したがって，

$$d\sigma = \frac{L^3}{v}\frac{2\pi}{\hbar}|\langle \boldsymbol{p}|T|\boldsymbol{p}_0\rangle|^2 \rho(E) = |f(\theta)|^2 d\Omega. \tag{9.76}$$

これから（9.73）で導入した δ_l は前の位相のずれと等しいものであることがわかる．

いままでは1粒子が力の場で散乱されると考えたが，スピンを考えないときの2粒子の散乱もまったく同じである．重心系をとって2粒子の運動量を $\boldsymbol{p}$, $-\boldsymbol{p}$ とすれば，状態は $\boldsymbol{p}$ だけで決まってしまう．全エネルギーを E とすれば，

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_1{}^2c^4} + \sqrt{p^2c^2 + m_2{}^2c^4},$$

$$\frac{dE}{dp} = v_1 + v_2 = v \tag{9.77}$$

である．29ページと同じ議論をすると，2粒子の衝突の時の断面積は遷移確率を v/L^3 で割って得られる．したがって断面積の式は（9.76）と変らない．こうして（9.59），（9.60），（9.62）の式は θ を重心系での散乱角，p（k）を重心系での片方の粒子の運動量（波数）としてそのまま成り立つ．また以下でもこの意味で考える．

非弾性チャンネルが開いているときは S-行列のうち角運動量 l の部分は単なる数ではなく，何行何列かの行列である．そのうちで弾性散乱に相当する行列要素 S_l はウニタリー性の条件から，

$$|S_l| \leq 1 \tag{9.78}$$

が必要である．$1-|S_l|^2$ は非弾性チャンネルにいく確率を与える．（9.65），（9.71）で定義される f_l でいえば，（9.66）したがって（9.72）の右辺に非弾性チャンネルからの正の寄与があるので，

$$\mathrm{Im}\, f_l \geq k|f_l|^2 \tag{9.79}$$

となる．あるいは f_l を非弾性チャンネルのある場合にも（9.73）の形に書くと，

$$|e^{2i\delta_l}|^2 = |2ikf_l + 1|^2 = 4k^2|f_l|^2 - 4k\,\mathrm{Im}\, f_l + 1 \leq 1.$$

すなわち，f_l を無理に（9.73）の形に書くと δ_l は複素数であって，正の虚数部を持つことになる．弾性散乱の断面積は S_l の絶体値が1に等しくないという点を除いて（9.60）と同じである．弾性散乱の全断面積は，

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)|1-S_l|^2. \tag{9.80}$$

非弾性散乱の断面積をだすには，(9.57) の波動関数で，入射してくる粒子の数と外に出てゆく数の差を計算する．充分大きい球の表面を通って流れこむ数は単位時間に，

$$\frac{v}{4k^2}\int|\sum_l i^l(2l+1)P_l(\cos\theta)|^2 d\Omega = \frac{\pi v}{k^2}\sum_l(2l+1).$$

同様にして球面から出ていく数は単位時間ごとに，

$$\frac{\pi v}{k^2}\sum(2l+1)|S_l|^2.$$

両者の差は単位時間になくなる粒子すなわち反応を起こした数を与える．入射粒子の強度は単位時間に単位面積を通って v 個だから，非弾性反応の全断面積は，

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1-|S_l|^2). \tag{9.81}$$

(9.78) の条件により，もちろんこれは正の量である．これと σ_{el} の式から全断面積は，

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_r = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)2(1-\mathrm{Re}S_l). \tag{9.82}$$

この式，したがって逆に σ_r の式は前にだした (9.33) からも導かれる．(9.74) で $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0$ すなわち $\theta=0$ として虚数部を作ると (9.33) より，

$$\mathrm{Im}f(0) = \frac{k}{4\pi}\sigma_{tot}. \tag{9.83}$$

これを **光学定理**(**optical theorem**)という．($P_l(1)=1$ を用いると (9.82) となる)．

[部分波の幾何学的な意味]

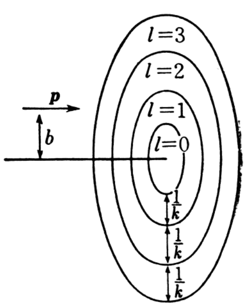
散乱，反応を角運動量の固有状態に分解して考えることを **部分波**(**partial wave**)に分けるといい，角運動量が l の状態を **l-波** (**l-th partial wave**) と呼ぶ．断面積のうち l-波による部分を σ_l と書くことにすると，

$$\sigma_{el,l} = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)|1-S_l|^2 \leq \frac{4\pi}{k^2}(2l+1), \tag{9.84}$$

$$\sigma_{r,l} = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)(1-|S_l|^2) \leq \frac{\pi}{k^2}(2l+1) \tag{9.85}$$

の関係があり，l-波の断面積には上限がある．この意味を考えてみよう．(9.55) を見ると平面波には角運動量 l の状態が $2l+1$ に比例する確率で含まれていることがわかるが，これは次のような幾何学的考察の結果と一致する．運動量 $\boldsymbol{p}$ の粒子が力の中心から b だけ離れた直線に沿って入射するとき（この b のことを **衝突径数** (**impact parameter**) という），古典力学によればこの粒子の持つ角運動量の大きさは bp で与えられる．そこ

で入射粒子の進行方向に垂直に半径が $1/k, 2/k, 3/k, \cdots$ の同心円を書いてみると（9-5 図），一番内の円を通過する粒子の衝突径数は $1/k$ 以下，第一番目の環を通過する粒子の衝突径数は $1/k<b<2/k$，第 l 番目の環では $l/k<b<(l+1)/k$ である．したがって第 l 番目の環を通過する粒子は角運動量が $\hbar l$ から $\hbar(l+1)$ の間にある．これは古典力学の結果だが，量子力学では角運動量は $\hbar$ の整数倍だけの値に量子化される．そこで第 l 番目の環を通過する粒子は $\hbar l$ の角運動量を持つとしてみよう．この環の面積は $\pi(2l+1)/k^2$ で，粒子が一様の密度で入射するとき，この環を通過する確率は $2l+1$ に比例する．すなわち一様に入射する粒子が $\hbar l$ の角運動量を持つ確率は $2l+1$ に比例し，これが上に述べたことである．



9-5 図

粒子が単位面積に 1 個の割合いで入射するとき，第 l 番目の環にあたる確率，すなわち角運動量が l である確率は $\pi(2l+1)/k^2$ である．この粒子が全部反応を起こしたとしたとき，この反応の断面積は，

$$\max \sigma_{r,l}=\frac{\pi}{k^2}(2l+1) \tag{9.86}$$

である．全部が反応することはないから，一般には l-波の反応断面積はこれより小さく，(9.85) の不等号となる．弾性散乱の断面積の上限はこの幾何学的上限の 4 倍になっているが，これは (9.57), (9.58) のように散乱波は $|S_l|(\leq 1)$ の振幅の外向きの波と元々入射平面波に含まれる 1 の振幅の外向きの波との差で，この干渉で最大 4 の因子を生ずるためである．

散乱，反応を生ぜしめる力の作用が有限の距離 R までしかとどかないとしよう．素粒子の間に働く力は Coulomb 力を除いてはみな有限の到達距離をもっていると思われている．このときは衝突径数 b が R より小さいときは反応が起こるが，b が R より大きいと力が働かないので何も起こらない．部分波でいうと角運動量 l の粒子の衝突径数は l/k であるから，

$$l_{\max}=kR \tag{9.87}$$

より小さい l の波は散乱，反応を起こすが，$l>l_{\max}$ の波の散乱は非常に小さい．したがって，$l<l_{\max}$ の波だけを問題にすればよいことになる．部分波分解の有利な点は，このように k が $1/R$ にくらべて小さい低エネルギーの散乱では l の小さい少数の部分

波だけで話が片づくことである．$l=0,1,2,3,\cdots$ の波をそれぞれ S-波，P-波，D-波 F-波，$\cdots$ と呼ぶ．ごく低エネルギーでは S-波のみが散乱され，散乱波は球対称である．エネルギーが高くなって $k\sim 1/R$ 程度となると P-波散乱の寄与が生ずるようになる．$k\gtrsim 2/R$ となると D-波以上も問題となる．核子の相互作用の到達距離は π 中間子のCompton 波長 $=1.4\times10^{-13}$ cm 程度と考えられる．π 中間子が陽子で散乱される場合，運動量が 140 MeV/c 以下なら主に S-波散乱，280 MeV 程度までなら S と P-波散乱だけが起こることになる．実験結果はこの結果とよく合っている（§ 10.4).

運動量が小さいときに散乱振幅と運動量の大きさの間に成り立つ比例関係について述べよう．$l>l_{\max}=kR$ のときは古典力学的な考察では粒子は力の場に触れないが，量子力学的な l-波はわずかながら力の影響をうける．平面波に含まれる l-波は (9.49) により $j_l(kr)$ に比例するが，これは $r<R$ で0ではなく (9.53) より，

$$j_l(kr)\propto(kr)^l,\quad kr\ll 1 \tag{9.88}$$

である．したがって l-波が感ずる力の強さは k が変るとき k^l に比例する．もう少しくわしくいってこの力の場によって粒子が放出あるいは吸収される行列要素が，

$$M=\int\varphi(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$

と書かれるとしよう．φ は粒子の生成，吸収をする場の量，ρ は力の場の拡がりを表わす関数で $r>R$ なら ρ は0である．φ が波数 $\boldsymbol{k}$ の l-波の粒子を吸収あるいは放出するときの M は $\varphi(\boldsymbol{r})\propto j_l(kr)$ より，

$$M\propto k^l,\quad k\ll\frac{1}{R} \tag{9.89}$$

である．特に散乱のときは粒子が吸収され次に放出されるので，l-波の散乱振幅 f_l は k^{2l} に比例する．(9.73) により l-波の位相のずれは低エネルギーで，

$$\delta_l\propto kf_l\propto k^{2l+1},\quad k\ll\frac{1}{R} \tag{9.90}$$

の比例関係がある．(δ_l は小さいので $\sin\delta_l=\delta_l$ としてよい).

［スピンのあるときの散乱］

粒子のスピンが問題となるときは，状態はエネルギーと軌道角運動量の他に，スピンの向きを表わす変数が必要になる．例としてスピン 1/2 の粒子が力の場で散乱されるとしよう．これは核子と π 中間子の散乱の場合にそのまま使える．波動関数は位置 $\boldsymbol{r}$ とスピン変数 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ で表わされる．このとき軌道角運動量とスピン角運動量の和の全角運動量，

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{S}$$

は保存量であるから，J^2, J_z の固有状態をとることにする．軌道角運動量 l の状態からはスピンが $\boldsymbol{M}$ に平行か反平行かに相当して $J=l+1/2$, $J=l-1/2$ の固有状態がある．

逆に J を決めたときには $l=J-1/2$ と $l=J+1/2$ の 2 個の固有状態があるが，この二つはパリティが逆なので散乱の前後で入りまじることはない（パリティは保存するとした）．したがって J とパリティで状態を指定すると S－行列は完全に対角化され，この場合も実数の位相のずれ δ_{J+}, δ_{J-} で散乱が書き表わされる．具体的な例は § 10.4 に述べる．

〔問題 9.4〕 核子核子散乱で力の到達距離が 1.4×10^{-13} cm のとき，S－波だけの散乱としてよいのはどのくらいのエネルギーまでか．

〔問題 9.5〕 l 波の断面積 $\sigma_{el,l}$, $\sigma_{tot,l}$ の間に，つぎの不等式が成り立つことを示せ．

$$\sigma_{tot,l}{}^2 \leq \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sigma_{el,l}.$$

この式から弾性散乱が 0 で非弾性反応のみが起こるは不可能であることがわかる．

§ 9.3 素粒子の相互作用

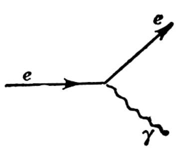
素粒子間のいろいろの反応の起こる確率を求めるには S－行列要素がわかればよいが，その行列要素を実際に計算するには相互作用の Hamiltonian H' がどのような形をしているかを知る必要がある．実験により，われわれは π 中間子が核子によって散乱され，反陽子が高エネルギーの衝突によってつくられたりするのを知っている．相互作用 H' はこのように自由な粒子に変化を起こし，粒子の数を増したり，あるいは減らしたりするものでなければならない．

まず，光子と電子の相互作用を考えてみよう．これは前章で調べたようにゲージ不変性から要求される minimal な相互作用として，

$$H'=e\int\psi^\dagger((\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A})-A_0)\psi\,d\boldsymbol{r}=e\int\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu d\boldsymbol{r} \qquad (9.91)$$

の Hamiltonian をとった．（量子化された場は太い $\boldsymbol{\psi}$ で書くべきであるが，間違える恐れがないので今後細い ψ を使うことにする）．この相互作用は電子が消えて他の状態の電子と 1 個の光子が作られるという過程とその逆過程を与える．

$$e\leftrightarrow e+\gamma.$$



9－6 図

これは 9－6 図で表わされる．H' はこのような遷移に対する行列要素を持っている．電荷 e はその行列要素の大きさ，すなわち相互作用の強さを表わす結合定数であり，その値は (8.35)

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\approx\frac{1}{137} \qquad (9.92)$$

であった．また H' は光子が電子，陽電子対になるという過程

$$\gamma\leftrightarrow e^-+e^+$$

も含んでいる．この相互作用により光の放出，散乱，電子対の生成等光子を含む反応がよく説明された．中間子，核子等に対しても荷電粒子と電磁場との相互作用は minimal な相互作用で与えられると考えられる．

電磁的相互作用の場合は古典電磁気学が存在し，またゲージ不変性という原理があってそれが相互作用 Hamiltonian を決める手掛りとなった．しかし中間子その他の粒子についてはそのようなものはないので，いまの所適当な形の相互作用を仮定して，それが実際の現象を説明するのにつごうがよいかどうかを調べてみることになる．そこで (9.91) を手本にして素粒子間の相互作用 Hamiltonian をつくってみよう．その際に H' が満足しなければならない条件は，

1）エルミット演算子であること．これは確率が保存し，S－行列がユニタリーとなるために必要である (219 ページ参照)．

2）不変性あるいは保存則をみたすこと．空間が一様であり方向性がないのだから，H' は座標系の平行移動，回転に対して不変でなければならない．そのときは運動量，角運動量が保存される．また H' は荷電，重粒子数等よく知られた保存量を保存することが必要である．

この二つの条件はぜひ必要であるが，これだけではあまりにも制限がゆるすぎて何も決められないので (9.91) の形から類推して次の要求をおく．

3）相互作用 Hamiltonian は，

$$H'=\int H(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \tag{9.93}$$

という形をしている．相互作用密度 $H(\boldsymbol{r})$ は点 $\boldsymbol{r}$ における場の量をいくつか掛け合わせたもので，空間回転で不変だけでなく Lorentz 変換に対しても不変のことを要求する．

$$H(\boldsymbol{r})=A(\boldsymbol{r})B(\boldsymbol{r})\cdots C(\boldsymbol{r}). \tag{9.94}$$

A, B 等は中間子場，Fermi 粒子の場などである．(9.93) 以外に，

$$H'=\int\int\cdots\int A(\boldsymbol{r}_1)B(\boldsymbol{r}_2)\cdots f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots)d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\cdots \tag{9.95}$$

($f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots)$ は演算子でなくただの関数) という形も考えられないことはない．しかしこれだと，ある時刻に粒子 A が点 $\boldsymbol{r}_1$ で消え，別の点 $\boldsymbol{r}_2$ で粒子 B が作られることになり，有限だけ離れた2点の間を運動量，荷電等が瞬間的に伝わるのは因果律を破るので採用しないことにする．(9.93)，(9.94) では，ある点で粒子が消え同じ点で他の粒子が作られる．このような相互作用を**局所的** (**local**) であるといい，(9.95) を**非局所的相互作用** (**non-local interaction**) という．

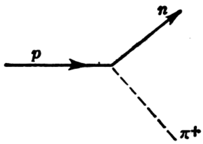
〔湯川型の相互作用〕

陽子，中性子，荷電中間子の間の相互作用は，それぞれの場 $\psi_p(\boldsymbol{r})$, $\psi_n(\boldsymbol{r})$, $\varphi(\boldsymbol{r})$ を含むものである．光子と電子の場合から類推すれば，

$$p \to \pi^+ + n$$

という素過程が考えられる（9－7 図）．このためには

$$f\bar{\psi}_n(\boldsymbol{r})\psi_p(\boldsymbol{r})\varphi^\dagger(\boldsymbol{r})$$



9－7 図

という Hamiltonian 密度を与えればよい．ψ_p, ψ_n, φ はそれぞれ陽子，中性子，中間子の場である．$\varphi^\dagger$ は荷電を1だけ増す作用があり，ψ_p は 1 だけ減らすから，荷電の保存は成り立っている．エルミット演算子にするために，上のエルミット共役量を加えて

$$H' = f\int\bar{\psi}_n(\boldsymbol{r})\psi_p(\boldsymbol{r})\varphi^\dagger(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} + f\int\bar{\psi}_p(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \qquad (9.96)$$

という相互作用を仮定しよう．f は実数で力の強さを示す．右辺の第一項は，

$$p \to \pi^+ + n, \quad p + \pi^- \to n$$

という素過程を与え，第二項はこの逆過程，

$$n \to p + \pi^-, \quad n + \pi^+ \to p$$

を与える．また (9.96) には，

$$\pi^+ \leftrightarrow p + \bar{n}, \quad \pi^- \leftrightarrow n + \bar{p}$$

の過程も含まれる．$\bar{p}$, $\bar{n}$ はそれぞれ反陽子，反中性子である．

この他に荷電を持たない中性 π 中間子も存在し，核子と相互作用することがわかっている．中性中間子の場を $\varphi_0(x)$ として，

$$H' = f'\int\bar{\psi}_p(\boldsymbol{r})\psi_p(\boldsymbol{r})\varphi_0(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} + f''\int\bar{\psi}_n(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r})\varphi_0(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \qquad (9.97)$$

の相互作用をつくると，これは，

$$p \leftrightarrow p + \pi^0, \quad n \leftrightarrow n + \pi^0, \quad \pi^0 \leftrightarrow p + \bar{p}, \quad \pi^0 \leftrightarrow n + \bar{n}$$

の過程を起こす．f' と f'' は異なるとしてもエルミット性には反しない．(9.96) と (9.97) を合わせたものが π 中間子と核子間の湯川の相互作用である．一般に Fermi 粒子の ψ, $\bar{\psi}$ と Bose 粒子 φ の積で作られている相互作用を**湯川型**という．

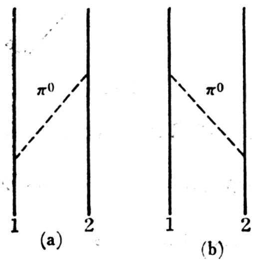
湯川の Hamiltonian は π 中間子と核子の関係するいろいろの現象を少くとも定性的にはよく説明する．ここでは例題として核力と，π 中間子の核子による散乱がどのようにして生ずるかを調べてみよう．

〔核　力〕

2個の陽子が $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ に静止しているとする．中間子はもちろん存在しない．この状態を u_0 とし，Hamiltonian H' によってこの状態のエネルギーがどれだけ変化するかを摂動論で計算する．まず H' について1次の項は0である．

$$W_1 = \langle 0|H'|0\rangle = 0.$$

それは H' は中間子を一個作るか消すかという働きをするので，一個も存在しない状態から一個も存在しない状態への行列要素は0である．しかし陽子1が中性 π 中間子を放出し，それが陽子2に吸収されるという 2 次の過程によるエネルギーの ずれが存在する（9-8 図（a））．



9-8 図　π^0 の交換による核力

運動量 $\boldsymbol{p}$ の中性 π 中間子が存在する状態を $|\boldsymbol{p}\rangle$ と書いて，陽子1が中間子を放出する行列要素，

$$\langle \boldsymbol{p}|H'|0\rangle = \langle \boldsymbol{p}|f'\int \bar{\psi}_p(\boldsymbol{r})\psi_p(\boldsymbol{r})\varphi_0(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}|0\rangle \tag{9.98}$$

を求める．$\psi_p(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ にある陽子を消して $\bar{\psi}_p(\boldsymbol{r})$ が再び同じ場所に陽子を作るのだが，$\boldsymbol{r}$ がちょうど $\boldsymbol{r}_1$ のときだけその作用がある．したがって $\bar{\psi}_p(\boldsymbol{r})\psi_p(\boldsymbol{r})$ は $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)$ としてよい．$\langle \boldsymbol{p}|\varphi_0(\boldsymbol{r})|0\rangle$ は（6.82）で与えられるから，

$$\langle \boldsymbol{p}|H'|0\rangle = \frac{f'\hbar c}{\sqrt{2EL^3}}e^{-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}_1/\hbar}$$

である．ただし E は中間子のエネルギーで，中間子の質量を μ と書くならば，

$$E = \sqrt{p^2c^2 + \mu^2c^4}$$

である．同様にしてこの中間子が核子2に吸われるときの行列要素は，

$$\langle 0|H'|\boldsymbol{p}\rangle = \frac{f'\hbar c}{\sqrt{2EL^3}}e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}_2/\hbar}$$

である．中間状態のエネルギーは E だけ初めの状態のエネルギーより大きいので（陽子は中間子にくらべて非常に重いので中間子を放出してもほとんど静止しており，そのエネルギーは変らないと近似してよい）

$$W_2 = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{\langle 0|H'|\boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{p}|H'|0\rangle}{-E} = -\sum_{\boldsymbol{p}} \frac{(f'\hbar c)^2}{2EL^3}\frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)/\hbar}}{E}.$$

この他に陽子2が先に中間子を出し，陽子1がこれを吸うという過程があり（9-8 図（b））これは運動量 $\boldsymbol{p}$ の符号を逆にとれば上式とまったく同じ式になる．これを加えて，$\boldsymbol{p}$ についての和を積分におきかえると，エネルギーの変化は，

$$W=-\frac{(f'\hbar c)^2}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}/\hbar}}{\boldsymbol{p}^2c^2+\mu^2c^4}d\boldsymbol{p}=-\frac{f'^2}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{k}^2+(1/\lambda)^2}d\boldsymbol{k}. \tag{9.99}$$

ただし，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}/\hbar$，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$，$\lambda$ は π 中間子の Compton 波長 $\hbar/\mu c$ である．$\boldsymbol{k}$ についての積分を極座標を用いて計算すると，

$$W=-\frac{f'^2}{4\pi}\frac{e^{-r/\lambda}}{r}=-\frac{f'^2}{4\pi\hbar c}\mu c^2\frac{e^{-r/\lambda}}{r/\lambda},\quad r=|\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|. \tag{9.100}$$

このように2個の陽子間の距離 r に関係するエネルギーが生じ，これが2陽子間のポテンシャルを与える．上の形は**湯川ポテンシャル**と呼ばれるもので，r が λ より大きくなると急に小さくなりほとんど0となる．すなわち到達距離が $\lambda=1.4\times10^{-13}$ cm の核力である．結合の強さ f' を，

$$\frac{f'^2}{4\pi\hbar c}\approx0.3 \tag{9.101}$$

の程度にとると実験で要求される程度の核力となる（問題 2.3 参照）．

(9.100) に現われる関数 $Y(r)=e^{-r/\lambda}/r$ は，

$$\left(\Delta-\frac{1}{\lambda^2}\right)Y=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{9.102}$$

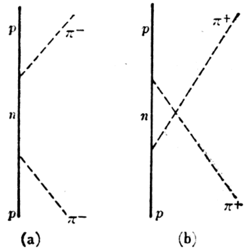
という方程式の，球対称で無限遠で0になる解である．湯川ポテンシャルは $\boldsymbol{r}_1$ にある δ-関数形の源によって作られた中間子場 $Y(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{r}_2$ の陽子との相互作用として求めることができる．

[π 中間子の散乱]

中間子と陽子の散乱は次のような2段階の過程で起こる（9-9 図）．

$$\pi^-+p\to n\to\pi^-+p, \tag{a}$$

$$\pi^++p\to\pi^++\pi^++n\to\pi^++p. \tag{b}$$



9-9 図　陽子と π 中間子の散乱

入射粒子の運動量を $\boldsymbol{p}$，出ていく粒子のを $\boldsymbol{p}'$ とし，核子は原点に止っているとすれば，π^-p 散乱の行列要素は前と同様，

$$\langle n|H'|\boldsymbol{p},p\rangle=\frac{f\hbar c}{\sqrt{2EL^3}},$$

$$\langle\boldsymbol{p}',p|H'|n\rangle=\frac{f\hbar c}{\sqrt{2E'L^3}}.$$

E' は $\sqrt{\boldsymbol{p}'^2c^2+\mu^2c^4}$ である．$p,p'\ll Mc$ として（実際は p は Mc にくらべて非常に小さいとはいえないが，ここでは大体の見当をつけるための計算であるから，このように

近似して計算を簡単にする）核子の運動エネルギーを無視すればエネルギーの保存から $E=E'$ となる．中間状態のエネルギーの差は E であり（9.17）から，

$$\langle \boldsymbol{p}', p|T|\boldsymbol{p}, p\rangle = \frac{\langle \boldsymbol{p}', p|H'|n\rangle\langle n|H'|\boldsymbol{p}, p\rangle}{E} = \frac{(f\hbar c)^2}{2E^2L^3}.$$

終状態の密度 ρ は，

$$\rho(E) = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \frac{pE}{c^2} d\Omega$$

で与えられる．$d\Omega$ 方向に散乱される微分断面積は（9.18），（9.19）より，

$$d\sigma = \frac{L^3}{v}\frac{2\pi}{\hbar}\frac{(f\hbar c)^4}{4E^4L^6}\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3\frac{pE}{c^2}d\Omega = \left(\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\right)^2 \lambda^2 \left(\frac{\mu c^2}{E}\right)^2 d\Omega. \tag{9.103}$$

ただし，$v=c^2p/E$ である．π^+p 散乱についても同じ式が得られる．全断面積は，

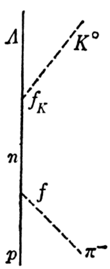
$$\sigma = \int d\sigma = 4\pi\left(\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\right)^2 \lambda^2 \left(\frac{\mu c^2}{E}\right)^2. \tag{9.104}$$

E が $2\mu c^2$，すなわち π 中間子の運動エネルギーが 140 MeV のとき，

$$f^2/4\pi\hbar c \approx 1 \tag{9.105}$$

の程度とすると全断面積は $\sigma \approx \pi\lambda^2 \approx 60\,\mathrm{mb}$ となる．実験の結果によると大体その程度の大きさであるが，くわしくいえば 10-8 図に見られるように断面積はエネルギーにしたがって大きく変化し，また π^-p 散乱は π^+p 散乱にくらべて非常に小さい．上に述べた議論はだいたいの大きさの評価をすることはできるが，実際問題に応用するには(9.96)，(9.97) の Hamiltonian では不充分であり（(10.60) 参照），また結合定数（9.105）が大きいので計算法も単なる摂動論より精密なものを用いなければならない．これは次の章で論ずる．

［ハイパロンと K 粒子］



9-10 図 Λ 粒子の生成

π 中間子と陽子の衝突により K 中間子と Λ 粒子が作られる反応は，

$$\pi^- + p \to n \to K^0 + \Lambda$$

という二段階の過程で起こると考えよう．そのためには，

$$n \to K^0 + \Lambda$$

という素過程が必要で，

$$H' = f_K\left[\int \bar{\psi}_\Lambda \psi_n \varphi_{K^0}{}^\dagger d\boldsymbol{r} + \int \bar{\psi}_n \psi_\Lambda \varphi_{K^0}\, d\boldsymbol{r}\right] \tag{9.106}$$

という Hamiltonian を与えればよい．K^0 は電気的には中性だが反粒子 $\bar{K}^0$ は別の粒子なので，複素数の場 φ_{K_0} が必要である．（9.106）は，

$$n \leftrightarrow K^0 + \Lambda, \quad \Lambda \leftrightarrow \bar{K}^0 + n$$

等の素過程を与える.

この反応の断面積は πp 散乱とまったく同様にして求められる. K_0 のエネルギーを E', 運動量を $\boldsymbol{p}'$ として,

$$\langle K_0, \Lambda | H' | n \rangle = \frac{f_K \hbar c}{\sqrt{2E'L^3}}.$$

終状態密度は,

$$\rho(E) = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \frac{p'E'}{c^2} d\Omega.$$

入射 π^- のエネルギー, 運動量を $E, \boldsymbol{p}$ とすれば, エネルギーの保存則により $E = E' + (M_\Lambda - M_N)c^2$ で, 全断面積は,

$$\sigma = 4\pi\left(\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\right)\left(\frac{f_K{}^2}{4\pi\hbar c}\right)\lambda^2\left(\frac{\mu c^2}{E}\right)^2 \frac{p'}{p}. \tag{9.107}$$

$E = 8\mu c^2$ では実験値は 0.5 mb 程度で, これに合わせるには,

$$\frac{f^2{}_K}{4\pi\hbar c} \approx 1 \tag{9.108}$$

の程度にとればよい. (9.101), (9.105), (9.108) に見られるように, これらの結合定数はいずれも 1 の程度の大きさで, 光子の結合定数 $e^2/4\pi\hbar c = 1/137$ に比較して百倍も大きな値である.

〔崩壊の相互作用〕

Λ 粒子は不安定粒子であって, 他からの力を受けなくても自然に崩壊して核子と π 中間子になってしまう.

$$\Lambda \to p + \pi^-.$$

これは前に導入した (9.96), (9.106) の相互作用からは導けないものなので, 新しい相互作用として与えなければならない.

$$H' = g_\Lambda\left[\int \bar{\psi}_p \psi_\Lambda \varphi d\boldsymbol{r} + \int \bar{\psi}_\Lambda \psi_p \varphi^\dagger d\boldsymbol{r}\right]. \tag{9.109}$$

この結合定数 g_Λ の大きさの程度を求めてみよう. Λ 粒子の崩壊のときの Q-値は 37 MeV で, π 中間子の運動量 p は約 100 MeV/c である. 行列要素は,

$$\langle p\pi^- | H' | \Lambda \rangle = \frac{g_\Lambda \hbar c}{\sqrt{2EL^3}}.$$

単位時間当りの崩壊確率は,

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{(g_\Lambda \hbar c)^2}{2EL^3}\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \frac{pE}{c^2}\int d\Omega = \frac{g_\Lambda{}^2}{4\pi\hbar c}\frac{2pc}{\hbar} = \frac{g_\Lambda{}^2}{4\pi\hbar c} \times 3 \times 10^{23}\mathrm{sec}^{-1}.$$

実験によると Λ 崩壊 $\Lambda \to p + \pi^-$ の起こる確率は,

$$w = 2.6 \times 10^9\,\mathrm{sec}^{-1}. \quad (\text{実験})$$

これを比較すると，

$$\frac{g_\Lambda{}^2}{4\pi\hbar c} \approx 10^{-14} \tag{9.110}$$

という非常に小さい量となる．

荷電 π 中間子も不安定で μ 中間子とニュートリノに崩壊する．たとえば，

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}.$$

これを起こす相互作用は，

$$H' = g_\pi\left[\int \bar{\psi}_\mu \psi_\nu \varphi^\dagger d\boldsymbol{r} + \int \bar{\psi}_\nu \psi_\mu \varphi d\boldsymbol{r}\right]. \tag{9.111}$$

これの崩壊確率を求めて（251 ページ），実験値の $w = 4 \times 10^7\mathrm{sec}^{-1}$ に合わせるためには，

$$\frac{g_\pi{}^2}{4\pi\hbar c} \approx 10^{-15} \tag{9.112}$$

の程度で，やはり非常に小さい．ここでの崩壊の計算は相互作用の強さの程度を評価するためのもので，くわしい議論は第 12 章で述べる．

[Fermi 型の相互作用]

以上述べた反応の他に 4 個の Fermi 粒子が関係するものがある．すなわち β - 崩壊でたとえば中性子は陽子，電子，ニュートリノに崩壊する．

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}.$$

また μ 中間子も不安定で崩壊する．

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu} + \nu, \quad \mu^+ \to e^+ + \nu + \bar{\nu}.$$

負の μ 中間子は陽子に吸収されてニュートリノに変化する．

$$\mu^- + p \to n + \nu.$$

これらの反応が直接の過程で起こるとするならば，それぞれ次のような相互作用が必要である．

$$H' = g_{F1}\left[\int (\bar{\psi}_p \psi_n)(\bar{\psi}_e \psi_\nu) d\boldsymbol{r} + \int (\bar{\psi}_n \psi_p)(\bar{\psi}_\nu \psi_e) d\boldsymbol{r}\right], \tag{9.113}$$

$$H' = g_{F2}\left[\int (\bar{\psi}_e \psi_\nu)(\bar{\psi}_\nu \psi_\mu) d\boldsymbol{r} + \int (\bar{\psi}_\nu \psi_e)(\bar{\psi}_\mu \psi_\nu) d\boldsymbol{r}\right], \tag{9.114}$$

$$H' = g_{F3}\left[\int (\bar{\psi}_n \psi_p)(\bar{\psi}_\nu \psi_\mu) d\boldsymbol{r} + \int (\bar{\psi}_p \psi_n)(\bar{\psi}_\mu \psi_\nu) d\boldsymbol{r}\right]. \tag{9.115}$$

これらの相互作用によると，上記の反応以外にも次のような反応が起こるはずである．

$$\bar{\nu}+p \to n+e^+,$$
$$\nu+n \to p+e^-,$$
$$\bar{\nu}+p \to n+\mu^+,$$
$$\nu+n \to p+\mu^-.$$

これらはいずれも実験で観測されている．(9.113)～(9.115) のように4個の Fermi 粒子の結合で作られている相互作用を **Fermi 型**という．実験と比較して結合定数 g_F を求めてみると g_{F1}, g_{F2}, g_{F3} はほとんど同じ大きさで，

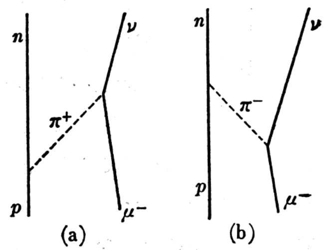
$$g_F \approx 10^{-49}\,\text{gram cm}^5\ \text{sec}^{-2} \tag{9.116}$$

という値である．

Fermi の結合定数は湯川型の結合定数と次元が異なるので，そのままでは大きさの大小を比較することができない．しかし次のように考えてみよう．$\mu^- + p \to n+\nu$ は(9.96)(9.111) の相互作用から，

$$p+\mu^- \begin{cases} \nearrow n+\pi^+ +\mu^- \searrow \\ \searrow p+\pi^- +\nu \nearrow \end{cases} n+\nu$$

という 2 段階の過程で起こり得る (9-11 図)．まず，9-11 図 (a) の遷移行列要素を求めるのに，



9-11 図

$$\langle n,\ \pi^+|H'|p\rangle = \frac{f\hbar c}{\sqrt{2EL^3}},$$

$$\langle \nu|H'|\mu^-,\pi^+\rangle = \frac{g_\pi \hbar c}{\sqrt{2EL^3}}\int[\bar{\psi}_\nu(\boldsymbol{r})\psi_\mu(\boldsymbol{r})]e^{-\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}/\hbar}d\boldsymbol{r} = \sqrt{\frac{1}{2EL^3}}g_\pi\hbar c(\bar{u}_\nu u_\mu).$$

ここで $\boldsymbol{p}$ は π^+ の運動量 (＝ν の運動量 －μ^- の運動量)，u_μ, u_ν は μ^-, ν の状態を表わす4成分スピノルである．エネルギー分母は －E (E は π^+ のエネルギー) であるが運動量は小さいとして無視すれば $E=\mu c^2$．したがって，

$$\langle n,\ \nu|T_a|p,\ \mu^-\rangle = -\frac{fg_\pi\hbar^2}{2\mu^2c^2L^3}(\bar{u}_\nu u_\mu).$$

(b) についても同じ大きさであり (a), (b) 両過程による和は，

$$\langle n,\ \nu|T|p,\ \mu^-\rangle = -\frac{fg_\pi\hbar^2}{\mu^2c^2L^3}(\bar{u}_\nu u_\mu). \tag{9.117}$$

一方，(9.115) という直接の相互作用があったならば遷移行列は，

$$\langle n,\ \nu|T|p,\ \mu^-\rangle = \frac{g_{F3}}{L^3}(\bar{u}_\nu u_\mu) \tag{9.118}$$

である．f, g_π, g_F に (9.105), (9.112), (9.116) の値を入れてみると，(9.117) は (9.118)

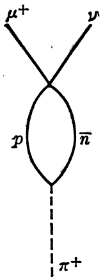
とほとんど等しいことがわかる.

逆に π 中間子の崩壊を (9.96) と (9.115) から起こさせることもできる. (9.96) は反核子を作る過程,

$$\pi^+ \rightarrow p + \bar{n}$$

を含み, (9.115) は, この核子, 反核子の対を消すことができるので,

$$\pi^+ \rightarrow p + \bar{n} \rightarrow \mu^+ + \nu$$



9 - 12 図

という過程が可能である (9 - 12 図). これから g_π の大きさを g_{F_3} をつかって出すこともできる. これらのことから (9.111) と (9.115) の相互作用はどちらも同じ程度に弱いということができる.

いままでの相互作用を眺めてみると, 結合の強さに関して, かなりはっきりした三つの組に分類できることがわかる. 第1は (9.96), (9.97) (9.106) で与えられるような中間子と重粒子の相互作用で, その結合定数は1の程度である. 第2は電磁的相互作用で結合定数は 1/137. 第3はニュートリノの関係している Fermi 型の相互作用および崩壊の際の相互作用で結合定数は $10^{-14} \sim 10^{-15}$ の程度である. 素粒子の現象を説明するのに必要と思われる相互作用はすべてこのどれかの組に分類され, 中間に位するような強さのものはみつかっていない. 第1のものを**強い相互作用**, 第2を**電磁的相互作用**, 第3のを**弱い相互作用**という. ニュートリノは弱い相互作用しか持たない. 電子, μ 中間子等の軽粒子は電磁的相互作用はするが, 強い相互作用は有しない. π 中間子, K 中間子, 重粒子は全種の相互作用を持つ.

この他にもっと弱い相互作用として万有引力 (重力) があるが, 非常に弱くて素粒子の現象では問題にならないので考えないことにする.

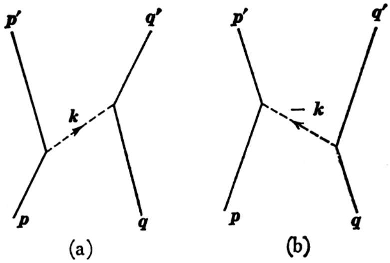
前に述べたように π の崩壊の相互作用と Fermi 型の相互作用は, 一方が他から導かれるので両方必要ではないかもしれない. どちらがより基本的なもので, どちらがそれから導かれるものを区別することはかなり困難なことであるが, Fermi 型の方が基本的なもので, (9.111) はそれから導かれるものと考えられている (第12章参照).

〔問題 9.6〕 (9.106) の相互作用による $\bar{K}^0$ と中性子の散乱断面積を摂動論で求めよ. エネルギーが0のときの全断面積は何 mb か.

〔問題 9.7〕 荷電 π 中間子のみが存在するとき ($f'=0$ のとき) は陽子 - 陽子間の力は2個の π 中間子を交換して始めて生ずる. この f^4 に比例するポテンシャルを求めよ (計算は多少複雑である).

§ 9.4 遷移行列要素の求め方

相互作用 Hamiltonian H' が与えられたならば遷移行列は (9.17) の公式で求められる．この際に中間状態についての和をうまく集めると簡単な形にまとめられることがわかるので，この節ではそのまとまった形をただちに書き表わす公式を求めよう．



9−13 図

運動量 $\boldsymbol{p}$ の陽子と運動量 $\boldsymbol{q}$ の中性子が (9.97) の相互作用により π^0 中間子を交換して散乱し，運動量 $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{q}'$ となる遷移行列を計算する．これには 9−13 図のような二つの中間状態が考えられる．第1はまず陽子が運動量 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'$ の π^0 を出し，中性子がそれを吸うという過程で，最初の π^0 を出す過程の行列要素は (9.97) に (6.77), (7.53) (7.54) を入れて得られる．

$$\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}'|H'|\boldsymbol{p}\rangle = f'\hbar c\sqrt{\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}L^3}}(\bar{u}(\boldsymbol{p}')u(\boldsymbol{p}))\frac{1}{L^3}\int e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k})\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r}$$

$$= f'\hbar c\sqrt{\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}L^3}}(\bar{u}(\boldsymbol{p}')u(\boldsymbol{p}))\delta_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k},0}.$$

$E_{\boldsymbol{k}}$ は π^0 のエネルギーで，$u(\boldsymbol{p})$, $u(\boldsymbol{p}')$ はそれぞれ陽子 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$ の 4 成分スピノルである．同様にして π^0 が吸われるときの行列要素は，

$$\langle \boldsymbol{q}'|H'|\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}\rangle = f''\hbar c\sqrt{\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}L^3}}(\bar{u}(\boldsymbol{q}')u(\boldsymbol{q}))\delta_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'+\boldsymbol{k},0}.$$

陽子のエネルギーを $E(\boldsymbol{p})$, $E(\boldsymbol{p}')$ と書くと，遷移行列は，

$$\langle \boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}'|T_a|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\langle \boldsymbol{q}'|H'|\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}\rangle\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}'|H'|\boldsymbol{p}\rangle}{E(\boldsymbol{p})-E(\boldsymbol{p}')-E_{\boldsymbol{k}}}$$

$$= \delta_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}'}\frac{f'f''\hbar^2c^2}{2E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}L^3}\frac{(\bar{u}(\boldsymbol{p}')u(\boldsymbol{p}))(\bar{u}(\boldsymbol{q}')u(\boldsymbol{q}))}{E(\boldsymbol{p})-E(\boldsymbol{p}')-E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}}.$$

同様に 9−13 図 (b) に相当する行列要素は，

$$\langle \boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}'|T_b|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\rangle = \delta_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}'}\frac{f'f''\hbar^2c^2}{2E_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'}L^3}\frac{(\bar{u}(\boldsymbol{p}')u(\boldsymbol{p}))(\bar{u}(\boldsymbol{q}')u(\boldsymbol{q}))}{E(\boldsymbol{q})-E(\boldsymbol{q}')-E_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'}}.$$

この二つの項の和は共通な因子は除いて，

$$\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}}\frac{1}{E(\boldsymbol{p})-E(\boldsymbol{p}')-E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}}+\frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'}}\frac{1}{E(\boldsymbol{q})-E(\boldsymbol{q}')-E_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'}}$$

$$= \frac{1}{(E(\boldsymbol{p})-E(\boldsymbol{p}'))^2-E_{\boldsymbol{k}}{}^2}. \qquad (9.119)$$

運動量の保存から，

$$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k},\quad E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}=E_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'}=E_{\boldsymbol{k}}$$

であり，エネルギーの保存から，

$$E(\boldsymbol{p})-E(\boldsymbol{p}')=E(\boldsymbol{q}')-E(\boldsymbol{q})$$

の関係があることをつかった．陽子のエネルギーは，

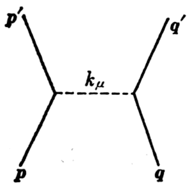
$$E(\boldsymbol{p})-E(\boldsymbol{p}')=ck_0$$

だけ減り，その分だけ中性子のエネルギーが増えたことになる．ck_0, $\boldsymbol{k}$ は π^0 が陽子から中性子に運ぶエネルギー，運動量で，($\boldsymbol{k}$, k_0) は4次元ベクトルである．これを k_μ と書くと (9.119) の分母は，

$$c^2k_0^2-E_{\boldsymbol{k}}^2=c^2k_0^2-(c^2\boldsymbol{k}^2+\mu^2c^4)=-c^2k_\mu^2-\mu^2c^4.$$

ただし，k_μ^2 は4次元的長さである．したがって全体の遷移行列は，

$$\langle \boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}'|T|\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\rangle=-\delta_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}'}\frac{f'f''}{L^3}(\bar{u}(\boldsymbol{p}')u(\boldsymbol{p}))(\bar{u}(\boldsymbol{q}')u(\boldsymbol{q}))\frac{\hbar^2c^2}{c^2k_\mu^2+\mu^2c^4}\quad(9.120)$$



9-14 図

という形になる．このように 9-13 図の二つの過程の和はうまくまとめられるので，(a)，(b) と二つの図を書く必要はなく，9-14 図の図を一つ書けばよい．このようにまとめられるのは第8章で既に見たことである（8-14 図および 8-23 図）．(9.120) の結果によれば π_0 が交換されるとき，それは遷移行列に，

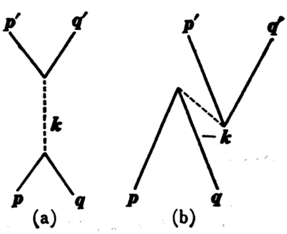
$$-\frac{\hbar^2c^2}{c^2k_\mu^2+\mu^2c^4}$$

の因子を与える．ck_0 は中間状態の π^0 のエネルギー $E_{\boldsymbol{k}}$ と異なるものである．すなわち k_μ は π^0 の運ぶエネルギー・運動量ベクトルだが，これは質量公式 (4.8) はみたさない．

$$k_\mu^2+\mu^2c^2\neq 0.$$

この中間子は実際に観測される自由粒子ではなく，中間状態にだけ現われるもので**仮想的粒子**（**virtual particle**）と呼んで自由粒子と区別する．

核子と反核子が消滅してまた再生されるという場合でも事情は同じである．π^0 が作られるとき，消えるときの行列要素に現われる $\hbar c/\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}}$ とエネルギー分母だけを書くと，9-15 図 (a)，(b) の和をとって，



9-15 図

$$\frac{\hbar^2c^2}{2E_k}\left(\frac{1}{E(\boldsymbol{p})+E(\boldsymbol{q})-E_k}+\frac{1}{-E(\boldsymbol{p}')-E(\boldsymbol{q}')-E_{-k}}\right)=\frac{-\hbar^2c^2}{k_\mu{}^2c^2+\mu^2c^4}.$$

ただし,

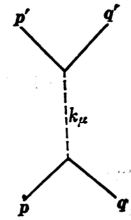
$$k_\mu=(\boldsymbol{k},\ k_0),\ ck_0=E(\boldsymbol{p})+E(\boldsymbol{q})=E(\boldsymbol{p}')+E(\boldsymbol{q}'),\ \boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}'.$$

このときも 9-16 図一つだけでよい. これらの結果をまとめると次の規則となる.

中間状態でπ中間子が伝播するときは, それがどちらから放出されどちらに吸収されるかという時間の順序は問題にせず, 遷移行列要素に

$$\Delta_F(k_\mu)=-\frac{\hbar^2c^2}{c^2k_\mu{}^2+\mu^2c^4} \tag{9.121}$$

の因子を与えればよい. k_μ は中間子の運ぶエネルギー·運動量の4次元ベクトルである.



9-16 図

(9.121) の因子は次のようにしても求められる. 中間子は自由な空間では,

$$\left(\square-\frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi=0$$

にしたがって伝播する. 中間子場の源 $\rho(\boldsymbol{x},\ x_0)$ があったならば, それによって発生した中間子場は,

$$\left(\square-\frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi(\boldsymbol{x},\ x_0)=\rho(\boldsymbol{x},\ x_0) \tag{9.122}$$

の解として与えられる. これを解くには φ, ρ を Fourier 展開して,

$$\varphi(x_\mu)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\int e^{ik_\mu x_\mu/\hbar}\Delta(k_\mu)d^4k,$$

$$\rho(x_\mu)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\int e^{ik_\mu x_\mu/\hbar}\rho(k_\mu)d^4k \qquad (d^4k=dkdk_0)$$

とすると, $\Delta(k)$ は,

$$\left(-\frac{k_\mu{}^2}{\hbar^2}-\frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\right)\Delta(k_\mu)=\rho(k_\mu)$$

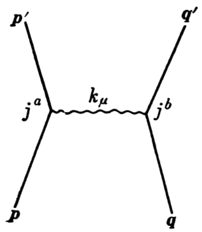
をみたす. したがって,

$$\varphi(x_\mu)=-\frac{\hbar^2c^2}{(2\pi\hbar)^4}\int\frac{e^{ik_\mu x_\mu/\hbar}}{c^2k_\mu{}^2+\mu^2c^4}\rho(k_\mu)d^4k.$$

とくに源 ρ が $\delta^4(x_\mu)$ のときは $\rho=1$ で, これは時刻 $t=0$ に原点でつくられた中間子が伝播していくようすを与える. (9.121) はこれを運動量空間に変換したものである. 一般に (9.122) で $\rho=\delta^4$ としたものの解を**伝播関数** (**propagator**) という.

[光子の交換の場合]

9-17 図のように二つの荷電粒子 a, b が光子を交換して散乱されるときの行列要素はπの場合と同様に光子のところに $1/k^2$ に比例する因子をおけばよい. ck_0, k はやはり仮



9－17 図

想的光子の運ぶ4次元運動量である．光子の場合はスピンが1であり，光子の放出，吸収の行列要素 j_μ がベクトルである点が前と異なっている．粒子 a が μ という偏りの光子を放出したならば，b も同じ偏りの光子を吸収するのだから，光子の伝播因子は，

$$D_F(k_\mu) = -\delta_{\mu\nu}\frac{\hbar^2}{k_\mu{}^2} \tag{9.123}$$

と考えられる（この k は運動量で，波数ではない）．

光子の偏りは進行方向に垂直ないわゆる横波だけしか存在しないから，(9.123) の $\delta_{\mu\nu}$ については説明を要する．いま光子の運動量 $\boldsymbol{k}$ が z 軸の方向を向いているとしよう．光子はしたがって z 軸に垂直な偏りを持ち x および y 方向の直線偏光しか持たない（μ, ν $=1,2$）(6.62)．

しかし a, b 間に交換される光子は仮想的な光子であり $k_\mu{}^2=0$ をみたさないので，A_μ（$\mu=1, 2, 3, 0$）が4成分あることに対応して，あたかも光子に4個の偏りがあるとして計算しよう．$\mu=3,0$ 成分からの寄与は (6.43) の A_μ の展開に示されるように量子化されない $A_\mu{}^{Cl}$ からの寄与に一致しなければならない．

(9.123) を用いると 9－17 図の行列要素は，

$$-\frac{\hbar^2}{k^2}j_\mu{}^a j_\mu{}^b = -\frac{\hbar^2}{k^2}(j_1{}^a j_1{}^b + j_2{}^a j_2{}^b + j_3{}^a j_3{}^b - j_0{}^a j_0{}^b). \tag{9.124}$$

右辺の第 1·2 項が直線偏光した光子の交換による部分である．それでは第 3·4 項はどういうものを意味するであろうか．

粒子 a, b と電磁場の相互作用を，

$$H = \int j_\mu{}^a A_\mu d\boldsymbol{r} + \int j_\mu{}^b A_\mu d\boldsymbol{r} \tag{9.125}$$

と書くと，たとえば a 粒子による偏り $\mu(=1, 2, 3, 0)$ の仮想的光子の放出の行列要素は

$$j_\mu{}^a \propto \langle \boldsymbol{p}'|\int j_\mu{}^a(\boldsymbol{r})e^{i\boldsymbol{kr}/\hbar}d\boldsymbol{r}|\boldsymbol{p}\rangle$$

で与えられる．ただし $j_\mu{}^a(\boldsymbol{r})$ は光の源となる電流で，$e^{i\boldsymbol{kr}/\hbar}$ は光子が作られる（あるいは消される）ときの因子である．電流に対しては連続の式 $\partial_\nu j_\mu{}^a=0$ が成り立つので，

$$0 = \langle \boldsymbol{p}'|\int \partial_\mu j_\mu{}^a(\boldsymbol{r})e^{i\boldsymbol{kr}/\hbar}d\boldsymbol{r}|\boldsymbol{p}\rangle = -\frac{i}{\hbar}k_\mu\langle \boldsymbol{p}'|\int j_\mu{}^a e^{i\boldsymbol{kr}/\hbar}d\boldsymbol{r}|\boldsymbol{p}\rangle = -\frac{i}{\hbar}k_\mu j_\mu{}^a.$$

この変形をするのには，$\mu=1, 2, 3$ に対しては部分積分を行ない，$\mu=0$ の時間微分に対しては (2.78) を用い $ck_0=E(\boldsymbol{p})-E(\boldsymbol{p}')$ に注意する．同様にして $k_\mu j_\mu{}^b=0$. 特にいまは $k_1, k_2=0$ の座標系をとっているから，

$$k_3 j_3{}^a = k_0 j_0{}^a, \quad k_3 j_3{}^b = k_0 j_0{}^b. \tag{9.126}$$

(9.126) により (9.124) の第 3，第4項を書き直すと，

$$\frac{\hbar^2}{k^2}j_0{}^a j_0{}^b\left(1-\frac{k_0{}^2}{k_3{}^2}\right)=\hbar^2\frac{j_0{}^a j_0{}^b}{k_3{}^2},$$

あるいは一般の座標系で

$$\hbar^2\frac{j_0{}^a j_0{}^b}{k^2}. \tag{9.127}$$

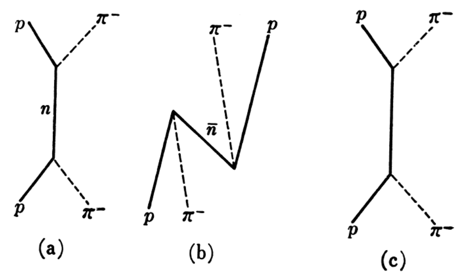
これは Coulomb ポテンシャル（28 ページ参照）．

$$H_c=\frac{1}{4\pi}\int\frac{j_0{}^a(\boldsymbol{r})j_0{}^b(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}' \tag{9.128}$$

から散乱の遷移行列を求めたものになっている．すなわち（9.124）の因子は横波の光子交換と，Coulomb ポテンシャルの作用の両方を含んでいるのである．

［スピン 1/2 粒子の伝播因子］

Fermi 粒子が中間状態を伝わるときも，いくつかの過程をまとめて行列要素が簡単になることは前章の制動放射，電子対の生成でみたとおりである（8－14 図，8－23 図）．π^- と陽子の散乱では 9－18 図（a），（b）の和が（c）の一つにまとめられる．ここでは，Dirac 方程式の解として伝播関数をだそう．自由な Fermi 粒子の方程式は（7.18）あるいは，



9－18 図

$$(cp_\mu\gamma_\mu+mc^2)\psi=0$$

と書かれる．ただし p_0 は E/c で，p_μ は微分演算子である．相互作用があって，場に源のあるときは，

$$(cp_\mu\gamma_\mu+mc^2)\psi=-\eta. \tag{9.129}$$

$\eta(x_\mu)$ は 4 成分スピノルである．これを Fourier 分解して，

$$\eta(x_\mu)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\int e^{ip_\mu x_\mu/\hbar}\eta(p_\mu)d^4p$$

と書くと，

$$\psi(x_\mu)=\frac{-1}{(2\pi\hbar)^4}\int\frac{e^{ip_\mu x_\mu/\hbar}}{cp_\mu\gamma_\mu+mc^2}\eta(p_\mu)d^4p.$$

$\eta(p_\mu)$ として p_μ によらない 4 成分スピノル，たとえば，

$$\eta(p_\mu)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

等をとると，$\eta(x_\mu)$ は $x_\mu=0$ でのみ値を持つスピノルになり，ψ の源が $x_\mu=0$ にのみ存在することを示している.

これからみてもわかるように，Fermi 粒子の伝播因子は，

$$S_F(p_\mu)=\frac{-1}{c\gamma_\mu p_\mu+mc^2}=\frac{c\gamma_\mu p_\mu-mc^2}{c^2p_\mu{}^2+m^2c^4} \tag{9.130}$$

で与えられる（問題 9.8).

このようにして遷移行列は，

$$\langle f|T|i\rangle=L^3\delta_{\Sigma\boldsymbol{p}',\Sigma\boldsymbol{p}}\prod_{\text{out}}\varphi(\boldsymbol{p}')\prod_{\text{in}}M\varphi(\boldsymbol{p}) \tag{9.131}$$

という形に書かれる. 第一の因子は運動量の保存を表わす.

$$\sum_{\text{out}}\boldsymbol{p}'=\sum_{\text{in}}\boldsymbol{p}.$$

$\varphi(\boldsymbol{p})$ は入射粒子が消える時の行列要素で（光子に対し k_μ は第6章の $\boldsymbol{k}$ の $\hbar$ 倍 (6.4)）

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{p})&=\frac{\hbar c}{\sqrt{2EL^3}} &&\text{スピン 0 粒子}\\ &=\frac{\hbar c}{\sqrt{2ckL^3}}\varepsilon_\mu &&\text{光子}\\ &=\frac{1}{\sqrt{L^3}}u(\boldsymbol{p},h) &&\text{スピン 1/2 粒子}\\ &=\frac{1}{\sqrt{L^3}}\bar{v}(-\boldsymbol{p},h) &&\text{スピン 1/2 の反粒子}\end{aligned} \tag{9.132}$$

である. $\varphi(\boldsymbol{p}')$ は出ていく粒子が作られるときの行列要素で，

$$\varphi(\boldsymbol{p}')=\frac{1}{\sqrt{L^3}}\bar{u}(\boldsymbol{p}',h')\quad \text{スピン 1/2 粒子}$$

等である. 振幅 M は 9−14 図，9−16 図のように過程を表わすグラフを書き，各頂点に結合定数，それを結ぶ内線（入射，放出粒子でないもの）に伝播因子(9.121),(9.123),(9.130) を与えて掛け合わせる. 各頂点ではエネルギー，運動量が保存されていなければならない. グラフを書くときはどちらが先に放出したかという時間の順序は問題にしなくてよい. このグラフを **Feynman グラフ** といい，このような計算法を **Feynman の方法**という.

伝播因子はどれも4次元ベクトルの内積で書かれていて Lorentz 変換に対して不変なものである. したがって相互作用の Hamiltonian が Lorentz 変換に対して不変ならば，振幅 M もやはり不変量である.

［遷移確率の求め方］

遷移確率を求める式 (9.18) を少し書き直そう. まず終状態にはスピン0の粒子 E_i, $\boldsymbol{p}_i$

($i=1, \cdots, n$) のみが存在するとしよう．(9.131) を用いると，

$$w=\frac{2\pi}{\hbar}L^6(\prod_{\mathrm{in}}\varphi)^2\sum_{\boldsymbol{p}_1,\cdots}\delta(\sum E_i-E)\delta_{\Sigma \boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{P}}|M|^2\frac{(\hbar c)^{2n}}{\prod_{\mathrm{out}}(2E_iL^3)}.$$

ただし，$E, \boldsymbol{P}$ は初めの状態の全エネルギー，全運動量である．和を積分でおきかえ，その際，

$$\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}=\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^3\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'),\quad \delta(\sum E_i-E)=\frac{1}{c}\delta(\sum p_{i0}-P_0), \tag{9.133}$$

$\sum_{\boldsymbol{p}_i}=\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3\int d\boldsymbol{p}_i$, に注意すると，

$$\begin{aligned}w&=(2\pi)^4L^3\frac{\hbar^2}{c}(\prod_{\mathrm{in}}\varphi)^2\int\delta^4(\sum p_{i\mu}-P_\mu)|M|^2\left(\frac{c^2}{\hbar}\right)^n\prod_{\mathrm{out}}\frac{d\boldsymbol{p}_i}{2E_i(2\pi)^3}\\&=(2\pi)^4L^3\frac{c^{n-1}}{\hbar^{n-2}}(\prod_{\mathrm{in}}\varphi)^2\int_{p_{i0}>0}\delta^4(\sum p_{i\mu}-P_\mu)|M|^2\prod_{\mathrm{out}}\delta(p_{i\mu}{}^2+m_i{}^2c^2)\frac{d^4p_i}{(2\pi)^3}.\end{aligned} \tag{9.134}$$

ただし，$p_0=E/c$ で，第2の変形をするのに，

$$\delta(p_\mu{}^2+m^2c^2)=\frac{1}{2p_0}\delta(p_0-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2})=\frac{c}{2E}\delta\left(p_0-\frac{E}{c}\right),\ p_0>0 \tag{9.135}$$

の関係をつかった．このように書き直すと，M は Lorentz 不変な量なので，(9.134) の積分は Lorentz 変換で不変な量であることがわかる．したがってどの座標系で計算しても同じ答を与える．普通重心系をとると計算が便利である．

〔例 題〕 $K^+\to\pi^++\pi^0$ の崩壊確率．崩壊を起こさせる相互作用を，

$$f\left[\int\varphi_\pi{}^\dagger\varphi_0\varphi_K d\boldsymbol{r}+\int\varphi_\pi\varphi_0\varphi_K{}^\dagger d\boldsymbol{r}\right]$$

とすればこの遷移の振幅 M は単に f である．K 中間子の質量を m，π 中間子のを μ (π^+ と π^0 の質量差は無視する) とすれば，

$$\begin{aligned}w=(2\pi)^4L^3c\frac{\hbar^2c^2}{2E_KL^3}\int_{p_{10}p_{20}>0}&\delta^4(p_{1\mu}+p_{2\mu}-P_\mu)f^2\delta(p_{1\mu}{}^2+\mu^2c^2)\\&\times\delta(p_{2\mu}{}^2+\mu^2c^2)\frac{d^4p_1d^4p_2}{(2\pi)^6}.\end{aligned}$$

重心系をとれば $P_\mu=(\boldsymbol{0}, mc)$, $E_K=mc^2$ である．右辺の積分はまず p_2 で積分すると，

$$\begin{aligned}w&=\frac{\hbar^2c}{2m}\frac{f^2}{(2\pi)^2}\int\delta(p_{1\mu}{}^2+\mu^2c^2)\delta((P_\mu-p_{1\mu})^2+\mu^2c^2)d^4p_1\\&=\frac{\hbar^2c}{2m}\frac{f^2}{(2\pi)^2}\int\delta(p_1{}^2-(p_{10}{}^2-\mu^2c^2))\delta(2mcp_{10}-m^2c^2)dp_{10}p_1{}^2dp_1d\Omega,\\&\qquad p_1=|\boldsymbol{p}_1|.\end{aligned}$$

この積分は容易にできる．

$$\int\delta(2mcp_{10}-m^2c^2)dp_{10}=\frac{1}{2mc},\quad p_{10}=\frac{mc}{2},$$

$$\int\delta(p_1{}^2-(p_{10}{}^2-\mu^2c^2))dp_1=\frac{1}{2p_1},\quad p_1=c\sqrt{\frac{m^2}{4}-\mu^2}$$

$$\int d\Omega=4\pi$$

であるから，

$$w=\frac{f^2\hbar^2}{8\pi m^2}p_1=\frac{f^2\hbar^2c}{16\pi m}\sqrt{1-\left(\frac{2\mu}{m}\right)^2} \tag{9.136}$$

が1秒に崩壊する割合いである．

始状態，終状態にスピン1/2粒子があるときは遷移行列には，

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}',\ h')Mu(\boldsymbol{p},\ h)$$

の因子がある．これの複素共役量は，

$$u^\dagger(\boldsymbol{p},\ h)M^\dagger\gamma_0u(\boldsymbol{p}',\ h')=\bar{u}(\boldsymbol{p},\ h)\gamma^0M^\dagger\gamma_0u(\boldsymbol{p}',\ h')=\bar{u}(\boldsymbol{p},\ h)\overline{M}u(\boldsymbol{p}',\ h')$$

と書かれる．ただし，

$$\overline{M}=\gamma_0M^\dagger\gamma_0 \tag{9.137}$$

である．w の式には，

$$\sum_{\boldsymbol{p}',h'}\bar{u}(\boldsymbol{p},\ h)\overline{M}u(\boldsymbol{p}',\ h')\bar{u}(\boldsymbol{p}',\ h')Mu(\boldsymbol{p},\ h)$$

の形の和が現われるが，まず $\boldsymbol{p}'$ を一定にしてスピン状態 h' について加える（問題 7.7）．

$$\sum_{h'}u_\alpha(\boldsymbol{p}',\ h')\bar{u}_\beta(\boldsymbol{p}',\ h')=\frac{(-\gamma_\mu p_\mu'+mc)_{\alpha\beta}}{2p_0'}.$$

つぎに前と同じく，

$$\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{2p_0'}\to\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3\int_{p_0'>0}\delta(p'^2+m^2c^2)d^4p'$$

でおきかえられる．結局，

$$w=(2\pi)^4L^3\frac{\hbar^2}{c}\prod_{\text{in}}\varphi(p)\int\delta^4(\sum p_{i\mu}'-\sum p_{i\mu})\overline{M}\prod_{\text{out}}\varphi(p')\prod_{\text{out}}\varphi(p')M\prod_{\text{in}}\varphi(p). \tag{9.138}$$

ただし終状態の各粒子に対する $\varphi(p')\varphi(p')$ は，

$$\varphi(p')\varphi(p')\to\frac{c\hbar^2}{(2\pi\hbar)^3}\delta(p_\mu'^2+m^2c^2)d^4p' \qquad \text{スピン0粒子}$$

$$\to\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}(-\gamma_\mu p_\mu'+mc)_{\alpha\beta}\delta(p_\mu'^2+m^2c^2)d^4p' \qquad \text{スピン1/2粒子} \tag{9.139}$$

$$\to\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}(-\gamma_\mu p_\mu'-mc)_{\alpha\beta}\delta(p_\mu'^2+m^8c^2)d^4p' \qquad \text{スピン1/2反粒子}$$

でおきかえる．始状態の粒子に対する φ は (9.132) である．

[例 題] $\pi^+ \to \mu^+ + \nu$ の崩壊確率．(9.111) の相互作用では $M = g_\pi$ である．π 中間子の質量を μ, μ 中間子のを m とし，μ 中間子の運動量を p_1, ニュートリノのを p_2 と書く．重心系（π^+ の止っている系）で

$$w = (2\pi)^4 L^3 \frac{\hbar^2}{c} \frac{\hbar^2 c^2}{2\mu c^2 L^3} g_\pi^2 \int \delta^4(p_{1\mu} + p_{2\mu} - P_\mu)\delta(p_{1\mu}^2 + m^2c^2)\delta(p_{2\mu}^2)$$

$$\times(-\gamma_\mu p_{1\mu} - mc)_{\beta\alpha}(-\gamma_\mu p_{2\mu})_{\alpha\beta} \frac{\hbar^{-6}}{(2\pi)^6} d^4p_1 d^4p_2.$$

まず，γ 行列の足し算をする（行列 $A_{\alpha\beta}$ の跡 $\sum A_{\alpha\alpha}$を T_rA と書く）．

$$(-\gamma_\mu p_{1\mu} - mc)_{\beta\alpha}(-\gamma_\mu p_{2\mu})_{\alpha\beta} = T_r(\gamma_\mu p_{1\mu} + mc)(\gamma_\mu p_{2\mu}).$$

γ 行列の性質および，

$$T_r(AB) = T_r(BA)$$

を用いると，

$$T_r(1) = 4,\ T_r(\gamma_\mu) = T_r(\gamma_\mu\gamma_5^2) = T_r(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5) = -T_r(\gamma_\mu) = 0$$

$$T_r(\gamma_\mu\gamma_\nu) = \frac{1}{2}T_r(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) = -T_r(\delta_{\mu\nu}) = -4\delta_{\mu\nu}.$$

したがって，

$$T_r(\gamma_\mu p_{1\mu} + mc)(\gamma_\mu p_{2\mu}) = -4p_{1\mu}p_{2\mu} = -2[(p_{1\mu} + p_{2\mu})^2 - p_{1\mu}^2 - p_{2\mu}^2]$$
$$= 2(\mu^2 - m^2)c^2.$$

p_1, p_2 についての積分は前と同様で，

$$w = \frac{g_\pi^2}{4\pi\hbar c}\left(1 - \frac{m^2}{\mu^2}\right)^2 \frac{\mu c^2}{\hbar}. \tag{9.140}$$

始状態の粒子が1個のときは，w (9.138) はその粒子の崩壊の確率を与え，始状態の粒子が2個のときは w は衝突して n 個の粒子（n は終状態の粒子数）になる遷移確率を与える．衝突の断面積は w に L^3/v を掛けて得られる．v は互に近づく速度で，重心系では $v = v_1 + v_2$ である (229 ページ).

断面積を Lorentz 変換に対して不変な形に書くため，まず次の量 B を定義する．

$$B = \sqrt{-\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}(p_{1\mu}p_{2\nu} - p_{2\mu}p_{1\nu})^2} \tag{9.141}$$

$p_{1\mu}$, $p_{2\mu}$ は2個の入射粒子の4次元運動量である．重心系（$p_{1\mu}$ ($=\boldsymbol{p}$, E_1/c), $p_{2\mu} = (-\boldsymbol{p}, E_2/c)$ で B を計算すると，

$$cB = pE_1 + pE_2 = E_1E_2(v_1 + v_2)/c^2 = E_1E_2v/c^2 \tag{9.142}$$

w (9.138) の中の入射粒子に対する因子 $\varphi(p)\varphi(p)$ は (9.132) より，

$$\frac{\hbar^2c^2}{2EL^3} \qquad \text{粒子がスピン0粒子,}$$

$$\frac{(-\gamma_\mu p_\mu + mc)_{\alpha\beta}}{4p_0L^3} \qquad \text{粒子がスピン 1/2 粒子,}$$

$$\frac{(-\gamma_\mu p_\mu - mc)_{\alpha\beta}}{4p_0L^3} \qquad \text{粒子がスピン 1/2 反粒子}$$

である．ここでスピン 1/2 粒子（反粒子）に対してはそのスピン状態について平均した．

さて衝突の断面積の式に現われる（L^3/v）$[\Pi\,\varphi(p)]^2$ は（9.142）を使って書き直すと，

$$\frac{L^3}{v}[\prod_{in}\varphi(p)]^2 = \frac{L^3E_1E_2}{c^3B}[\varphi(p_1)]^2[\varphi(p_2)]^2$$

$$= \frac{1}{4cBL^3}\left\{2L^3\frac{E_1}{c}[\varphi(p_1)]^2\right\}\left\{2L^3\frac{E_2}{c}[\varphi(p_2)]^2\right\}$$

となる．したがって断面積は（9.138）の w に対し入射粒子の $\varphi(p)\varphi(p)$ の代りに

$$\begin{array}{ll} \hbar^2c & \text{スピン 0 粒子} \\ \frac{1}{2}(-\gamma_\mu p_\mu + mc)_{\alpha\beta} & \text{スピン 1/2 粒子} \\ \frac{1}{2}(-\gamma_\mu p_\mu - mc)_{\alpha\beta} & \text{スピン 1/2 反粒子} \end{array} \qquad (9.143)$$

を代入し，さらに $4cBL^3$ で割って得られる．

B，（9.143）の諸量，終状態の粒子に関係した諸量（9.139），M 等はすべて Lorentz 変換に対し不変な量なので，断面積も Lorentz 変換に対して不変な量であることは明らかである．

〔問題 9.8〕 π^-p 散乱の場合 9－18 図の（a），（b）の遷移行列を計算し，中性子の伝播因子が（9.130）の形になることを示せ．

〔問題 9.9〕（9.109）の相互作用による Λ 粒子の崩壊確率を核子の運動エネルギーも入れて正しく計算せよ．

第10章　核子と中間子

原子，分子の理論では電子の振る舞いを調べることが中心問題であるが，もっと高エネルギーの素粒子物理では π 中間子が最も重要な役割りを演ずる．π 中間子は強い相互作用をする粒子のうちでは最も軽く，したがって高エネルギーでの素粒子間の衝突で多数作られる．また核子その他の粒子の構造，核子間に働く核力等にも π 中間子の寄与が一番重要である．この章では π 中間子と，自然界に安定して存在する原子核の構成要素である核子（p, n）との相互作用の問題を考える．強い相互作用をする粒子で核子・π 中間子以外の粒子については次の章で扱う．

§ 10.1　π 中間子の性質

原子核に高エネルギーの陽子あるいは γ 線を衝突させると **π 中間子**が作られる．それには正の電荷を持つもの，負の電荷を持つものおよび電気的に中性のものとがある．このうち中性中間子は直接に観測することはできないが，それはただちに，

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma$$

のように崩壊するので，この2個の光子から π^0 の存在を推定することができる．実際，高エネルギーの衝突の際に，ある臨界エネルギー以上になると急に多数の光子が発生するのが認められる．この光子はいつも2個の組になって発生し，その運動量を $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, エネルギーを E_1, E_2 として，

$$W^2 = (E_1 + E_2)^2 - c^2(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2 = 2E_1E_2(1 - \cos\theta) \qquad (10.1)$$

(ただし，θ は $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ のなす角で，$E = c|\boldsymbol{p}|$ をつかった）という量を作ってみると，これはほぼ一定の値 $\mu_0{}^2c^4$ を持つことがわかる．このことは2個の光子は別々に作られたものでなく，一たん質量が μ_0 の粒子が作られてそれが崩壊したものであることを示している．すなわち，崩壊の際のエネルギー・運動量の保存則から $E_1 + E_2$, $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ は崩壊前の粒子のエネルギー・運動量と等しく，したがって W^2 は (4.8) より $\mu_0{}^2c^4$ に等しい．このように崩壊してできた粒子のエネルギー，運動量から W^2 をつくることは寿命の短い不定安粒子の存在をたしかめ，その質量を知るために用いられる方法である．（光子は物質中で電子対を作り，この電子対の運動量・エネルギーの測定から光子の E, $\boldsymbol{p}$ を大体測り得る）．

[π 中間子の質量]

荷電 π 中間子の質量を測るには，磁場での曲り方から運動量を，物質中での走行距離(§ 8.4) 等からエネルギーを求めればよい．その結果は，

$$\mu(\pi^{\pm})c^2 = 139.60 \pm 0.05 \text{ MeV}$$

である．

中性 π 中間子の質量は荷電 π 中間子との質量差から求められる．負の π 中間子は水素原子に吸収されて，

$$\pi^- + p \to n + \pi^0 \quad (\pi^0 \to 2\gamma)$$

の反応を起こす．π^- はほとんど大部分が止ってから吸収されるので，その運動エネルギーは 0 としてよい（束縛状態から吸収される場合でも，束縛エネルギーは実験誤差にくらべて無視できる）．したがって，光子の測定から π^0 の運動エネルギーを知れば，中性子，陽子の質量差はわかっているので，中間子の質量差が求まる．

$$[\mu(\pi^{\pm}) - \mu(\pi^0)]c^2 = 4.590 \pm 0.004 \text{ MeV}.$$

これから，

$$\mu(\pi^0)c^2 = 135.01 \pm 0.05 \text{ MeV}.$$

中性 π 中間子の質量が荷電 π 中間子のとほとんど等しいことは，これらが全く別々の粒子ではなく同じ仲間の粒子と考えるのがよいことを示している (§ 10.2).

[荷電 π 中間子のスピン，パリティ]

粒子の基本的な性質として重要なのはそのスピンの大きさである．粒子のスピンが S ($\hbar$ を単位にして) ならば，ある運動量の粒子には $2S+1$ 個の状態 (S_z が $S, S-1, \cdots, -S$ の状態) が存在することになる．したがって，内部自由度の状態が何個存在するかを調べれば S の大きさがわかる．

π^+ 中間子のスピンは陽子・陽子の衝突で π^+ と重陽子が作られる反応，

$$p + p \to d + \pi^+ \tag{A}$$

と，その逆過程である π^+ による重陽子の分解，

$$\pi^+ + d \to p + p \tag{B}$$

の両方を比較することにより求められる．重心系で考えることにして，片方の陽子の運動量を $\boldsymbol{p}$, π^+ の運動量を $\boldsymbol{q}$ とする．(A) の反応の断面積は，

$$d\sigma_A = \frac{L^3}{v_{pp}} \frac{2\pi}{\hbar} |\langle d, \pi, s'|T|p, p, s\rangle|^2 \rho_{\pi d} \tag{10.2}$$

である．s, s' はスピン状態を表わす変数とする．v_{pp} は 2 個の陽子が互に近づく速度で，

系全体のエネルギーを E とすると ((9.77) 参照),

$$v_{pp}=2v_p=\frac{dE}{dp}$$

で与えられる．また (10.2) の $\rho_{\pi d}$ は (A) の終状態の密度で,

$$\rho_{\pi d}=\frac{q^2}{(2\pi\hbar)^3}\frac{dq}{dE}d\Omega$$

である．(10.2) は始状態，終状態の粒子のスピン状態を決めたときの断面積だが，スピンの向きは測らないことにするならば，実際に断面積として問題になるのは終状態の重陽子，π^+ 中間子のすべてのスピン状態について加え合わせたものである．また始状態が偏りのない入射粒子であるならば，始めのスピン状態について平均しなければならない．陽子はスピンが 1/2 だから，上向き，下向きに相当して二つの状態があり，入射粒子のスピンの向き，的（まと）の陽子のスピンの向きの組合わせで始めのスピン状態として 4 通りの可能性がある．こうして偏りのない入射粒子に対しては,

$$d\sigma(p+p\to d+\pi^+)=\frac{1}{4}\sum_s\sum_{s'}|\langle d,\ \pi,\ s'|T|p,\ p,\ s\rangle|^2\frac{L^3}{(2\pi)^2\hbar^4}\frac{dp}{dE}\frac{dq}{dE}q^2d\Omega. \tag{10.3}$$

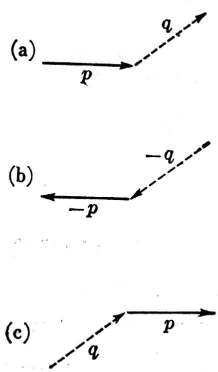
同様にして（B）の反応を考えると，重陽子のスピンは 1 だから，π^+ のスピンを S とすれば始めのスピン状態としては $3(2S+1)$ 個存在し，これについて平均しなければならない．したがって,

$$d\sigma(\pi^++d\to p+p)=\frac{1}{3(2S+1)}\sum_{s'}\sum_s|\langle p,p,s|T|d,\pi,s'\rangle|^2\frac{L^3}{(2\pi)^2\hbar^4}\frac{dq}{dE}\frac{dp}{dE}p^2d\Omega \tag{10.4}$$

である．この二つを比較すると，時間反転に対し不変であるときは S-行列（遷移行列）の相反性により (9.41) が成立し,

$$\langle d,\ \pi,\ s',\ \boldsymbol{q}|T|p,\ p,\ s,\ \boldsymbol{p}\rangle$$
$$=\langle p,\ p,\ -s,\ -\boldsymbol{p}|T|d,\ \pi,\ -s',\ -\boldsymbol{q}\rangle$$

となる．ここで時間反転によりスピン・運動量の向きが逆転することをはっきり示すために，スピン・運動量変数を T の行列要素に明示した．さらに衝突の面 ($\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}$ の作る面) に垂直な軸のまわりに π だけ回転すると $-\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p},\ -\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{q}$ となる．また，スピンは衝突の面内の成分は符号を変え，面に垂直な成分はそのままである．もしあらかじめ各粒子のスピンを衝突面内の特定方向に量子化して $s,\ s'$ はそのスピン成分



10－1 図 （a）は元の反応，（b）は時間反転した反応，（c）は（b）を紙面に垂直な軸のまわりに π だけ回転したもの

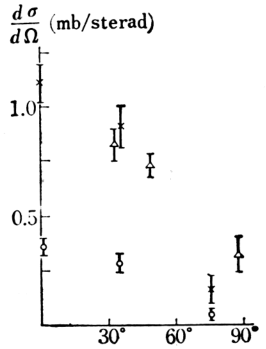
の固有値とすると，上の回転により $-s\rightarrow s$, $-s'\rightarrow s'$ である.

行列要素 T は系を回転しても不変であるから，結局,

$$\langle d,\ \pi,\ s',\ \boldsymbol{q}|T|p,\ p,\ s,\ \boldsymbol{p}\rangle=\langle p,\ p,\ s,\ \boldsymbol{p}|T|d,\ \pi,\ s',\ \boldsymbol{q}\rangle$$

を得る．したがって,

$$\sum_s\sum_{s'}|\langle d,\ \pi,\ s'|T|p,\ p,s\rangle|^2=\sum_{s'}\sum_s|\langle p,\ p,\ s|T|d,\ \pi,\ s'\rangle|^2 \qquad (10.5)$$



10－2 図　$\pi^++d\rightarrow p+p$ の微分断面積．Ⅰ(△)は実際の実験．Ⅰ(×)は逆反応の実験から(10.6)で $S=0$ として計算したもの．Ⅰ(○)は同じく $S=1$ として計算したもの（π^+ のエネルギーは重心系で 28 MeV)．mb/sterad は単位立体角ごとに 1 mb を意味し，微分断面積の単位である.

が成り立つ．(10.3) と (10.4) の比をとれば,

$$\frac{d\sigma(\pi^++d\rightarrow p+p)}{d\sigma(p+p\rightarrow\pi^++d)}=\frac{4}{3}\ \frac{p^2}{q^2(2S+1)}. \qquad (10.6)$$

この関係式から，(A), (B) の二つの反応を重心系で同じエネルギーのところで測定し比較すれば π^+ のスピンを決めることができる．結果は 10－2 図で見られるように $S=0$, すなわち π^+ のスピンは 0 である.

π^- 中間子に対しては中性子の的が存在しないので $n+n\rightarrow d+\pi^-$ が測れず，同様のことはできない．(中性子は不安定で安定の原子核のように多数用意することができない)．しかし粒子･反粒子反転に対する不変性から π^- は π^+ と同じ性質でなければならないのでやはりスピンは 0 と考えられる.

［荷電 π 中間子のパリティ］

負電荷の π 中間子を重水素の中に送り込むとしだいにエネルギーを失って，最後に重陽子に吸収される．その際に,

$$\pi^-+d\rightarrow n+n, \qquad (\mathrm{a})$$

$$\pi^-+d\rightarrow n+n+r \qquad (\mathrm{b})$$

の反応がほぼ 2 : 1 の割合で起こる．最も大きい確率で起こる (a) の反応について保存則を調べてみよう．π^- は極めて短時間でエネルギーを失い，重陽子に束縛されてしまうが，その基底状態である S－軌道に落ちるまでの時間は 10^{-12} 秒程度であることがわかっている．したがって，π^- は S－軌道に落ちてから吸収されるとしてよい．π^- のスピンは 0, 重陽子のは 1 であるから始状態の全角運動量は 1 である.

次に，終状態は 2 個の同じ Fermi 粒子の系であるから，合成スピンが 1 の状態では軌道角運動量 L は奇数，スピンが 0 ならば L は偶数である (80 ページ)．したがって，2

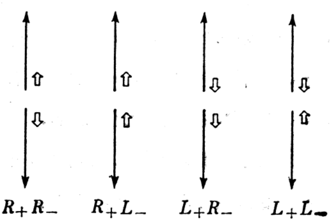
個の中性子の状態として可能なのは，

$$^1S_0,\ ^3P_0,\ ^3P_1,\ ^3P_2,\ ^1D_2,\ ^3F_2,\ \cdots$$

である（記号については 68 ページ参照）．このうち全角運動量が 1 のものは $^3P_1$ だけだから，角運動量の保存により終状態は $^3P_1$ であることが結論される．そこで始状態，終状態のパリティを比較する．終状態は軌道角運動量が 1（奇数）だから，この状態のパリティは -1 である．陽子，中性子のパリティはいずれも $+1$ と決める（69 ページ参照）．始状態では重陽子は $^3S_1$ 状態でパリティは $+1$，π^- の軌道角運動量は 0（偶数）だからそのパリティは $+1$で，始めの状態のパリティは π^- のパリティと同じである．これが終状態のパリティと等しいためには π^- 中間子のパリティは -1 でなければならない．（この章では崩壊のような弱い相互作用は考えないのでパリティは保存するとしてよい）．π^+ 中間子も π^- 中間子の反粒子であるから，やはり -1 のパリティを持つ．

〔中性 π 中間子のスピン，パリティ〕

π^0 中間子のスピンは直接決めることはできないが，π^0 が 2 個の γ にこわれることからスピンが 1 ではないことを示そう．中間子が止っている座標系でみると 2 個の γ は互に反対の方向に進み，この方向を z 軸にとることにする．ある方向に進む光子にはヘリシティ h が $+1$ のもの（右旋光）と $h=-1$ のもの（左旋光）との 2 種の状態が存在する．z 軸の正方向に進む右旋光の光子を R_+，左旋光のを L_+ とし，これを x 軸のまわりに 180° 回転したもの，すなわち z 軸の負の方向に進む右（左）旋光の光子を R_- (L_-) と書くことにすれば，2 個の光子の状態として次の 4 個が考えられる．



10－3 図　2 個の光子の状態

$$R_+R_-,\quad R_+L_-,\quad L_+R_-,\quad L_+L_-.$$

空間座標を z 軸のまわりに θ だけまわしたとき，これらの状態がどのように変化するかを調べると，R_+ はスピン S_z が $+\hbar$ の状態であるから $e^{i\theta}R_+$ となる．一方，R_- は進行方向のスピン成分が $+\hbar$ で，z 軸の正方向のスピン成分は $-\hbar$ である．したがって，R_- は回転で $e^{-i\theta}R_-$ となる．こうして座標の回転により，

$$\begin{aligned} &R_+R_- \to R_+R_- \\ &R_+L_- \to e^{2i\theta}R_+L_- \\ &L_+R_- \to e^{-2i\theta}L_+R_- \\ &L_+L_- \to L_+L_- \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{l} z\text{ 軸のまわりの角} \\ \text{度 }\theta\text{ の座標回転} \end{array}\right)$$

のように変換する．このことはこれらの状態の z 方向の角運動量 J_z がそれぞれ 0, 2, −2, 0 であることを示している．もし最初の粒子がスピン1であったならば，その角運動量の z 成分は +1, 0, −1 しかあり得ないから，R_+R_-，L_+L_- のみが可能な終状態である．(したがって，$J_z=0$)．

次に座標系を x 軸のまわりに 180° 回転してみよう．360° 回転すればもとに戻るのだから，R_- は 180° 回転で R_+ となる．こうして，

$$\begin{aligned} R_+R_- &\to R_+R_- \\ L_+L_- &\to L_+L_- \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x\text{軸のまわり} \\ \text{の } 180^\circ \text{ 回転} \end{pmatrix}$$

となり，J_z が0の状態は変化しない．一方，スピンが1で J_z が0の粒子の状態は $Y_1^0=\sqrt{3/4\pi}\cos\theta$ と同じ変換性を示すが，これは座標を x 軸のまわりに 180° まわすと符号を変える．このようにスピン1の粒子と2個の光子の状態とは空間回転で異なる変換性を持つので互に移りかわるわけにいかない．したがって，スピン1の粒子は2個の光子には崩壊できない．

π^0 中間子は2個の光子にこわれるのでスピンが1でないことはわかったが，この議論では π^0 のスピンが2以上である可能性を排除するわけにはいかない．しかし次の節で述べる荷電不変性により π^0 中間子も荷電 π 中間子と同じ性質とするのがよいので，π^0 中間子のスピンも0と考えられる．

ふたたび2個の光子の状態にもどって，空間反転での変換性を調べる．空間反転でスピンの向きは変らないから，たとえば R_+ は L_- に移る．(L_- の位相をこのようにとる)．

$$\begin{aligned} R_+R_- &\to L_+L_-, \\ L_+L_- &\to R_+R_-. \end{aligned} \qquad (\text{空間反転})$$

この空間反転に対する固有状態は，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}(R_+R_- + L_+L_-), \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(R_+R_- - L_+L_-) \end{aligned} \tag{10.7}$$

で，それぞれ +1, −1 のパリティを持つ．あるいは書き直して，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\sqrt{2}}[(R_+ + L_+)(R_- + L_-) + (R_+ - L_+)(R_- - L_-)], \quad p=+1, \\ &\frac{1}{2\sqrt{2}}[(R_+ + L_+)(R_- - L_-) + (R_+ - L_+)(R_- + L_-)], \quad p=-1. \end{aligned} \tag{10.8}$$

$(R+L)/\sqrt{2}$ という状態は電場 ((6.48) より偏りのベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ と同方向) が x 方向に向いている直線偏光の光子を表わす．これを X と書くことにし，y 軸方向に直線偏光

した $(R-L)/\sqrt{2}i$ を Y と書くことにすれば，(10.8) は，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}(X_+X_- - Y_+Y_-), \quad p=+1 \\ &\frac{i}{\sqrt{2}}(X_+Y_- + Y_+X_-), \quad p=-1 \end{aligned} \tag{10.9}$$

となる．パリティ p が $+1$ ならば2個の光子の偏り（電場の方向）は互に平行であり，$p=-1$ ならば互に垂直である．この光子は物質の中で電子・陽電子の対を作るが，電子対は光子の電場と光子の運動方向の作る面内に多く作られる．2個の光子が作った電子・陽電子対の多くが同一平面内にあるならばパリティは $+1$ であり，片方の電子対の作る平面と他方の電子対の作る平面とが垂直であるならばパリティは -1 である．実験によると後者で，したがって，π^0 中間子のパリティは -1 である．

この節の結果をまとめると，π 中間子は擬スカラー粒子であるということができる．

〔問題 10.1〕 π^- 中間子を重陽子に吸収させたとき，

$$\pi^- + d \to n + n + \pi^0 \tag{10.10}$$

の反応の Q－値は正であって，エネルギー的には起こりうる．π 中間子が擬スカラーのときは終状態の π^0 は S－波ではないことを示せ．π^0 の運動量は極めて小さいので P－波以上の反応は起こりにくい（(9.89) による）．実際 (10.10) の反応は見つかっていない．

〔問題 10.2〕 スピン0の粒子が1個の光子と1個のスピン0粒子に崩壊することはできないことを示せ．

〔略 解〕 257 ページと同様に重心系をとり，終状態の粒子の進行方向を z 軸としてこの軸方向の角運動量成分を考えよ．

§ 10.2　荷電スピンと荷電不変性

陽子と中性子の質量はほとんど等しいが，それだけでなく，陽子間に働く力と中性子間の力がほとんど等しいことが原子核の理論から知られている．もちろん，陽子は荷電 e を持ち，中性子は電気的に中性であるが，電磁的な力は核力に比較して小さいので無視すると，

$$V_{nn} \approx V_{pp} \tag{10.11}$$

が成り立つ．たとえば3重水素 $H^3=(pnn)$ と $He^3=(npp)$ の結合エネルギーはそれぞれ 8.49 MeV と 7.73 MeV で，Coulomb 力による影響を除けば両者はほとんど等しいと考えられる．この他 $B^{11}=(5p6n)$ と $C^{11}=(6p5n)$，C^{13} と N^{13} のように陽子と中性子を入れ替えて得られる2個の原子核（これを鏡影核という）の共鳴準位の位置を調べるとほぼ等しいことがわかる．陽子と中性子の取り替えに対する対称性を**荷電対称性**と

いう.

(10.11) よりさらに強い条件として陽子と中性子の間に働く力も (10.11) に等しいという関係が考えられる. 2個の陽子あるいは中性子の状態は反対称のため，たとえばS状態 ($L=0$ の状態) では $^1S_0$ しか存在しないが，陽子と中性子のときは $^1S_0$ も $^3S_1$ も許される. 特に $^1S_0$ 状態だけを比較すると,

$$V_{pp}\approx V_{nn}\approx V_{pn} \qquad \text{(同じ状態)} \tag{10.12}$$

が成り立つことが実験でたしかめられる. このとき核子間の相互作用は**荷電不変** (charge independent) であるという. 荷電不変性を証明するものとして低エネルギーの核子・核子散乱の結果をあげよう. 低エネルギーの S 波の散乱の位相のずれ δ は重心系での波数 k の関数として近似的に,

$$k\cot\delta=-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}rk^2 \tag{10.13}$$

と書き表わされる. (これは $\delta\propto k$ (9.90) より $k\cot\delta$ は低エネルギー ($k\ll 1/R$) で k によらない. $k\cot\delta$ を k^2 につき展開し k^2 までの項をとった式が (10.13)). a は**散乱の長さ** (scattering length) r は**有効距離** (effective range) とよばれるものである. $^1S_0$ 状態での a および r は中性子・陽子および陽子・陽子散乱に対し,

$$\left.\begin{aligned} np: a&=-(23.74\pm 0.09)\times 10^{-13}\,\text{cm},\\ r&=(2.670\pm 0.023)\times 10^{-13}\,\text{cm},\\ pp: a&=-17.77\times 10^{-13}\,\text{cm},\\ r&=2.77\times 10^{-13}\,\text{cm} \end{aligned}\right\} \tag{10.14}$$

である. ただし，陽子・陽子散乱の場合は Coulomb 力の影響を除いた値である. 散乱の長さは np と pp で多少異なるが，核力をごくわずか変えても散乱の長さは大きく変わるので，核力で比較するならば (10.12) がほぼ成り立っているとしてよい.

荷電不変性が成り立つことから，陽子と中性子は全然別のものではなく一つの粒子 (核子) の内部状態の異なるものと考えるのがよさそうである. スピン 1/2 粒子が二つの内部状態を持つのと同様に扱って，核子には**荷電スピン**というものがあり，それが上向きの状態が陽子，下向きの状態が中性子であるとしよう. 核子の内部状態は2成分の波動関数

$$\psi_N=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \tag{10.15}$$

で表わされ,

$$p=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad n=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{10.16}$$

はそれぞれ陽子，中性子の状態である．スピン1/2粒子の場合と同様に，(10.15) の2成分波動関数に作用する行列を導入する．

$$\tau_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \tau_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\qquad \tau_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{10.17}$$

空間の座標を回転するとスピン1/2粒子のスピノル u は (7.3) のように変換されるが，ψ_N の2成分に対しても同じような変換を考えることにしよう．すなわち普通の空間とは別な3次元の空間があり，この空間の座標をある軸 $\boldsymbol{n}$ のまわりに θ だけ回転したとき，回転後の状態は，

$$\psi_N'=\exp\left(\frac{1}{2}\theta\boldsymbol{\tau n}\right)\psi_N \tag{10.18}$$

と変るとしよう．この回転は普通の空間の回転と何ら関係があるものではなく，ただ ψ_N が変換される仕方を回転という言葉でいい表わしたものにすぎない．しかしこのような表わし方がいろいろと便利であることがわかる．この仮に考えた空間を**荷電空間**という．$\boldsymbol{\tau}$ はこの空間のスピンで τ_3 が $+1$ の状態（荷電スピンが第3軸方向に向いている状態）が陽子であり，τ_3 が -1 の状態（荷電スピンが第3軸の負の方向に向いている状態）が中性子である．

$$\tau_3 p=p,\qquad \tau_3 n=-n.$$

また，

$$\tau_+=\frac{1}{2}(\tau_1+i\tau_2),\qquad \tau_-=\frac{1}{2}(\tau_1-i\tau_2) \tag{10.19}$$

は，それぞれ中性子を陽子，陽子を中性子に変える演算子である．

$$\tau_+ n=p,\qquad \tau_- p=n,$$
$$\tau_+ p=0,\qquad \tau_- n=0.$$

陽子2個あるいは中性子2個からなる系の波動関数は次のように書き表わされる．

$$\begin{aligned}&\text{陽子2個：}\quad p(1)p(2)\psi_1(x_1,\ x_2),\\ &\text{中性子2個：}\quad n(1)n(2)\psi_2(x_1,\ x_2).\end{aligned} \tag{10.20}$$

ここで $p(1)p(2)$ は核子1も核子2も陽子状態であることを示す．また x_1 は核子1の位置座標 $\boldsymbol{r}_1$ とスピン変数 ξ_1 のことである．Fermi 統計から2個の同種粒子の波動関数は反対称でなければならないから，

$$\psi_1(x_2,x_1)=-\psi_1(x_1,\ x_2),\quad \psi_2(x_2,\ x_1)=-\psi_2(x_1,\ x_2). \tag{10.21}$$

陽子と中性子の系は $p(1)n(2)\psi(x_1,\ x_2)$ と書いても $n(1)p(2)\psi(x_2,\ x_1)$ と書いてもあるいはこの二つの1次結合をとっても同じ内容であるが，特にその差をとることにしよう．

$$(1/\sqrt{2})[\,p(1)n(2)\psi(x_1,\ x_2)-n(1)p(2)\psi(x_2,\ x_1)].$$

これは1と2の入れ替えにより符号がかわる．(10.20) もそうなっている．こうして2核子系の荷電変数まで含めた全体の波動関数は粒子1と2の交換に対し反対称であるということができる．3個以上の核子の系も同様な意味で粒子の交換に対し反対称である．

陽子と中性子の系は次の二つの関数の1次結合で表わされる．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[p(1)n(2)+n(1)p(2)]\psi_-(x_1,x_2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[p(1)n(2)-n(1)p(2)]\psi_+(x_1,x_2). \tag{10.22}$$

第1のは荷電変数の部分が 1, 2 の取り替えに対し対称で，全体が反対称であるためには空間部分が反対称でなければならない．第2のは荷電変数の部分が反対称で空間部分が対称である．

$$\psi_-(x_2,x_1)=-\psi_-(x_1,x_2),\quad \psi_+(x_2,x_1)=\psi_+(x_1,x_2). \tag{10.23}$$

空間スピンの場合 (74 ページ) と同じように荷電変数の関数，

$$\begin{aligned} \| 1,1\rangle &= p(1)p(2), \\ \| 1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{p(1)n(2)+n(1)p(2)\}, \\ \| 1,-1\rangle &= n(1)n(2) \end{aligned} \tag{10.24}$$

は全荷電スピン $\boldsymbol{I}=(1/2)(\boldsymbol{\tau}^{(1)}+\boldsymbol{\tau}^{(2)})$ の個有状態で，$I=1$ であり，上から順に I_3 が $+1$, 0, -1 の状態である．また，

$$\| 0,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\{p(1)n(2)-n(2)p(1)\} \tag{10.25}$$

は $I=0$ の状態である．I が1のとき（荷電3重項）は空間部分は 1, 2 の変数の取り替えに対して反対称で，

$${}^1S_0,\ {}^3P_{0,1,2},\ {}^1D_2,\ \cdots \qquad (I=1)$$

の状態が可能である．$I=0$ (荷電一重項) ならば空間部分は対称で，

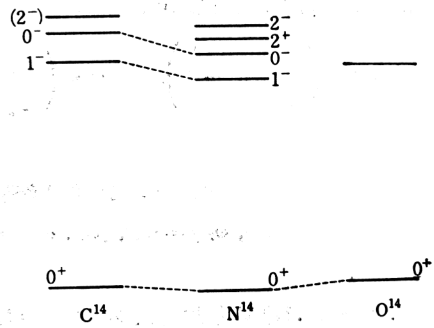
$${}^3S_1,\ {}^1P_1,\ {}^3D_{1,2,3},\ \cdots \qquad (I=0)$$

である．

荷電不変性によれば (10.24) のどの状態でも核力が等しいことになる．($I=0$ の状態は空間状態が $I=1$ のときと異なるので，核力は $I=1$ のと異なる)．(10.24) の3個の状態は荷電空間の回転によって互に移り変るものであるから（問題 3.2 参照)，荷電不変性とは相互作用が荷電空間の回転に対して不変であることを意味する．

重陽子は（普通の）スピンが1で ${}^3S_1$ と ${}^3D_1$ の混った状態であることがわかっている

ので，荷電変数については反対称，すなわちその荷電スピンは 0 である．ヘリウムの核 α 粒子も荷電的に一重項で $I=0$ である．三重水素 H^3 と He^3 は荷電二重項で $I=1/2$，それぞれ $I_3=-1/2$，$+1/2$ の状態である．Be^{10}, B^{10}, C^{10} や C^{14}, N^{14}, O^{14} などは $I=1$ の三重項であることが知られている．これらの 3 個の核のエネルギー準位の構造およびそのエネルギーはほとんど同じである (10-4 図).



10-4 図 C^{14}, N^{14}, O^{14} の 3 重項のエネルギー準位とそのスピン，パリティ．N^{14} では $I=1$ のもののみを書いてある．

[π 中間子の荷電スピン]

π 中間子には正，負，中性の 3 種があるので，荷電スピンが 1，その 3 軸成分が $+1$, 0, -1 の状態をそれぞれ π^+, π^0, π^- と考える．π^+, π^0, π^- の場の量をそれぞれ $\varphi^\dagger$, φ_0, φ とすると，これらは第一種のゲージ変換で，

$$\varphi^\dagger \to e^{-i\lambda}\varphi^\dagger,\ \varphi_0 \to \varphi_0,\ \varphi \to e^{i\lambda}\varphi \tag{10.26}$$

と変換される．これは荷電空間の座標を第 3 軸のまわりに λ だけ回転したとき第 3 軸方向の角運動量 m の状態に $e^{im\lambda}$ がかかることに相当する．荷電空間での一般の回転に対する変換は次のようにして求められる．π 中間子は荷電スピンが 1 で，空間スピンが 1 の光子と同じように考えることができる．$\pi^\pm$ は角運動量が一定の状態で円偏光の光子に相当するが，

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi+\varphi^\dagger), \quad \varphi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varphi-\varphi^\dagger) \tag{10.27}$$

を定義すれば，これらはエルミット量で，それぞれ第 1 軸，第 2 軸方向の成分のみを持つ状態であり，

$$\varphi_3 = \varphi_0 \tag{10.28}$$

とすれば，$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ は 3 次元ベクトル (x, y, z) のように振る舞う．したがって，荷電空間座標を軸 $\boldsymbol{n}$ のまわりに θ だけ回転したときは，

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\varphi_1'\\ \varphi_2'\\ \varphi_3'\end{pmatrix} = \exp(i\theta\boldsymbol{\omega}^0\boldsymbol{n})\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix} \tag{10.29}$$

のように変換する．ただし ω^0 は (6.13) と同じ形の，

$$\omega_1{}^0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \omega_2{}^0=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\quad \omega_3{}^0=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(10.30)

で，荷電スピンの演算子である．これらは角運動量の交換関係，

$$[\omega_1{}^0,\ \omega_2{}^0]=i\omega_3{}^0,\ [\omega_2{}^0,\ \omega_3{}^0]=i\omega_1{}^0,\ [\omega_3{}^0,\ \omega_1{}^0]=i\omega_2{}^0 \qquad (10.31)$$

をみたす．

(3.15)～(3.17) の方法で荷電スピン $I=1,\ I_3=1,\ 0,\ -1$ の状態を作ってみよう．π^0 の状態（φ_3 の状態）を $|1,0\rangle$ とすれば，

$$\omega_\pm{}^0=\omega_1{}^0\pm i\omega_2{}^0 \qquad (10.32)$$

をかけて，

$$\sqrt{2}\,|1,\ 1\rangle=\omega_+{}^0|1,\ 0\rangle=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-i\\1&i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-i\\0\end{pmatrix}=-\varphi_1-i\varphi_2=-\sqrt{2}\,\varphi^\dagger$$

$$\sqrt{2}\,|1,\ -1\rangle=\omega_-{}^0|1,0\rangle=\sqrt{2}\,\varphi,$$

すなわち $-\pi^+,\ \pi^0,\ \pi^-$ が $I=1$ の固有状態で，球関数 $Y_1{}^1,\ Y_1{}^0,\ Y_1{}^{-1}$ と同じように振る舞う．

$$|1,1\rangle=-|\pi^+\rangle,\ |1,0\rangle=|\pi^0\rangle,\ |1,-1\rangle=|\pi^-\rangle. \qquad (10.33)$$

1, 2, 3 成分でなく，$\pi^\pm,\ \pi^0$ の状態に作用する荷電スピン演算子は，

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \omega_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&i&0\\-i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \omega_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

(10.34)

$$\begin{pmatrix}\pi^{+\prime}\\\pi^{0\prime}\\\pi^{-\prime}\end{pmatrix}=\exp\,(i\theta\boldsymbol{\omega n})\begin{pmatrix}\pi^+\\\pi_0\\\pi^-\end{pmatrix}$$

である．

一般に核子と π 中間子が何個か存在する状態は，荷電空間の回転で，

$$\exp(i\theta\boldsymbol{In}) \qquad (10.35)$$

がかかる．ただし，

$$\boldsymbol{I}=\sum_i\boldsymbol{\omega}^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_i\boldsymbol{\tau}^{(i)} \qquad (10.36)$$

は全荷電スピンである．荷電不変のときは相互作用が荷電空間の回転に対して不変であって，系の全荷電スピンは保存量となる．角運動量のときと同じく I^2 と I_3 が互に可換な保存量である．

π 中間子1個と核子1個からなる系では，それぞれの荷電スピンが1および1/2であるから，全体のスピンとしては $I=3/2$ と $I=1/2$ の状態がある．この固有関数は (10.33) に注意して § 3.4 の Clebsch-Gordan 係数により求められる．

$$
\begin{aligned}
I=\frac{3}{2}:\ &\left\|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle=-|\pi^+p\rangle,\\
&\left\|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0p\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^+n\rangle,\\
&\left\|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^-p\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^0n\rangle,\\
&\left\|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=|\pi^-n\rangle.
\end{aligned}
\tag{10.37}
$$

$$
\begin{aligned}
I=\frac{1}{2}:\ &\left\|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=-\sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^0p\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^+n\rangle,\\
&\left\|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=-\sqrt{\frac{2}{3}}|\pi^-p\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}|\pi^0n\rangle.
\end{aligned}
\tag{10.38}
$$

あるいは，逆に解くと，

$$
\begin{aligned}
|\pi^+p\rangle&=-\left\|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle,\\
|\pi^0p\rangle&=\sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}\left\|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\\
|\pi^-p\rangle&=\sqrt{\frac{1}{3}}\left\|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,\\
|\pi^+n\rangle&=-\sqrt{\frac{1}{3}}\left\|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\\
|\pi^0n\rangle&=\sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\left\|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,\\
|\pi^-n\rangle&=\left\|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{10.39}
$$

(10.37) の4個は荷電空間の回転により互に移り変るものであるから，荷電不変の時は S 行列に対し $\left\langle\frac{3}{2},m\|S\|\frac{3}{2},m\right\rangle$ は m によらず一定という関係が得られる．たとえば π^+p 散乱と π^-n 散乱の振幅は等しい．π 中間子と核子の散乱は § 10.4 で扱うことにする．

〔荷電不変性の証拠〕

強い相互作用に対しては荷電不変性が成り立つと考えられているが，いくつかの例でそれを調べてみよう．

1)　重陽子と重陽子の衝突による反応，

$$d+d\rightarrow\alpha+\pi^0 \qquad (\mathrm{I})$$

を考えると，重陽子および α 粒子は荷電スピン 0, π^0 は 1 であるから，始めの状態は $I=0$, 終りは $I=1$ で，荷電スピンが保存するならばこの反応は起こらない．実際，400 MeV の重陽子によるこの断面積は極めて小さい（$<10^{-31}\,\mathrm{cm}^2$）ことが確かめられた．

2)　陽子と重陽子の衝突で，

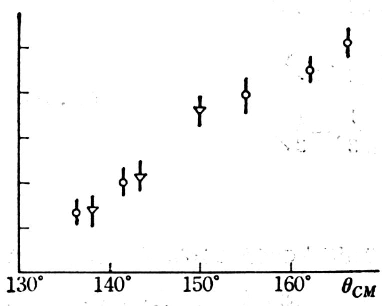
$$\begin{aligned} p+d &\rightarrow \mathrm{H}^3+\pi^+ \\ &\rightarrow \mathrm{He}^3+\pi^0 \end{aligned} \qquad (\mathrm{II})$$

の断面積を比較する．He^3 と H^3 は荷電スピン 1/2 の粒子であるから，終りの状態としては $I=3/2$ と $I=1/2$ の状態があり得るが，始めの I が 1/2（重陽子の I は 0）であるから荷電スピンの保存するときは終状態も $I=1/2$ でなければならない．この状態は (10.38) で核子を He^3, H^3 でおきかえて得られる．すなわち，終状態のうち荷電変数の部分だけを書くと，

$$\psi_f=\left|\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=-\sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi^0\mathrm{He}^3\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\,|\pi^+\mathrm{H}^3\rangle.\right.$$

これをみると $\mathrm{H}^3+\pi^+$ 状態が $\sqrt{2}$, $\mathrm{He}^3+\pi^0$ の状態が 1 の割合いで混っている．したがって，おのおのが見出される確率の比は 2 : 1 で，

$$\frac{d\sigma(p+d\rightarrow\mathrm{H}^3+\pi^+)}{d\sigma(p+d\rightarrow\mathrm{He}^3+\pi^0)}=2 \qquad (10.40)$$



10-5 図　II の反応の微分断面積，○ は H^3 生成の断面積，▽ は He^3 生成の断面積を 2 倍したもの．

である．この関係はどのエネルギー，どの角度でも成り立つべきものである．450 MeV の陽子による実験では 10-5 図にみられるように，この関係はよく成り立っている．

3)

$$\begin{aligned} p+p &\rightarrow d+\pi^+ \\ n+p &\rightarrow d+\pi^0 \end{aligned} \qquad (\mathrm{III})$$

を比較する．終りの状態は $I=1$ でそれぞれ $I_3=1$, $I_3=0$ の状態である．始めの状態の I は 1 と 0 があるが，このうち $I=1$ の状態だけが (III) の反応を起こすことになる．

したがって，始めの状態を荷電スピンの固有状態 (10.24), (10.25) に分解すると，

$$|pp\rangle = \|1,\ 1;\ NN\rangle,$$

$$|np\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|1,\ 0;\ NN\rangle - \|0,\ 0;\ NN\rangle).$$

遷移行列は，

$$\langle d,\ \pi^+|T|p,\ p\rangle = \langle 1,\ 1;\ d\pi|T|1,\ 1;\ NN\rangle,$$

$$\langle d,\ \pi^0|T|n,\ p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,\ 0;\ d\pi|T|1,\ 0;\ NN\rangle.$$

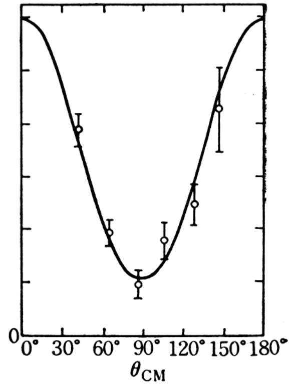
荷電不変性から右辺の $\langle|T|\rangle$ は I_3 の値によらず一定である．よって，

$$\langle d,\ \pi^+|T|p,\ p\rangle = \sqrt{2}\langle d,\ \pi^0|T|n,\ p\rangle.$$

あるいは2乗して，

$$d\sigma(p+p\to d+\pi^+) = 2d\sigma(n+p\to d+\pi^0). \tag{10.41}$$

この関係は 10-6 図に示されるようによく成り立っている．



10-6 図　$n+p\to\pi^0+d$ (400 MeV) の微分断面積 ⫯. 曲線は $p+p\to\pi^++d$ の断面積の半分を比較のため描いたもの.

荷電不変性（荷電スピンの保存）は角運動量の保存のように厳密に成り立つものではない．厳密に成り立つならば陽子と中性子，また荷電 π 中間子と中性 π 中間子の質量は等しいはずであるが，実際は，

$$\delta M = M_n - M_p = 1.29\ \mathrm{MeV}/c^2,\quad \delta\mu = \mu_+ - \mu_0 = 4.59\ \mathrm{MeV}/c^2 \tag{10.42}$$

の差がある．また電磁的相互作用は荷電粒子の間にだけ働くから確かに荷電不変ではない．しかし電磁的相互作用の結合定数 ($e^2/4\pi\hbar c = 1/137$) は強い相互作用にくらべて，1/100 程度小さいし， 質量差 (10.42) も質量自身にくらべて小さいので上の実験結果とあわせて近似的に荷電不変性が成り立つということができる．しかし荷電スピンの保存則には電磁的相互作用等により 1～2% 程度の破れが期待される．以下特に必要でないかぎり質量差は無視して核子の質量は M, π 中間子のは μ とする．

[粒子・反粒子反転 C と G 共役変換]

粒子・反粒子反転 C により粒子と反粒子は相互に移り変る．$\pi^\pm$ の1個存在する状態は C により $\pi^\mp$ が1個存在する状態に移るが，(6.125) により，

$$C|\pi^+\rangle = Ca^\dagger|0\rangle = \eta_c{}^*b^\dagger|0\rangle = \eta_c{}^*|\pi^-\rangle,$$

$$C|\pi^-\rangle = Cb^\dagger|0\rangle = \eta_c a^\dagger|0\rangle = \eta_c|\pi^+\rangle.$$

$\pi^{\mp}$ 状態の位相を変えて $\sqrt{\eta_c}|\pi^+\rangle$, $\sqrt{\eta_c^*}|\pi^-\rangle$ をそれぞれ新しく $|\pi^+\rangle$, $|\pi^-\rangle$ と考え直すと上式は $\eta_c=\eta_c^*=1$ ととったのに相当し，

$$C|\pi^{\pm}\rangle=|\pi^{\mp}\rangle \tag{10.43}$$

となる．反粒子が自分自身に等しい π^0 中間子では $\eta_c=\pm 1$ のいずれかで，

$$C|\pi^0\rangle=\pm|\pi^0\rangle$$

である．この正負を決めるために π^0 が2個の光子にこわれることに着目しよう．

さて，光子は電子等の荷電粒子と minimal な相互作用をする．たとえば電子と光子の相互作用は (8.78) で与えられる．

$$H=e\int\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi d\boldsymbol{r}.$$

これは電子の作る荷電・電流密度 $j_\mu(=e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)$ と A_μ の積で与えられるが，153 ページの表より j_μ の C 変換に対する変換性は，

$$j_\mu\to -j_\mu$$

である．もし電磁的相互作用が C 変換に対して不変ならば同じ C 変換に対し，

$$A_\mu\to -A_\mu.\qquad (C\ 変換) \tag{10.44}$$

A_μ の展開式 (6.43) と (10.44) より，C 変換に対し $\eta_c=-1$，すなわち，

$$a^\dagger(\boldsymbol{k},h)\to -a^\dagger(\boldsymbol{k},h),\quad a(\boldsymbol{k},h)\to -a(\boldsymbol{k},h).\quad (C\ 変換) \tag{10.45}$$

$\pi^0\to 2\gamma$ で終状態の二つの γ が π^0 の静止系で $(\boldsymbol{k},h)$, $(-\boldsymbol{k},h)$ とすると，

$$a^\dagger(\boldsymbol{k},h)a^\dagger(-\boldsymbol{k},h)|0\rangle.$$

これに C 変換 (10.45) を行なうと $(-1)^2=1$ で元と同じ状態になる．したがって終状態は $C=+1$ の固有状態である．もし相互作用が C 変換に対し不変ならば始状態 π^0 は $C=+1$ の固有状態でなければならない．

$$C|\pi^0\rangle=|\pi^0\rangle. \tag{10.46}$$

このように π^0 の η_c は $\pi^0\to 2\gamma$ 過程の C 不変性を仮定して求めたが，一度，このように η_c を決めると他の過程を用いて C 不変性が成立するかどうかを確かめ得る．たとえば $\pi^0\to 3\gamma$ が見出されれば π^0, 3γ はそれぞれ C の $+1$, $(-1)^3=-1$ の固有状態であるから，C 不変性は成立しないことになる．強い相互作用および電磁的相互作用では C 不変性が成立していることが確かめられている．

C 変換を (π^+,π^0,π^-) に作用する行列で書くと (10.43), (10.46) より，

$$C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}. \tag{10.47}$$

(10.34) の荷電スピン演算子 $\boldsymbol{\omega}$ と C は可換ではない．π 中間子のみ考えるときは $\boldsymbol{\omega}$ は全荷電スピン $\boldsymbol{I}$ に等しいので，$\boldsymbol{\omega}$ の代りに $\boldsymbol{I}$ と書くと，

$$CI_1 = -I_1C, \quad CI_2 = I_2C, \quad CI_3 = -I_3C \tag{10.48}$$

である．このように C は荷電空間の対称性をこわし，また I_3 の固有状態である π^+, π^- は C の固有状態にはなれない．

$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ に対する働き方を考えると，$\eta_c = \eta_c{}^* = 1$ より粒子・反粒子反転により $\varphi \leftrightarrow \varphi^\dagger$ で，(10.27) より，

$$\varphi_1 \to \varphi_1, \quad \varphi_2 \to -\varphi_2, \quad \varphi_3 \to \varphi_3 \tag{10.49}$$

の変換をする．すなわち C は荷電空間の第 2 軸の向きを逆転させる働きをする．そこでさらに第 1 軸，第 3 軸の向きも逆転してやれば 1, 2, 3 軸に対し対称な変換になるが，これは座標軸を第 2 軸のまわりに 180° 回転してやればよい．したがって，この回転を粒子・反粒子変換に続けて行なう変換（これを **G 共役変換**という），

$$G = e^{i\pi I_2}C = Ce^{i\pi I_2} \tag{10.50}$$

を考える．$(G^{-1} = Ce^{-i\pi I_2} = e^{-i\pi I_2}C)$

$$e^{i\pi I_2}I_1e^{-i\pi I_2} = I_1 + i\pi[I_2, I_1] + \frac{(i\pi)^2}{2!}[I_2, [I_2, I_1]] + \cdots$$

$$= I_1 + \pi I_3 - \frac{\pi^2}{2!}I_1 + \cdots = I_1 \cos\pi + I_3 \sin\pi = -I_1,$$

$$e^{i\pi I_2}I_2e^{-i\pi I_2} = I_2, \qquad e^{i\pi I_2}I_3e^{-i\pi I_2} = -I_3 \tag{10.51}$$

であるから，(10.48) と合わせて用いると，

$$G\boldsymbol{I}G^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{10.52}$$

で，G 変換は荷電スピンと可換である．いまは π 中間子の場合を考えたが，核子に対してもこれが成り立つことが示される（問題 10.4）．

荷電スピンが I，その第 3 軸成分が I_3 の粒子に G 変換をすれば，やはり荷電スピンが I, 第 3 軸成分が I_3 の反粒子が得られる．特に π 中間子の場合は，

$$G|\pi^{\pm,0}\rangle = -|\pi^{\pm,0}\rangle, \qquad G = -1 \tag{10.53}$$

である．核子に G 変換をすると，

$$e^{i\pi I_2} = e^{i\frac{\pi}{2}\tau_2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\tau_2 \sin\frac{\pi}{2} = i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

であるから，

$$G\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = Ce^{i\pi I_2}\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} n \\ -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix}. \tag{10.54}$$

したがって，反核子では $(\bar{n}, -\bar{p})$ が荷電スピン 1/2 で I_3 が $\pm 1/2$ の状態である．

核子数 N の状態は G 共役変換で核子数が $-N$ の状態になるので，G の固有状態になれるのは $N=0$ の状態のみである．この状態の荷電スピンは整数であるから $G^2=e^{i2\pi I_2}=1$ となり，G の固有値は ± 1 に限られる．空間反転と事情が似ているので，この ± 1 の固有値を G の固有状態の **G パリティ** という．π 中間子の G パリティは -1 である．Hamiltonian が C 不変および荷電スピンを保存すれば G 共役変換に対しても不変だから G パリティは保存量であり反応の前後で変らない．このことから偶数個の π 中間子が奇数個の π 中間子になる反応は禁止される．G共役変換は粒子・反粒子反転と荷電空間の回転を組み合わせたものであるから，荷電不変性が成り立たないときはG変換に対する不変性もこわれる．したがって，電磁的相互作用等により，Gパリティの保存も微細構造定数（～1/100）程度の破れがあるはずである．

〔荷電対称性〕

核子間に働く核力は陽子と中性子の交換に対し対称である（10.11）．一般に次の変換

$$p \rightleftarrows n, \quad \pi^+ \rightleftarrows \pi^-, \quad \pi^0 \leftrightarrow \pi^0 \tag{10.55}$$

を **荷電対称変換** とよび，この変換をしても物理量，散乱振幅などが不変のとき，これらは荷電対称性を持つという．

荷電空間の回転に対する不変性が成立している時には，特に第2軸のまわりに 180° まわしても不変である．これより I_3 は符号を変えるから（(10.51)），I_3 の固有状態はこの回転により固有値 $-I_3$ の状態に移る．具体的には，

$$\pi^+ \to -\pi^-, \ \pi^0 \to -\pi^0, \ \pi^- \to -\pi^+, \ p \to n, \ n \to -p, \ (\bar{n} \to -\bar{p}, \ \bar{p} \to \bar{n})$$

この置き換えで物理量は不変である．荷電対称変換（10.55）はさらにある粒子に（-1）を掛けることになる．しかし異なる粒子状態の間の位相差は荷電の保存則等により決して測れないので，この ± 1 は問題とならない．したがって荷電不変の時は荷電対称性が結論される（逆は成り立たない）．

電磁的相互作用はたとえば p は minimal な電磁的相互作用を持つのに n は持たないから，明らかに荷電対称性を破っている．したがって G パリティの保存等と同様に電磁的相互作用による ～1/100 程度の破れが期待される．

〔問題 10.3〕 陽子・核子衝突で π 中間子を作る反応として次のものが考えられる．

$$\begin{aligned} p+p &\to p+p+\pi^0 & \qquad \sigma_{pp}{}^0 \\ &\to p+n+\pi^+ & \sigma_{pp}{}^+ \\ p+n &\to p+p+\pi^- & \sigma_{pn}{}^- \\ &\to p+n+\pi^0 & \sigma_{pn}{}^0 \\ &\to n+n+\pi^+ & \sigma_{pn}{}^+ \end{aligned}$$

そのおのおの反応の断面積を右のように書いたとき，荷電不変ならば，

$$\frac{\sigma_{pp^+} + \sigma_{pn^+} + \sigma_{pn^-}}{\sigma_{pp^0} + \sigma_{pn^0}} = 2$$

であることを証明せよ．

［ヒント］ 終状態の2核子の合成荷電スピンが0のときと1のときと分けて議論せよ．

［問題 10.4］ 陽子と中性子の状態 $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ は荷電空間の回転で（10.18）のように変換されるが，$\begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix}$ の2成分も $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ と同じように変換されることを示せ．

そこで反核子まで並べた，

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \\ \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix}$$

という4成分を考えるとき，荷電スピンは，

$$I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$$

で与えられる．この表示で粒子・反粒子反転 C および G 共役変換の行列を求め（10.48）の関係および G と I が可換であることを確かめよ．

［問題 10.5］ 次の量は G 変換でどのように変るか．

$$\bar{\psi}\tau\psi, \quad \bar{\psi}\gamma_\mu\tau\psi, \quad i\psi\gamma_5\tau\psi.$$

§ 10.3 核子と π 中間子の相互作用

保存則をもとにして π 中間子の性質を調べた結果，π 中間子は擬スカラーで，荷電スピン 1，すなわち荷電空間のベクトルであることがわかった．そこでこの条件をみたすような相互作用エネルギーの具体的な形を書いてみよう．局所的な湯川型を仮定するならば，相互作用のエネルギー密度は空間の1点で核子を消し，核子と中間子を作るという場の量を掛け合わせたものである．

核子を表わす場の量 $\psi_N(x)$ は（10.15）のように陽子の場 $\psi_p(x)$ と中性子の場 $\psi_n(x)$ を並べたものである．

$$\psi_N(x) = \begin{pmatrix} \psi_p(x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_N(x) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_p(x) \\ \bar{\psi}_n(x) \end{pmatrix}. \tag{10.56}$$

$\psi_p(x)$ は (7.53) のように展開され，陽子を吸収し，反陽子を作る演算子であり，ψ_n, $\bar{\psi}_p$ 等も同じように演算子である．ψ_p, ψ_n はおのおの4成分スピノルで Lorentz 変換で各4成分が互に変換し，荷電空間の回転で ψ_p と ψ_n が（10.18）のように変換する．すなわち ψ_N は荷電空間の（2成分）スピノルである．§ 7.1 と同じようにして

$$\bar{\psi}_N\tau\psi_N = (\bar{\psi}_N\tau_1\psi_N,\ \bar{\psi}_N\tau_2\psi_N,\ \bar{\psi}_N\tau_3\psi_N) \tag{10.57}$$

は荷電空間の回転でベクトルのように変換することが確かめられる.

π 中間子の場は (10.27), (10.28) のように書くと $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ は荷電ベクトルとなり, φ_α はエルミット量である. π 中間子と核子の相互作用は (9.96), (9.97) の形に書けるが, それは,

$$f\bar{\psi}_N\tau_-\psi_N\varphi^\dagger+f\bar{\psi}_N\tau_+\psi_N\varphi=\frac{f}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_N\tau_1\psi_N\varphi_1+\bar{\psi}_N\tau_2\psi_N\varphi_2),$$

$$f'\bar{\psi}_N\frac{1+\tau_3}{2}\psi_N\varphi_0+f''\bar{\psi}_N\frac{1-\tau_3}{2}\psi_N\varphi_0=\frac{1}{2}(f'+f'')\bar{\psi}_N\psi_N\varphi_3$$
$$+\frac{1}{2}(f'-f'')\bar{\psi}_N\tau_3\psi_N\varphi_3$$

と書くことができる. 一般にこの和は荷電空間の回転で不変でないが, 特に結合定数が

$$f'=-f''=\frac{f}{\sqrt{2}} \tag{10.58}$$

の関係にあるときは,

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\bar{\psi}_N\tau_\alpha\psi_N\varphi_\alpha=\bar{\psi}_N\boldsymbol{\tau}\psi_N\boldsymbol{\varphi} \tag{10.59}$$

の形で, 2個の荷電空間ベクトルの内積であるから回転に対し不変である. (ベクトルは太字で書くことにする). 荷電不変の相互作用は (10.59) の形でなければならない.

次に Lorentz 変換に対する不変性を調べよう. スピン 1/2 粒子の場 $\psi, \bar{\psi}$ の2次形式から作られるエルミット量の Lorentz 変換性は (154 ページの表を参照),

$i\bar{\psi}\gamma_5\psi$	擬スカラー
$\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$	擬ベクトル

等である. また φ が擬スカラーの場なら, $\partial_\mu\varphi$ は擬ベクトルである. したがって, これから作られる湯川型の相互作用で Lorentz 不変のものは,

$$i\psi\gamma_5\psi\varphi,$$
$$\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi\partial_\mu\varphi$$

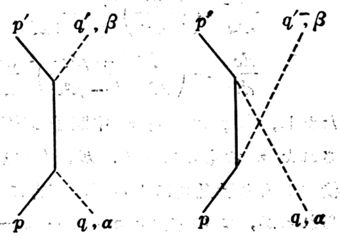
である. これに反し, たとえば $\bar{\psi}\psi\varphi$ は空間反転に対し不変でない. この他にもっと高階の微分を含むものも考えられるが, 相互作用が局所的であるとすると場の量の高階微分を含むのはあまり適当でないことが知られている.

結局, 核子と π 中間子の相互作用が Lorentz 不変で荷電不変であることから相互作用密度は,

$$H(x)=ig\bar{\psi}_N\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi_N\boldsymbol{\varphi}+\frac{f\hbar}{\mu c}\bar{\psi}_N\gamma_5\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\psi_N\partial_\mu\boldsymbol{\varphi} \tag{10.60}$$

の形となる. これはエルミット量である. g を擬スカラー結合定数, f を擬ベクトル結

合定数という.



10－7 図

例題として (10.60) の相互作用による π 中間子と核子の散乱振幅を § 9.4 の方法で計算しよう. 簡単のため擬スカラー結合のみ ($f=0$) とする. 4次元運動量を 10－7 図のように定義し, $\alpha(=1, 2, 3)$ という種類の π 中間子が入って β が出ていくときは,

$$\langle p', q', \beta | F_1 | p, q, \alpha\rangle = \frac{1}{c}\varphi_\beta(q')\bar{u}(p')ig\gamma_5\tau_\beta\frac{\gamma_\mu(p+q)_\mu - Mc}{M^2c^2+(p+q)_\mu{}^2}ig\gamma_5\tau_\alpha u(p)\varphi_\alpha(q).$$

ここで, F は (9.131) の T で $\delta_{\Sigma p', \Sigma p}$ を除いたものである. また,

$$p_\mu{}^2 = p_\mu{}'^2 = -M^2c^2, \quad q_\mu{}^2 = q_\mu{}'^2 = -\mu^2c^2, \tag{10.61}$$

$$\gamma_\mu p_\mu u(p) = -Mcu(p), \quad \bar{u}(p')\gamma_\mu p_\mu' = -Mc\bar{u}(p') \tag{10.62}$$

であるから,

$$F_1 = \frac{g^2}{c}\varphi_\beta(q')\bar{u}(p')\frac{\gamma_\mu q_\mu\tau_\beta\tau_\alpha}{2p_\mu q_\mu - \mu^2c^2}u(p)\varphi_\alpha(q). \tag{10.63}$$

同様に,

$$F_2 = \frac{g^2}{c}\varphi_\beta(q')\bar{u}(p')\frac{\gamma_\mu q_\mu'\tau_\alpha\tau_\beta}{2p_\mu q_\mu' + \mu^2c^2}u(p)\varphi_\alpha(q). \tag{10.64}$$

π^- と陽子の散乱の場合は $\tau_\alpha \to (\tau_1 - i\tau_2)/\sqrt{2} = \sqrt{2}\tau_-$, $\tau_\beta \to \sqrt{2}\tau_+$ とし, $u(p)$ を陽子の状態とする. このときは $\tau_\beta\tau_\alpha u(p) = 2u(p)$, $\tau_\alpha\tau_\beta u(p) = 0$ で F_2 は0である. π^+ と陽子散乱のときは逆に $\tau_\beta\tau_\alpha u(p) = 0$, $\tau_\alpha\tau_\beta u(p) = 2u(p)$ となる.

はじめ陽子が止っていたならば (実験室系) $p_\mu = (0, Mc)$ で, (10.63), (10.64) の分母は, それぞれ,

$$-2EM - \mu^2c^2, \quad -2E'M + \mu^2c^2$$

となる. ただし, E, E' は実験室系での入射, 放出 π 中間子のエネルギーである. とくに前方散乱のときは ($p_\mu' = p_\mu = (0, Mc)$), (7.37), (7.39) の解からわかるように, $\bar{u}(p)\gamma_0 u(p) = 1$, $\bar{u}(p)\gamma u(p) = 0$, $E = E'$ であるから,

$$F_- = \frac{g^2\hbar^2}{L^3(2ME + \mu^2c^2)}, \qquad F_+ = \frac{g^2\hbar^2}{L^3(2ME - \mu^2c^2)} \tag{10.65}$$

となる. ここで $F_\pm$ は陽子と $\pi^\pm$ 中間子の散乱の場合の F である.

(10.63), (10.64) から π と陽子散乱の断面積を求めることができるが, 結果だけを書くことにする.

$$\frac{d\sigma_-}{d\Omega}=\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)^2\frac{2q'^3}{qc^2}\frac{2MEE'-\mu^2c^2(E-E')}{(2ME+\mu^2c^2)^2[MEE'-\mu^2c^2(Mc^2+E-E')]},$$

$$\frac{d\sigma_+}{d\Omega}=\left(\frac{2ME+\mu^2c^2}{2ME'-\mu^2c^2}\right)^2\frac{d\sigma_-}{d\Omega}.$$

ただし，E, q は入射 π 中間子の実験室系でのエネルギーおよび運動量で，E', q' は散乱された π のものである．E', q' は散乱角によって変わるが，低エネルギーでは微分断面積はあまり散乱角によらず，前方にやや多い程度である．全断面積は角度で積分して求められるが，π の運動エネルギー $E-\mu c^2$ が μc^2 にくらべて小さいという近似をすると，

$$\begin{aligned}\sigma_-&=4\pi\left(\frac{g^2}{4\pi Mc^2}\right)^2\left(1+\frac{\mu}{2M}\right)^{-2}\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^{-2},\\ \sigma_+&=4\pi\left(\frac{g^2}{4\pi Mc^2}\right)^2\left(1-\frac{\mu}{2M}\right)^{-2}\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^{-2}\end{aligned}\qquad(10.66)$$

でエネルギーによらずほぼ一定である．$g^2/4\pi\hbar c=14$（10.76）とすると σ_+ は 800 mb，σ_- は 600 mb 程度で，これらは実験結果と全然合わない（10-8 図）．

〔静的近似と核力〕

π 中間子の運動量が小さくて核子の運動エネルギーが無視できる場合（運動量 $\ll Mc$ のとき）相互作用（10.60）がどのように表わされるかを調べる．核子 p が π 中間子 q を放出して核子 $p'(=p-q)$ になる行列要素を問題にしよう．$u, \bar{u}$ は（10.62）をみたすから，

$$u(p)=-\frac{1}{Mc}\gamma_\mu p_\mu u(p),\quad \bar{u}(p')=-\frac{1}{Mc}\bar{u}(p')\gamma_\mu p_\mu'.$$

これを使って，疑スカラー結合は，

$$\begin{aligned}i\bar{u}(p')\gamma_5u(p)&=-\frac{i}{2Mc}\bar{u}(p')(\gamma_\mu p_\mu'\gamma_5+\gamma_5\gamma_\mu p_\mu)u(p)\\ &=-\frac{i}{2Mc}\bar{u}(p')\gamma_5\gamma_\mu(p-p')_\mu u(p)\end{aligned}$$

となり，擬ベクトル結合と同じ形となる．$p-p'$ は核子が $p\to p'$ の遷移をして放出する π 中間子の運動量 q に等しい．Dirac 行列として（7,30）をとり，u の第3, 4成分は第1, 2 成分にくらべて小さい（(7.37) および (7.39)）から無視することにすれば，

$$\gamma_5\gamma_i=\begin{pmatrix}-\sigma_i & 0\\ 0 & \sigma_i\end{pmatrix}\to-\sigma_i,\quad \gamma_5\gamma_0=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\to 0$$

としてよい．こうして（10.60）の H' の行列要素は，

$$\langle p', q, \alpha|H'|p\rangle=i\frac{f'}{\mu}\hbar\sqrt{\frac{1}{2E_qL^3}}\langle p'|\sigma_kq_k\tau_\alpha|p\rangle.\qquad(10.67)$$

ただし，$|p\rangle, |p'\rangle$ は核子のスピン，荷電スピンの波動関数で，

$$f' = f + \frac{\mu}{2M}g \tag{10.68}$$

である．すなわち $f = g\mu/2M$ とおくならば，擬スカラー結合と擬ベクトル結合は同じ結果を与える．これを**等価定理**（equivalence theorem）という．もちろん反核子の作られる過程も考えるならば，等価定理は成り立たない．今後 f' を単に f と書くことにする．

(10.67) の行列要素は Hamiltonian を，

$$H' = -\frac{f\hbar}{\mu c}\int \psi^*(\boldsymbol{r})\sigma_k\tau_\alpha\psi(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial r_k}\varphi_\alpha(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = -\frac{f\hbar}{\mu c}\sum_i \sigma_k{}^{(i)}\tau_\alpha{}^{(i)}\frac{\partial}{\partial r_k}\varphi_\alpha(\boldsymbol{r}_i) \tag{10.69}$$

ととることに相当する．最後の式は核子 i が $\boldsymbol{r}_i$ の位置に止っているとして書いたものである．これが**静的近似**（static approximation）の Hamiltonian である．$\boldsymbol{\sigma}$ は3次元空間の軸性ベクトル（空間反転で符号を変えないベクトル）であり，$\partial\varphi/\partial\boldsymbol{r}$ も同じ変換性であるから，この Hamiltonian は空間の回転および反転に対し不変である．荷電不変であることはもちろんである．π 中間子が放出されるときは核子のスピンが動き出てくる π 中間子は P 波 $(l=1)$ である．π が擬スカラーであるからパリティの保存により S 波は出られない．

(10.69) の Hamiltonian あるいは (10.67) の行列要素から § 9.3 のようにして核子間のポテンシャルを出すことができる．核子1の作る中間子の場は，

$$\varphi_\alpha(\boldsymbol{r}) = \frac{f\hbar}{4\pi\mu c}\tau_\alpha{}^{(1)}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\right)\frac{\exp-\mu c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|/\hbar}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} \tag{10.70}$$

である．正しくは核子1の二つの状態 $|1\rangle$, $|1'\rangle$ の間の行列要素に対し，

$$\langle 1'|\varphi_\alpha(\boldsymbol{r})|1\rangle = \frac{f\hbar}{4\pi\mu c}\langle 1|\tau_\alpha{}^{(1)}\sigma_k{}^{(1)}|1\rangle\frac{\partial}{\partial r_k}\,\frac{\exp-\mu c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|/\hbar}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} \tag{10.71}$$

という式になるのであるが，これを略して (10.70) のように書くことにする．これを (10.69) に入れて核子 1，2 の間に働くポテンシャルは，

$$V(1,2) = -\frac{f^2\hbar^2}{4\pi\mu^2c^2}(\boldsymbol{\tau}^{(1)}\boldsymbol{\tau}^{(2)})\left(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_2}\right)\frac{\exp-\mu c|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|/\hbar}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}, \tag{10.72}$$

あるいは微分を実行すると，

$$V(1,2) = \mu c^2\frac{f^2}{4\pi\hbar c}(\boldsymbol{\tau}^{(1)}\boldsymbol{\tau}^{(2)})\left[\frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) + \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)S_{12}\right]Y(x).\quad x \neq 0 \tag{10.73}$$

ただし，

$$S_{12}=\frac{3(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^2}-(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}),\quad Y(x)=\exp(-x)/x,$$

$$\boldsymbol{x}=\frac{\mu c\boldsymbol{r}}{\hbar},\qquad x=|\boldsymbol{x}|,\qquad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2 \tag{10.74}$$

である．これは二つの荷電ベクトル $\boldsymbol{\tau}^{(1)}, \boldsymbol{\tau}^{(2)}$ の内積で，荷電不変である．この核力は到達距離が $r_0\sim\hbar/\mu c$ で $r>r_0$ では急に小さくなるが，これは次の議論から理解される．核子1が π 中間子を出している時間は不確定関係から $\Delta t\sim\hbar/\mu c^2$ である．この間に π 中間子が光速度で進んだとしても，とどく距離は $\Delta tc\sim\hbar/\mu c=r_0$ である．これが核子のまわりに存在する π 中間子の雲の拡がりをあたえ，また核力の到達距離でもある．核子間に2個の π 中間子を交換する力も存在するが，同じ議論によりその到達距離は $r_0/2$ となる．したがって，$r\sim r_0$ および $r>r_0$ では1個の π 中間子交換による力 $V(12)$ が主なものであり，$r<r_0/2$ となると2個あるいはそれ以上の中間子交換の力も重要となってくる．

重陽子の状態は荷電スピンが0で，

$$0=(\boldsymbol{\tau}^{(1)}+\boldsymbol{\tau}^{(2)})^2=\boldsymbol{\tau}^{(1)2}+\boldsymbol{\tau}^{(2)2}+2(\boldsymbol{\tau}^{(1)}\boldsymbol{\tau}^{(2)})=3+3+2(\boldsymbol{\tau}^{(1)}\boldsymbol{\tau}^{(2)}),$$

$$(\boldsymbol{\tau}^{(1)}\boldsymbol{\tau}^{(2)})=-3$$

である．また空間スピンは1で同様にして $(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}^{(2)})=1$．ゆえに，この状態で S_{12} を含まない V は負で引力である．S_{12} を含む**テンソル力**は $\boldsymbol{r}$ がスピンと平行のとき引力垂直のとき斥力でスピン方向に細長くなった葉巻形の重陽子(電気的4重極能率 Q が正の形）が安定である．

$$f^2/4\pi\hbar c\approx 0.08 \tag{10.75}$$

の程度にとると重陽子の性質，低エネルギー核子・核子散乱などがよく説明できる．ただし，$r<r_0/2$ では V (10.73) だけでは不十分で適当な力を仮定しなければならない．また (10.75) は等価原理から擬スカラー結合の結合定数に直すと，

$$g^2/4\pi\hbar c=\left(\frac{2M}{\mu}\right)^2\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\approx 14 \tag{10.76}$$

である．

§ 10.4 π 中間子反応と共鳴準位

π 中間子と核子の散乱のうち容易に実験できるのは，

$$\pi^+ + p\rightarrow p+\pi^+,$$

$$\pi^- + p \to p + \pi^-,$$

$$\pi^- + p \to n + \pi^0$$

の三つである．π^0 は寿命が短かすぎるため入射粒子として用いられない．また中性子を的とする散乱は荷電対称性から，たとえば，

$$\sigma(\pi^+ + n \to p + \pi^0) = \sigma(\pi^- + p \to n + \pi^0) \tag{10.77}$$

と考えられる．荷電対称性がよいことは，

$$\sigma(\pi^+ + d \to \pi^+ + d) = \sigma(\pi^- + d \to \pi^- + d) \tag{10.78}$$

等で確かめられる．たとえば，58 MeV の π 中間子に対し（10.78）の左辺は 38.3 ± 3.1 mb，右辺は 32.8 ± 3.1 mb である．したがって，荷電対称を認めれば陽子を的とする散乱を考えれば充分である．

この散乱を結合定数のべき展開で求めると前節で見たように全然実験と一致しない．これは光子の場合の結合定数 α が 1/137 であったのにくらべて，$g^2/4\pi\hbar c$ は 14 と極めて大きいので，べき展開の収束が悪いためと考えられる．この節ではそのような計算でなく実験からどのようなことが結論されるかを調べよう．そのために散乱振幅を部分波に分解して考える．300 MeV 程度までの π 中間子ならば，散乱振幅は S 波と P 波の位相のずれだけで表わされるだろう（232 ページ）．

（10.39）によれば π 散乱の遷移行列は，

$$\begin{aligned}
\langle p\pi^+|T|p\pi^+\rangle &= T_{3/2}, \\
\langle p\pi^-|T|p\pi^-\rangle &= \frac{1}{3}T_{3/2} + \frac{2}{3}T_{1/2}, \\
\langle n\pi^0|T|p\pi^-\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3}(T_{3/2} - T_{1/2})
\end{aligned} \tag{10.79}$$

と二つの量で書き表わされる．

$$T_{3/2} = \left\langle \frac{3}{2} \| T \| \frac{3}{2} \right\rangle,$$

$$T_{1/2} = \left\langle \frac{1}{2} \| T \| \frac{1}{2} \right\rangle$$

は荷電スピンがそれぞれ 3/2, 1/2 での振幅である．まず $I = 3/2$ の場合（π^+ と陽子の散乱）を考えよう．重心系をとり軌道角運動量を l とすると全角運動量は $J = l + 1/2$ と $l - 1/2$ の二つの状態があり，これらによって S 行列は完全に対角行列となる（233 ページ）．したがって散乱振幅は位相のずれ $\delta_{l+}(J = l + 1/2,\ l = 0, 1, 2, \cdots)$ と $\delta_{l-}(J = l - 1/2,\ l = 1, 2, \cdots)$ によって表わされる．

散乱前の始状態は π 中間子の進行方向を z 軸にとって，

$$e^{iqr/\hbar}u_{\pm}=e^{ikz}u_{\pm} \quad k=|q|/\hbar \tag{10.80}$$

で与えられる．$u_{\pm}$ は陽子のスピンが上，下向きの状態である．これは充分遠方で，

$$e^{ikz}u_{\pm}\approx\frac{1}{2ikr}\sum i^{l}(2l+1)\left[e^{i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}-e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right]P_{l}(\cos\theta)u_{\pm} \quad (r\to\infty) \tag{10.81}$$

である．散乱を受けると外向きの波に S 行列が掛けられるのであるが，それをするには，$P_{l}(\cos\theta)u_{\pm}$ を $J=l+1/2$ と $l-1/2$ の固有状態に分解しておかなければならない．固有関数は，

$$\begin{aligned}\left\|J=l+\frac{1}{2},J_{z}=\pm\frac{1}{2}\right\rangle&=\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}Y_{l}^{0}u_{\pm}+\sqrt{\frac{l}{2l+1}}Y_{l}^{\pm1}u_{\mp},\\ \left\|J=l-\frac{1}{2},J_{z}=\pm\frac{1}{2}\right\rangle&=-\sqrt{\frac{l}{2l+1}}Y_{l}^{0}u_{\pm}+\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}Y_{l}^{\pm1}u_{\mp}.\end{aligned} \tag{10.82}$$

したがって，(9.50) を用いると，

$$(2l+1)P_{l}(\cos\theta)u_{\pm}=\sqrt{4\pi}\left(\sqrt{l+1}\left\|J=l+\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{l}\left\|J=l-\frac{1}{2}\right\rangle\right).$$

散乱波は，

$$\psi_{\pm}\approx\frac{e^{ikr}}{2ikr}\sqrt{4\pi}\sum\left[(S_{l+}-1)\sqrt{l+1}\left\|J=l+\frac{1}{2}\right\rangle-(S_{l-}-1)\sqrt{l}\left\|J=l-\frac{1}{2}\right\rangle\right]. \tag{10.83}$$

ここで $\|J=l\pm1/2,J_{z}=\pm1/2\rangle$ の代りに略して $\|J=l\pm1/2\rangle$ と書いた．ψ についている $\pm$ は $J_{z}=\pm1/2$ を意味する．

(10.82) を使って Y_{l}^{m} にもどすと散乱振幅は (9.59) のかわりに，

$$\begin{aligned}f_{\pm}(\theta)=\sqrt{4\pi}\sum\Bigg[&\{(l+1)f_{l+}+lf_{l-}\}\frac{1}{\sqrt{2l+1}}Y_{l}^{0}u_{\pm}\\&+(f_{l+}-f_{l-})\sqrt{\frac{l(l+1)}{2l+1}}Y_{l}^{\pm1}u_{\mp}\Bigg].\end{aligned} \tag{10.84}$$

ただし，$f_{l\pm}$ は部分波の散乱振幅で，

$$f_{l\pm}=\frac{e^{i\delta\pm}\sin\delta_{l\pm}}{k}. \tag{10.85}$$

断面積は $|f_{\pm}|^{2}$ で与えられる（f_{+} も f_{-} も同一の $d\sigma/d\Omega$ を与える）．

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}=4\pi&\left|\sum_{l}\frac{(l+1)f_{l+}+lf_{l-}}{\sqrt{2l+1}}Y_{l}^{0}(\theta,\varphi)\right|^{2}\\&+4\pi\left|\sum_{l}\frac{f_{l+}-f_{l-}}{\sqrt{2l+1}}\sqrt{l(l+1)}\,Y_{l}^{1}(\theta,\varphi)\right|^{2}.\end{aligned} \tag{10.86}$$

以上は π^+ と陽子の散乱という荷電スピンが純粋の $I=3/2$ の状態を考えたのであるが，(10.79) より一般の場合には，

$$
\begin{aligned}
f_{l\pm}(\pi^+ + p \to p + \pi^+) &= f_{l\pm}\left(I=\frac{3}{2}\right),\\
f_{l\pm}(\pi^- + p \to p + \pi^-) &= \frac{1}{3}\left\{f_{l\pm}\left(I=\frac{3}{2}\right) + 2f_{l\pm}\left(I=\frac{1}{2}\right)\right\},\\
f_{l\pm}(\pi^- + p \to n + \pi^0) &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left\{f_{l\pm}\left(I=\frac{3}{2}\right) - f_{l\pm}\left(I=\frac{1}{2}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{10.87}
$$

とすればよい．いずれの場合も散乱振幅，断面積は $\delta_{l\pm}\left(I=\frac{3}{2}\right)$ と $\delta_{l\pm}\left(I=\frac{1}{2}\right)$ によって書き表わされる．

10－1 表

	$S_{1/2}$	$P_{1/2}$	$P_{3/2}$
$I=\frac{1}{2}$	δ_1	δ_{11}	δ_{13}
$I=\frac{3}{2}$	δ_3	δ_{31}	δ_{33}

比較的低エネルギー（＜300 MeV）のときは S 波と P 波の散乱を考えれば充分だろうから，10－1 表の 6 個の位相のずれを問題にする．このときは，たとえば，π^+ と陽子の散乱は (10.86)，(10.85) より，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma_+}{d\Omega} = \frac{1}{k^2}&|e^{i\delta_3}\sin\delta_3 + (2e^{i\delta_{33}}\sin\delta_{33} + e^{i\delta_{31}}\sin\delta_{31})\cos\theta|^2\\
&+ \frac{1}{k^2}|e^{i\delta_{33}}\sin\delta_{33} - e^{i\delta_{31}}\sin\delta_{31}|^2\sin^2\theta
\end{aligned}
\tag{10.88}
$$

で与えられる．全断面積は，

$$
\sigma_+ = \frac{4\pi}{k^2}(\sin^2\delta_3 + \sin^2\delta_{31} + 2\sin^2\delta_{33}). \tag{10.89}
$$

一般に P 波までとったときの断面積は $\cos\theta$ の 2 次式，

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B\cos\theta + C\cos^2\theta \tag{10.90}
$$

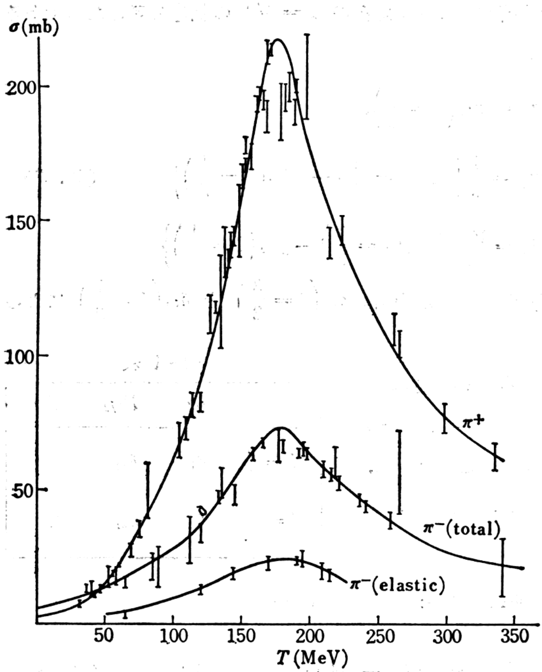
で与えられる．

いまは 10－1 表の 6 個の状態を考えたが，このうち一つの状態だけが特に強く散乱されたらどうなるだろうか．まず散乱の角分布は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
S_{1/2},\ P_{1/2} &\quad : \quad 1,\\
P_{3/2} &\quad : \quad 1+3\cos^2\theta.
\end{aligned}
\tag{10.91}
$$

また (10.79) の三つの散乱の比は (10.87) からわかるように，

$$
\begin{aligned}
I=\frac{3}{2} &\quad : \quad d\sigma_+ : d\sigma_- : d\sigma_0 = 9:1:2\\
I=\frac{1}{2} &\quad : \quad \qquad\qquad\qquad = 0:2:1
\end{aligned}
\tag{10.92}
$$



10-8 図　π と陽子の散乱全断面積　π^- total は $\pi^- + p \to \pi^- + p$ と $\pi^- + p \to \pi^0 + n$ の両方の和．T は π の運動エネルギー．

となるはずである．

π 中間子と陽子の散乱の全断面積は 10-8 図に示す通りである．これをみると π のエネルギーが150〜300 MeV の範囲でほぼ，

$$\sigma_+ : \sigma_- : \sigma_0 = 9 : 1 : 2$$

の比になっている．このことは $I = 3/2$ の波が強く散乱されることを示している．また断面積が最大となる付近での散乱の角分布は 10-9 図で見られるように $1 + 3\cos^2\theta$ に近い．したがって，$P_{3/2}$ の散乱が大きいことがわかる．10-8 図を見ると全断面積はエネルギーが 200 MeV までは急に増大し鋭い山をつくっている．このことは次のような共鳴散乱を考えることにより説明される．

いま $I = 3/2$, $P_{3/2}$ 状態の散乱の S-行列 $S = \exp(2i\delta)$ は π^+ 中間子のエネルギー $E\ (= T + \mu c^2)$ の関数であるが，$E = E_0$ の近くで S が次式で与えられたと考える．

$$S = e^{2i\delta} = \frac{E - E_0 - i\Gamma/2}{E - E_0 + i\Gamma/2}. \tag{10.93}$$

Γ を実数とすれば S はユニタリー性 $|S| = 1$ をみたしている（低エネルギー $T \approx 0$, $E \approx \mu c^2$ では弾性散乱のみ起こると考える）．$T = E_0$ では $S = -1$, $\delta = \pi/2$ で位相が 90° になる．また (9.90) より非常に低いエネルギー $T \approx 0$ では $\delta \propto k^3$（$\hbar k$ は π 中間子の運動量）でなければならないが，$T \approx 0$ で (10.93) の右辺は $\Gamma \ll E_0 - \mu c^2 = T_0$ の場合には，

$$右辺 \approx \frac{-T_0 - i\Gamma/2}{-T_0 + i\Gamma/2} \approx 1 + i\frac{\Gamma}{T_0}.$$

したがって，左辺を大体 1，すなわち $\delta \approx 0$ で δ につき展開すると，$\delta \approx \frac{\Gamma}{2T_0}$ が得られる．これより，

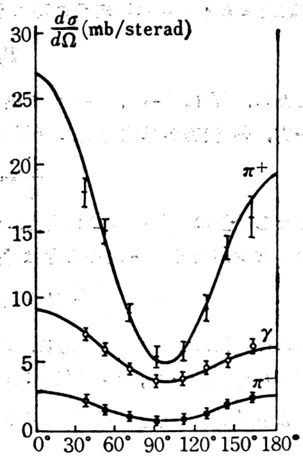
$$\Gamma/2=(ak)^3\gamma \qquad (10.94)$$

とおくことができる．a は中間子と核子の間の力の range, γ はエネルギーの次元を持つ量である．

$T_0>0$, $\Gamma>0$ であれば δ は正で π 中間子と核子の間に引力が働き，(10.93) にしたがって δ は E と共に増加し $E=E_0$ で $\delta=\pi/2$ を通過する．散乱の断面積は (10.89) より ($\sin^2\delta=|S-1|^2/4$),

$$\sigma_+=\frac{2\pi}{k^2}\frac{\Gamma^2}{(E-E_0)^2+\Gamma^2/4} \qquad (10.95)$$

で，$E=E_0$ の近くでは極値をとり $E=E_0\pm\Gamma/2$ で σ_+ は極値の半分になる（Γ は充分小さく $E_0-\Gamma/2\sim E_0+\Gamma/2$ の間で E が変っても k はほとんど変らないとする）．E_0 を**共鳴エネルギー**，Γ を**共鳴幅**という．また δ がエネルギーと共に増大し $\delta=\pi/2$ を通るとき共鳴が起こったという．



10-9 図 220 MeV の π-核子散乱の微分断面積．γ は $\pi^-+p\to p+\pi^0$ の π^0 が崩壊してできた γ を計ったもの．

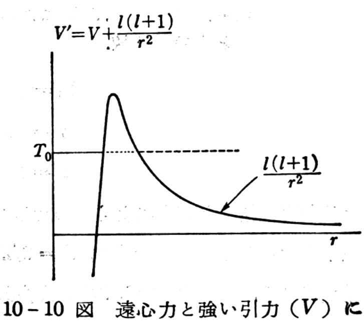
共鳴散乱の状態は次のように考えることができる．部分波に分解すると Schrödinger 方程式には遠心力に相当する項 $l(l+1)/r^2$ が現われる．これと短い到達距離の強い引力を与えるポテンシャル V を合わせた結果は 10-10 図のようになる．このときは $T_0>0$ にエネルギー準位が生ずる可能性がある．しかしこの状態 ψ_0 は安定でなく，トンネル効果により時間がたつと 2 粒子（核子と π 中間子）は離れていくので，2 粒子が準安定状態 ψ_0 に見出される確率は時間とともに減少する．その割合いを $\Gamma/\hbar$ とすると，

$$\frac{d|\psi_0|^2}{dt}=-\frac{\Gamma}{\hbar}, \quad |\psi_0|^2\propto\exp\left(-\frac{\Gamma}{\hbar}t\right)$$

となる．これより ψ_0 の時間変化は，

$$\psi_0\propto\exp\frac{-i}{\hbar}\left(E_0-i\frac{\Gamma}{2}\right)t$$

と考えられる．ψ_0 のエネルギーは E_0 ではなく複素量 $E_0-i\Gamma/2$ で虚数部分は ψ_0 状態が不安定で $\hbar/\Gamma$ の寿命で崩壊することを示している．



10-10 図 遠心力と強い引力 (V) による準安定準位 T_0

πN 散乱で衝突前の状態を i，衝突後の状態を f とすると，中間状態 ψ_0 を通る散乱

振幅はエネルギーが複素量の時にも § 2.5 と同じように求められ，

$$T_{fi}=\frac{\langle f|H|0\rangle\langle 0|H|i\rangle}{E-(E_0-i\Gamma/2)}$$

となる．H は $i\to 0$, $0\to f$ の遷移を起こす πN 間の相互作用の Hamiltonian である．一方，ψ_0 状態が単位時間に πN 状態に崩壊する確率は，

$$\frac{\Gamma}{\hbar}=\frac{2\pi}{\hbar}\sum|\langle f|H|0\rangle|^2\rho.$$

ただし $\sum$ は f のスピン状態について加え，角度について積分したものである．たとえばスピンがなく S-波のときは $\sum\rho=4\pi(L/2\pi\hbar)^3(p^2/v)$. ψ_0 を通る散乱の断面積は，

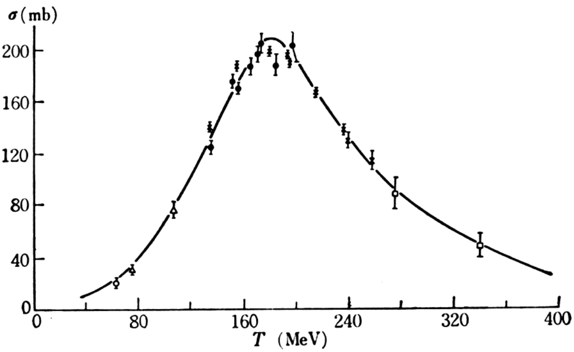
$$\sigma=\frac{2\pi L^3}{v\hbar}\sum|T_{fi}|^2\rho=\frac{L^3}{2\pi\hbar v\sum\rho}\frac{\Gamma^2}{(E-E_0)^2+\Gamma^2/4}.$$

これは (10.95) の半分である．スピン等を入れて正しく計算するとこれに $(2J+1)/(2s+1)$, $s=1/2$ がかかり，$P_{3/2}$ では S-波の2倍となって (10.98) となる．

よりくわしい議論からは (10.94) の代りに，

$$\Gamma=\frac{2(ak)^3}{1+(ak)^2}\gamma \tag{10.94'}$$

をとる方がよく（原子核反応に関する書籍を参照），(10.94′)，(10.95) で，



10-11 図　(10.95) による π^+-陽子散乱の全断面積（曲線）と実験の比較．

$$\begin{aligned}T_0&=159\ \mathrm{MeV},\\ \gamma&=58\ \mathrm{MeV},\\ a&=1.24\times10^{-13}\ \mathrm{cm}\end{aligned}\tag{10.96}$$

ととると実験結果と非常によく合わせることができる（10-11 図）．このように π 中間子と核子の散乱から核子 $I=3/2$, $J=3/2^+$（+ は正パリティ）の共鳴散乱が存在することが結論される．これを (3/2, 3/2) 共鳴あるいは略して 3-3 共鳴という．

微分断面積を位相のずれ δ で表わした式（(10.88) および $d\sigma_-$, $d\sigma_0$ に対するもの）

と実験から得られる角分布を比較して各部分波に対する位相の ずれ を求めることができる．このような位相の ずれ の解析（phase shift analysis）を行なうとどの状態でどの程度の強さの散乱が起こっているかを調べることができる． 微分断面積から位相の ずれ を出すことは一義的にいかず，何組かの解が得られるが，最も適当と思われるものを 10－2 表にあげる，これを見ると δ_{33} が他のものに比較して大きく 194 MeV で 90° に達し，共鳴が起こっていることを示している．

10－2 表

T_{Lab}/MeV	δ_3	δ_1	δ_{33}	δ_{31}	δ_{13}	δ_{11}
78	−6°		13°		−3°	
120	−12°	8°	30°	6°	2°	−4°
144	−13°	14°	46°	5°	3°	−5°
169	−4°	7°	64°	3°	−1°	7°
194	−13°	−14°	90°	−16°	0°	5°
217	−20°	−4°	107°	−14°	7°	−7°

低エネルギーでは S 波の位相のずれは k に，P 波のは k^3 に比例する（232 ページ）．実験室系で 70 MeV 以下では 6 個の位相の ずれ は，

$$\delta_1=(0.205\pm0.005)\eta,\qquad \delta_3=(-0.115\pm0.003)\eta,$$
$$\delta_{11}=-0.02\eta^3,\quad \delta_{13}=-0.07\eta^3,\quad \delta_{31}=-0.04\eta^3,\quad \delta_{33}=0.22\eta^3 \tag{10.97}$$

で近似される．ただし $\eta=k\hbar/\mu c$ である．

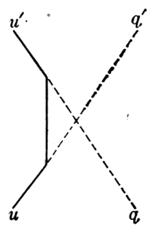
3－3 共鳴は理論上からも存在することが期待される．（10.69）の Hamiltonian から π^+ と陽子の散乱の遷移行列を計算すると，243 ページと同様にして，

$$\langle \boldsymbol{q}'|T|\boldsymbol{q}\rangle=-\frac{2f^2}{\mu^2}\hbar^2\frac{1}{2E_qL^3}\frac{\langle u'|\boldsymbol{\sigma q\sigma q}'|u\rangle}{E_q}.$$

$|u\rangle$, $|u'\rangle$ は陽子のスピン関数である．$\boldsymbol{q}$ 方向に z 軸をとり $\boldsymbol{q}'$ の極座標を（q, θ, φ）とすれば，

$$\boldsymbol{\sigma q}\cdot\boldsymbol{\sigma q}'=q^2\cos\theta+i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{q}')$$

より，



10－12 図

$$\langle \boldsymbol{q}',u_+|T|\boldsymbol{q},u_+\rangle=-\frac{f^2\hbar^2}{\mu^2E_q{}^2L^3}q^2\cos\theta,$$
$$\langle \boldsymbol{q}',u_-|T|\boldsymbol{q},u_+\rangle=\frac{f^2\hbar^2}{\mu^2E_q{}^2L^3}q^2\sin\theta e^{i\varphi}.$$

これと（9.74）から $f_\pm(\theta)$ が求まる．それと（10.84）を比較して，

$$2f_{33}{}^{(B)}+f_{31}{}^{(B)}=2\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\ \frac{q^2\hbar}{E\mu^2c},$$

$$f_{33}{}^{(B)}-f_{31}{}^{(B)}=2\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\frac{q^2\hbar}{E\mu^2c}$$

が得られる．ただし f_{33} は $I=3/2$, $P_{3/2}$ の部分波，f_{31} は $I=3/2$, $P_{1/2}$ の部分波の振幅で，(B) は 10-12 図に対応して振幅を結合定数でべき展開した最低次の項だけをとる近似（**Born 近似**という）を意味する．これから

$$f_{33}{}^{(B)}=\frac{4}{3}\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\frac{q^2\hbar}{E\mu^2c},\qquad f_{31}{}^{(B)}=-\frac{2}{3}\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\frac{q^2\hbar}{E\mu^2c}. \tag{10.98}$$

同様に π^- と陽子の散乱から，

$$f_{13}{}^{(B)}=-\frac{2}{3}\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\frac{q^2\hbar}{E\mu^2c},\qquad f_{11}{}^{(B)}=-\frac{8}{3}\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\frac{q^2\hbar}{E\mu^2c} \tag{10.99}$$

が求まる．

これらは結合定数のべき展開の最初の項だけであるから，展開の収束が悪いことを考えればこれを直接実験と比較するわけにいかない．しかし重要なことは (3,3) 状態のみ $f^{(B)}$ は正で，あとは負である．散乱振幅が正ならば位相のずれも正（δ は小さいとする）で力が引力であることになる（(9.73) 参照）．したがって，π と核子の散乱の力は (3,3) 状態で引力，他の状態では斥力である．引力の場合はべき展開でなく正しく解けば，281 ページに述べたような機構で共鳴準位が出る可能性がある．

[γ 線による π 中間子の生成]

(3,3) 共鳴 N^* があると，これは γ 線による π 中間子の生成にも，

$$\gamma+p\to p^*\to p+\pi^0$$
$$\to n+\pi^+$$

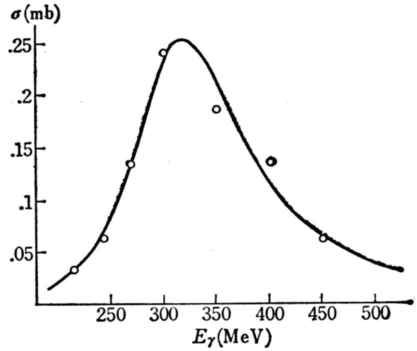
という形で大きな影響をあたえるはずである．10-13 図の断面積を見ると明らかに共鳴準位の存在が認められる．(10.95) と同様に共鳴準位の式

$$\sigma^*{}_{\gamma\pi0}=\frac{2\pi}{k^2}\frac{\Gamma_\gamma\Gamma}{(E-E_0)^2+\dfrac{\Gamma^2}{4}} \tag{10.100}$$

と比較してみるとよく合っている．ただし，k は光子の波数，Γ_γ は光子に対する幅で，

$$\Gamma_\gamma=\frac{(ak)^2}{1+(ak)^2}f_\gamma \tag{10.100'}$$

とおき，$f_\gamma=0.13\,\mathrm{MeV}$ ととってある．また，* は共鳴準位を通る散乱の意味で付けてある．そこでこのように $N_{3,3}{}^*$ 共鳴準位を通る反応がどのようになるかを考えよう．



10－13 図　(10.100) による $\gamma+p\to p+\pi^0$ の全断面積（曲線）と実験の比較

まず角分布を調べる．光子の進行方向を z 軸とし，右旋光 ($J_z=1$) の状態であるとすれば始めの状態の J_z は陽子が u_+ のときは $J_z=3/2$，陽子が u_- ならば $J_z=1/2$ である．中間状態の角運動量は $(3/2)^+$ だから，始めの状態のうち $J=3/2$ の部分だけが反応にあずかることになる．入射光子の状態を角動運量およびパリティの固有状態に分解したとき，陽子の 1/2 のスピンと合成されて $(3/2)^+$ を作りうるものは $J=1^+$ と $J=2^+$ のものである．$J=1^+$ の光子を**磁気的双極子放射の波**といい，核子の磁気能率と結合しているのはこれである（磁気能率は軸性ベクトルで空間反転で符号を変えない)．$J=2^+$ の光子は電気的四重極子放射の波であるが，これと核子との相互作用は小さいので考えないことにする（問題 10.7)．

$J=1^+$ で $J_z=1$ の光子（これを A_+ と書く）と上向きスピンの u_+ は 100％ $J=3/2$, $J_z=3/2$ である．

$$A_+u_+=\left\|J=\frac{3}{2},\ J_z=\frac{3}{2}\right\rangle. \tag{10.101}$$

A_+ と u_- のときは $J=1/2$ と $J=3/2$ がまざっているが，それは Clebsch-Gordan 係数により，(これは (10.39) の $(-\pi^+)n$ と同じものである）

$$A_+u_-=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left\|J=\frac{3}{2},\ J_z=\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{2}\left\|J=\frac{1}{2},\ J_z=\frac{1}{2}\right\rangle\right). \tag{10.102}$$

共鳴を起こすのは $J=3/2$ の部分だけで，1/3 の確率でこれが起こる．

終りの状態は P 波の π 中間子と核子の $P_{3/2}$ の状態で固有関数は，

$$\begin{aligned}\left|P_{3/2},\ J_z=\frac{3}{2}\right\rangle&=Y_1{}^1(\theta,\varphi)u_+,\\ \left|P_{3/2},\ J_z=\frac{1}{2}\right\rangle&=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\,Y_1{}^0(\theta,\varphi)u_++Y_1{}^1(\theta,\varphi)u_-)\end{aligned} \tag{10.103}$$

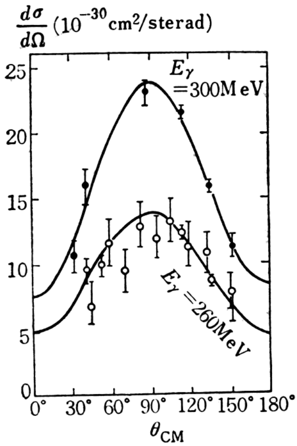
である．したがって角分布は，

$$\begin{aligned}d\sigma^*(\theta)&\propto\left|\left\langle P_{3/2},\ J_z=\frac{3}{2}\right|T\left|A_+u_+\right\rangle\right|^2+\left|\left\langle P_{3/2},\ J_z=\frac{1}{2}\right|T\left|A_+u_-\right\rangle\right|^2,\\ &\propto|Y_1{}^1(\theta,\varphi)|^2+\frac{1}{9}(2|Y_1{}^0(\theta,\varphi)|^2+|Y_1{}^1(\theta,\varphi)|^2).\end{aligned} \tag{10.104}$$

この他に左旋光の光子 A_- の場合も計算して平均しなければならないが，これは (10.104) と同じ角分布を与えることがわかる．(10.104) を計算すると，

$$d\sigma^*(\theta) \propto \frac{3}{8\pi}\sin^2\theta + \frac{1}{9}\cdot 2\cdot\frac{3}{4\pi}\cos^2\theta + \frac{1}{9}\,\frac{3}{8\pi}\sin^2\theta, \qquad (10.105)$$
$$\propto 2 + 3\sin^2\theta.$$

これが 3-3 共鳴を通る $\gamma\pi$ 生成の角分布である．10-14 図の角分布を見ると，この式がかなりよく実験を再現していることがわかる，

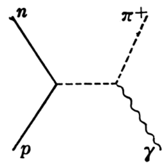


10-14 図　$\gamma + p \to \pi^0 + p$ の微分断面積

次に $p+\pi^0$ と $n+\pi^+$ との分岐比はただちに求められる．中間状態は $I=3/2$, $I_3=1/2$ の状態だから，終状態も $\|3/2, 1/2\rangle$ でなければならない．これによると $\pi^0 p$, $\pi^+ n$ が 2 : 1 の割合でまざっている．したがって共鳴反応の場合は，

$$\sigma_{\gamma\pi^0}{}^* = 2\sigma_{\gamma\pi^+}{}^* \qquad (10.106)$$

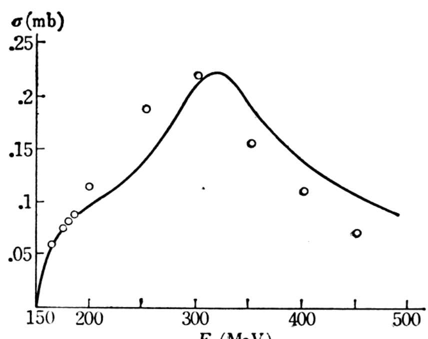
である．実際には π^+ 生成のときは 10-15 図のように共鳴準位を通らない過程が無視できない寄与をする．これを計算すると低エネルギーでは，



10-15 図

$$\frac{d\sigma_{\gamma\pi^+}{}^{1}}{d\Omega} = 2\frac{f^2}{4\pi}\,\frac{e^2}{4\pi}\,\frac{v}{\mu^2c^5}\left\{1 - \frac{\mu^2c^2v^2\sin^2\theta}{2E^2(1-(v/c)\cos\theta)^2}\right\} \qquad (10.107)$$

となる．ただし，v は放出される π 中間子の速度，E は π の全エネルギー，θ は γ と π のなす角である．この部分を除くと (10.106) は大体合っている ($f^2/4\pi\hbar c \approx 0.08$ とした)．また (10.107) と (10.100) の半分の和が全体の $\sigma_{\gamma\pi^+}$ であるが，これを描いてみると大体実験と合っている (10-16 図)．



10-16 図　$\gamma + p \to \pi^+ + n$ の全断面積．曲線は (10.107) + 1/2 (10.100) で計算した．

このように低エネルギー ($\lesssim 300$ MeV) の π 中間子の反応は，3-3

共鳴準位により大体のことがうまく理解される.

[核子の励起状態]

πN 散乱で $I=3/2$, $P_{3/2}$ 状態に共鳴が存在することを述べた. この共鳴状態は π, N の間に強い引力が働き，2 粒子が相互にある時間くっつきあっている状態と考えられる. この共鳴状態に見出される時間は $\hbar/\Gamma$ の程度で $\Gamma \sim 100\,\mathrm{MeV}$ より $\sim 10^{-23}\,\mathrm{sec}$ の極めて短かい時間である. 短かい時間ではあるがこの状態は一定のスピン，パリティ，$n_B(=+1)$, $I(=3/2)$, $S(\text{strangeness}=0)$ を持ち素粒子とあまり異なる所がない. ただ，Λ, Σ 粒子等と異なり極めて寿命が短かく素粒子世界での時間単位の程度の寿命しかない.

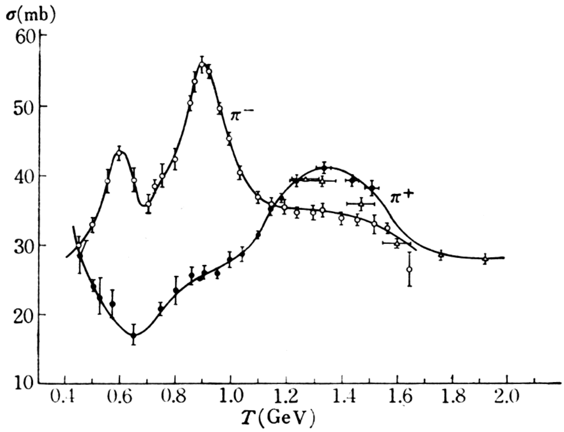
第 8 章で調べたように，原子にはエネルギーの異なる多数の状態があり，最低エネルギーの状態（基底状態）以外にある原子は光を放出してより低いエネルギー状態に移る. 同様に 3-3 共鳴状態は π 中間子を放出して核子になる. 核子とこの共鳴状態は共に $n_B=1$, $S=0$ であり，あたかも同一の原子の異なる状態のような関係にあるので，3-3 共鳴を核子の励起状態，核子自身を基底状態と考えることができる.

原子に多数の励起状態があったけれども，核子にも 3-3 共鳴以外にも核子の励起状態があるかどうかを調べるには πN 散乱，$\gamma+N\rightarrow\pi+N$ 等の断面積をいろいろなエネルギーで調べ断面積の山の存在を調べればよい. その結果，10-3 表で示される励起状態が次々に見出された. 一例として πN 散乱の断面積を 10-17 図に示すが，N_2^*, N_3^* 等の存在が認められる. 原子の励起状態は J, パリティ等の量子数で区別されるが，核子の励起状態はこの他に量子数として荷電スピンを持つ. N^* は核子と π 中間子の衝突で得られるから $I=1/2$, 3/2 のいずれかで $I=1/2$ のときは $Q=+1, 0$, $I=3/2$ のときは $Q=+2, +1, 0, -1$ の $(2I+1)$ 個の異なる荷電状態が縮退している. もし 2 個の π と核子の衝突をなんらかの方法で間接的にでも行わせることができれば $I=5/2$ の励起状態まで調べることができ，また一般に $I=$ 半整数の励起状態も原理的には調べることができる.

10-3 表　核子 ($n_B=1$, $S=0$) の励起状態 (N_1^* が 3-3 共鳴である)

	質　量	J	パリティ	I
N	~940 MeV	1/2	+	1/2
N_1^*	~1,238	3/2	+	3/2
N_2^*	~1,512	3/2	−	1/2
N_3^*	~1,688	5/2	+	1/2
N_4^*	~1,920	7/2	+	3/2
N_5^*	~2,190	?	?	1/2
N_6^*	~2,360	?	?	3/2

10-3 表の中には同じ I, J, パリティの二つ以上の励起状態はなさそうにみえる. もし



10-17 図 π と陽子の衝突の全断面積．GeV は 1000 MeV のこと．

存在すれば，あるいは今後さらに新しい励起状態がみつかり $N_1^* \sim N_6^*$ と同じ量子数をもてば，これらは原子の場合と同様に主量子数 n で区別される．

〔問題 10.6〕 π 中間子と核子の散乱で，$D_{3/2}$ 状態が強く散乱されるときの角分布を求めよ．

〔解〕 $1+3\cos^2\theta$ で $P_{3/2}$ と同じである．(10.91) によると $S_{1/2}$ と $P_{1/2}$ は共に 1 であり，一般に π^- 核子散乱の角分布は J の値だけで決まり，パリティにはよらない．

〔問題 10.7〕 $\gamma+p \to p^* \to p+\pi^0$ の反応で電気的四重極の寄与が大きいとした時の角分布を求め，10-14 図と比較せよ．

§ 10.5 因果律と分散式

体系の相互作用 Hamiltonian が与えられれば，原理的には Schrödinger 方程式を解いて S 行列を求めることが可能である．結合定数でべき展開する摂動論の方法は簡便ではあるが，収束が悪くて π 中間子と核子の問題には定量的にはほとんど使いものにならない．したがって，この節では少し異なる考え方から散乱振幅のみたすべき関係式を導き出すことにする．この基になる原理は物理現象が因果的であるということである．前に (6.100), (7.66) で見たように空間的に離れた二点での場の量は互に可換である．このことは一点での場の測定による影響が光円錐の外にはおよばない．すなわち影響は光速度より速くは伝わらないことを示す．以上は自由な場の伝播についてであるが，相互作用のあるときもそれが局所的であるならば，ある原因から生ずる影響は光速度より速くは伝わらないということができる．このことを**因果律**といい，自然界の現象はこの条件を満足し

ていると考えられる．

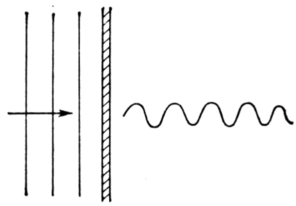
因果律が成り立つことから，ある粒子の流れが物質で吸収されるときは，同時に散乱が起こり，その間に密接な関係があることが次のようにして示される．x 方向に進む粒子の波（たとえば光）がはっきりした波面をもっていて，それより前方では波は存在しないとしよう．この波面が $t=0$ で $x=0$ に到達するとすれば，

$$\varphi_{in}(x,t)=0. \quad x>ct \tag{10.108}$$

φ は，たとえば電場の強さである．(10.108) をみたすような波束はいろいろの振動数の平面波を重ね合わせて得られる．

$$\varphi_{in}(x,t)=\sum C(\omega)e^{-i(\omega t-kx)}. \tag{10.109}$$

k は ω に対応する波数である．この波束が $x=0$ に存在する物体に衝突したとする．このとき $\omega=\omega_0$ の振動数の波だけが物体に吸収され，それ以外は何も起こらないとしよう．物体を通過した後の波は ω_0 の波だけ振幅が小さくなって，



10－18 図

$$\varphi(x,\ t)=\varphi_{in}(x,\ t)-\lambda C(\omega_0)e^{-i(\omega_0 t-k_0 x)},\ (0<\lambda\leq 1) \tag{10.110}$$

となる．ところで入射波 φ_{in} は (10.108) の条件をみたすが，$\exp-i(\omega_0 t-k_0 x)$ は空間的に一様に拡がった波であるから，波束が物体を通過した直後にそこから任意の距離だけ離れた点で有限の振幅 $-\lambda C(\omega_0)$ の波が観測されることになる．これは波が無限大の速さで前方に伝わることになり明らかに因果律に反する．このようにならないためには吸収と同時にいろいろな振動数の波の散乱（位相のずれ）が起こって，その結果各振動数の波の重なり方が変って $-\lambda C(\omega_0)\exp-i(\omega_0 t-k_0 x)$ による遠くまでの拡りを打ち消さなければならない．

このことを光の場合についてもう少しくわしく調べよう．光のときは $k=\omega/c$ であるから，

$$\varphi_{in}(x,\ t)=\int C(\omega)e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}d\omega \tag{10.111}$$

であり，φ は $t-(x/c)$ の関数となる．物体を通過して吸収，散乱が起こると振幅 $C(\omega)$ は $C(\omega)\rightarrow S(\omega)C(\omega)$ の変化をうけ，

$$\varphi(x,\ t)=\int S(\omega)C(\omega)e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}d\omega \tag{10.112}$$

となる．あるいは散乱波は，

$$\varphi_{sc}(x,\ t)=\int f(\omega)C(\omega)e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}d\omega. \qquad (10.113)$$

この $f(\omega)$ は散乱振幅で，

$$f(\omega)=S(\omega)-1. \qquad (10.114)$$

$f(\omega)$ の Fourier 分解を $F(u)$ と書くと，

$$F(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)e^{-i\omega u}d\omega, \qquad (10.115)$$

$$f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{i\omega u}du. \qquad (10.116)$$

(10.111)，(10.108) より，

$$C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{in}(0,\ t)e^{i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\varphi_{in}(0,t)e^{i\omega t}dt.$$

また (10.116) を (10.113) に代入し $x=0$ とおくと，

$$\varphi_{sc}(0,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t-t')\varphi_{in}(0,t')dt'=\int_{0}^{\infty}F(t-t')\varphi_{in}(0,\ t')dt'. \qquad (10.117)$$

$\varphi_{in}(0,\ t)$ は (10.108) さえみたせば勝手にえらびうる．これらすべての φ_{in} に対し散乱波 φ_{sc} が因果律，

$$\varphi_{sc}(0,\ t)=0, \qquad (t<0) \qquad (10.118)$$

をみたすためには，少なくとも，

$$F(u)=0, \quad u<0 \qquad (10.119)$$

が必要である．こうして光の散乱振幅 $f(\omega)$ に対して (10.119)，(10.116) の関係がある．

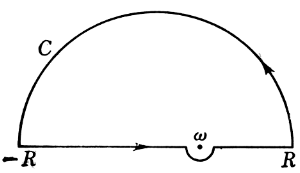
$F(u)$ が (10,119) をみたすことから，

$$f(\omega)=\int_{0}^{\infty}F(u)e^{i\omega u}du \qquad (10.120)$$

と書ける．$f(\omega)$ は実数の ω に対して定義されたものだが，(10.120) の右辺の積分により，これを複素 ω 平面の上半面，

$$\omega=x+iy, \quad y>0 \qquad (10.121)$$

で定義されたものに拡張することができる．なぜなら，$e^{-yu}(u>0)$ は減衰作用をするから $y=0$ で $f(\omega)$ の積分が存在するなら (10.120) の積分は $y>0$ に対しても収束する．こうして $f(\omega)$ は上半面で定義された解析関数となる．10-19 図



10-19 図

りような積分路 C をとり Cauchy の積分定理を使うと，

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega'.$$

右辺の積分は $\omega'=\omega$ のまわりの小さな半円，実軸上 $(-R, R)$，および半径 R の大きな半円上の積分に分れる．小半円の半径 $\to 0$ の極限で，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\text{小半円}} \frac{f(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega' \to \frac{f(\omega)}{2}$$

であり，$f(\pm\infty)=0$ であるとすれば大半円の半径 $\to\infty$ としたとき，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\text{大半円}} \frac{f(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega' \to 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{f(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega' \to \frac{1}{2\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega'$$

となる．実軸上の積分は $R\to\infty$ と共に $(-\infty, \infty)$ の積分となる．ただし，積分は実軸上の一点 $\omega'=\omega$ を積分範囲から除いたものであり**主値積分**という．P は積分が主値積分のことを示す記号である．

これより，

$$f(\omega)=\frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega'. \tag{10.122}$$

あるいはこの式の実数部をとると，

$$\mathrm{Re}\, f(\omega)=\frac{P}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, f(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega'. \tag{10.123}$$

このように因果律から $f(\omega)$ の上半 ω 面での解析性がいえて，その実数部と虚数部の間に関係が生ずることがわかる．

(10.122) を出す際に $f(\pm\infty)$ が 0 であるとしたが，もし $f(\pm\infty)$ が const. ならば $f(\omega)$ のかわり $f(\omega)/(\omega-\omega_0)$ という関数について同様のことをすれば，結果は，

$$\mathrm{Re}\, f(\omega)-\mathrm{Re}\, f(\omega_0)=\frac{\omega-\omega_0}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, f(\omega')}{(\omega'-\omega)(\omega'-\omega_0)}d\omega' \tag{10.124}$$

となり，$\mathrm{Im}\, f\to \mathrm{const}\ (\omega\to\pm\infty)$ でも収束する．この式は (10.123) と，(10.123) で $\omega=\omega_0$ としたものを辺々引き算をしたことになっている．

光の波（電磁波）の場の量 φ_{in}, φ_{sc} は実数にとれるから，その Fourier 分解は，

$$C(-\omega)=C(\omega)^*,$$

$$f(-\omega)C(-\omega)=f(\omega)^*C(\omega)^*.$$

したがって，

$$f(-\omega)=f(\omega)^* \tag{10.125}$$

の関係がある．虚数部をとれば，

$$\mathrm{Im}\, f(-\omega) = -\mathrm{Im}\, f(\omega) \tag{10.126}$$

である．これを使って（10.124）の積分で ω の負の部分を書き直すと $\omega_0=0$ として，

$$\mathrm{Re}[f(\omega)-f(0)] = \frac{2\omega^2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\mathrm{Im} f(\omega')}{\omega'(\omega'^2-\omega^2)} d\omega' \tag{10.127}$$

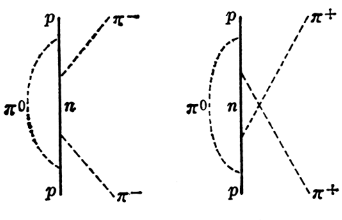
となる．物質による光の前方散乱振幅の虚数部は吸収率 α に比例し，実数部は屈折率 n に関係する（$n=1+2\pi N\,\mathrm{Re}\, f/k^2$, $\alpha = 4\pi N\,\mathrm{Im}\, f/k$).（10.127）は，

$$n(\omega) = 1 + \frac{c}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\alpha(\omega')}{\omega'^2-\omega^2} d\omega'. \tag{10.128}$$

となる（$\mathrm{Re}\, f(0)=0$)．これを **Kramers-Kronig の分散公式** という．一般に散乱振幅の実数部を虚数部の積分として表わしたものを **分散公式** あるいは **分散式** という．

［π 中間子－核子散乱の分散式］

π 中間子は質量を持つので $k \neq \omega/c$ であり，$\varphi(x,t)$ が $t-x/c$ だけの関数とはならないので（10.111）以下の議論はそのまま π 中間子の場合には使えない．しかし，π 中間子－核子の前方散乱振幅 $f(E)$ もやはり複素 E 面の上半で解析関数であり，分散式が成り立つことが示せるので，ここではそれを認めた上で話を進めよう．前方散乱の場合は核子のスピンの向きは変らない．それは（10.84）で $Y_l^{\pm1}$ は $\sin\theta$ という因子を含んでいて $\theta=0$ で0になることからわかる．したがって，スピン変数は考える必要はなく，1個の振幅で充分である．この節では実験室系で考えることにし，E を π のエネルギーとして陽子と π^+ 中間子の前方散乱振幅を $f_+(E)$, π^- とのを $f_-(E)$ と書く．



10－20 図

荷電中間子の場は，エルミット共役をとると π^+ と π^- の役目が入れ替わる．（10.125）は場が実数（エルミット量）のとき成り立つのであるが，いまは，

$$f_+(-E) = f_-(E)^*,$$
$$f_-(-E) = f_+(E)^* \tag{10.129}$$

となる．もっとも散乱振幅は正の E に対してだけ定義されたものであるから，（10.129）で負の E に対する振幅を定義したとみてよい．このように定義された $f(E)$ が上半 E 面で解析関数なのである．（10.129）の定義が適当であることは摂動論の結果をみればわかる．結合定数の2次までの結果（f は（10.65）の F の const.×E 倍．（9.74)を見よ）では（10.129）の関係が成り立っている．10－20 図

で見られるように，一般に $-E$ のエネルギーが入ってくるのは $+E$ のエネルギーが出ていくことに等しく，$-E$ の π^- の散乱と $+E$ の π^+ の散乱が対応している．(10.129) の関係を **交叉関係** (crossing relation) という．交叉の意味は 10－20 図の (b) は (a) の 2 本の線を交叉させて得られるからである．

前方散乱振幅の虚数部は (9.83) で与えられる．

$$\mathrm{Im}\, f_{\pm}(E) = \frac{k}{4\pi}\sigma_{\pm}(E). \qquad E > \mu c^2 \tag{10.130}$$

$\sigma_{\pm}(E)$ は $\pi^{\pm}$ と陽子衝突の全断面積（非弾性も含む）である．$|E| < \mu c^2$ では $\mathrm{Im} f$ は 0 であるが (10.65) の項を忘れてはいけない．実軸上に極を持つ関数 $1/(E_1 - E)$ はやはり上半面で解析関数であるが，(10.122) の分散式を出すときには $E = E_1$ の近くでの積分に注意が必要である．この項をあとでつけ加えるか，$\mathrm{Im} f$ が $-\pi\delta(E - E_1)$ の項を含むとすればよい．π 中間子散乱の場合 $F_{\pm}(E)$ は $E = \pm\mu^2c^2/2M$ に極があり，そこでの留数は $g^2\mu^2/8\pi M^2$ であるが，これは，

$$\mathrm{Im} f_{\pm}(E) = \pm\frac{f^2}{2}\delta\left(E \mp \frac{\mu^2c^2}{2M}\right), \quad f = \frac{\mu g}{2M}, \quad |E| < \mu c^2 \tag{10.131}$$

とおくことに等しい．（この際，遷移行列要素 T と散乱振幅 f の間の関係 (9.74) に注意せよ）．

$f_{\pm}$ の分散式を書くのに，交叉関係をうまく使うために，

$$\begin{aligned} f_1(E) &= \frac{1}{2}[f_-(E) + f_+(E)], \\ f_2(E) &= \frac{1}{2}[f_-(E) - f_+(E)] \end{aligned} \tag{10.132}$$

の組合わせを扱うことにする．交叉関係は，

$$\begin{aligned} &f_1(-E) = f_1(E)^*, \quad f_2(-E) = -f_2(E)^*, \\ &\mathrm{Im} f_1(-E) = -\mathrm{Im} f_1(E), \quad \mathrm{Im} f_2(-E) = \mathrm{Im} f_2(E) \end{aligned} \tag{10.133}$$

である．f_1, f_2 に対する分散式 (10.123) は，

$$D_1(E) = \frac{2}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{E'\,\mathrm{Im} f_1(E')}{E'^2 - E^2}dE', \tag{10.134}$$

$$D_2(E) = \frac{2E}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{Im} f_2(E')}{E'^2 - E^2}dE'. \tag{10.135}$$

ただし，散乱振幅の実数部を D と書くことにする．

$$\mathrm{Re}\, f = D.$$

$\mathrm{Im} f$ は $k\sigma$ に比例するが $\pi^{\pm}$ 陽子散乱の全断面積は高エネルギーでほぼ一定の値に近づ

く（10.17 図）ので（10.134）の積分は収束しない．そこで $E_0=\mu c^2$ でとおいて引き算をした式（10.124）を使うことにする．（10.135）は E の奇関数であるので $(E/\mu c^2)f_2(\mu c^2)$ を引く方がよい．(10.131) を用いて結果は，

$$D_1(E)-D_1(\mu c^2)=\frac{1}{2}[D_-(E)+D_+(E)]-\frac{1}{2}[D_-(\mu c^2)+D_+(\mu c^2)]$$
$$=\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\frac{k^2}{E^2-(\mu^2c^2/2M)^2}\frac{\hbar^3c}{M}+\frac{k^2}{4\pi^2}\int_{\mu c^2}^{\infty}\frac{E'}{k'}\frac{[\sigma_-(E')+\sigma_+(E')]}{E'^2-E^2}dE'. \tag{10.136}$$

$$D_2(E)-\frac{E}{\mu c^2}D_2(\mu c^2)=\frac{1}{2}[D_-(E)-D_+(E)]-\frac{E}{2\mu c^2}[D_-(\mu c^2)-D_+(\mu c^2)]$$
$$=-2\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\frac{k^2}{E^2-(\mu^2c^2/2M)^2}\frac{E\hbar^3}{\mu^2c}+\frac{k^2}{4\pi^2}\int_{\mu c^2}^{\infty}\frac{E}{k'}\frac{[\sigma_-(E')-\sigma_+(E')]}{E'^2-E^2}dE'. \tag{10.137}$$

ここで正しくは f^2 でなく $f^2/[1-(\mu/2M)^2]$ を書くべきであるが，その差は極めて小さいので省略してある．

あるいはこの二つを組合わせて実験と比較しやすい形に書くこともできる．Dの変数を波数kにかえて，

$$D_+(k)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{E}{\mu c^2}\right)D_+(0)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{E}{\mu c^2}\right)D_-(0)$$
$$+\frac{2\hbar^3}{\mu^2c}\left(\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\right)\frac{k^2}{E-\mu^2c^2/2M}+\frac{k^2}{4\pi^2}\int_{\mu c^2}^{\infty}\frac{dE'}{k'}\left[\frac{\sigma_+(E')}{E'-E}+\frac{\sigma_-(E')}{E'+E}\right]. \tag{10.138}$$

$$D_-(k)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{E}{\mu c^2}\right)D_-(0)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{E}{\mu c^2}\right)D_+(0)$$
$$-\frac{2\hbar^3}{\mu^2c}\left(\frac{f^2}{4\pi\hbar c}\right)\frac{k^2}{E+\mu^2c^2/2M}+\frac{k^2}{4\pi^2}\int_{\mu c^2}^{\infty}\frac{dE'}{k'}\left[\frac{\sigma_-(E')}{E'-E}+\frac{\sigma_+(E')}{E'-E}\right]. \tag{10.139}$$

位相のずれの解析によって得られる δ から振幅 D を求め，全断面積の値から右辺を計算し比較してみると，10-21 図のようによく合っている．ただし，結合定数として (10.75) の値，

$$\frac{f^2}{4\pi\hbar c}=0.08$$

をとった．擬スカラー結合定数 g で書けば，

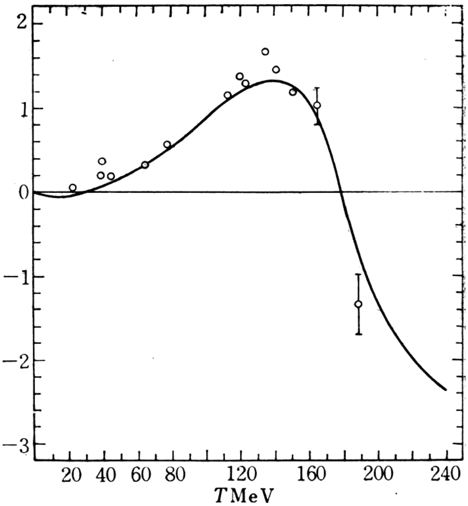
$$\frac{g^2}{4\pi\hbar c}=14 \tag{10.140}$$

であり，この値は実験とよく合った結果を与える．

10-17 図によると全断面積は高エネルギーで π^+ と π^- が等しくなる傾向にあるので，もし $\sigma_+(\infty)=\sigma_-(\infty)$ と仮定するならば，(10.135) の積分は引き算しなくても収束する．その式は，

$$D_2(k)=\frac{f^2}{2\pi}\frac{1}{E}+\frac{E}{4\pi^2}\int_{\mu c^2}^{\infty}\frac{\sigma_-(E')-\sigma_+(E')}{E'^2-E^2}k'dE'. \tag{10.141}$$

ただし，$\mu^2c^2/2M$ はエネルギー E に比べて非常に小さいので省略した．



10-21 図 $I=3/2$ 状態の π-核子前方散乱振幅の実数部．曲線は分散式により計算した．○は位相のずれから振幅を計算したもの．

特に $k=0$, $E=\mu c^2$ とすれば，

$$\frac{\mu c}{2\hbar}[D_-(0)-D_+(0)]=2\frac{f^2}{4\pi\hbar c}+\frac{\mu^2c}{4\pi^2\hbar^3}\int_{\mu c^2}^{\infty}\frac{dE'}{k'}[\sigma_-(E')-\sigma_+(E')] \tag{10.142}$$

の関係式が得られる．(10.97) の値を使うと左辺は 0.12，右辺を計算すると 0.11 でよく一致している．これは $\sigma_+(\infty)=\sigma_-(\infty)$ としたことが正しいことを示している．

この節の式を出す際に因果律の仮定をしただけで，何の近似もしていない．結果がよく実験と合うことは因果律の仮定が正しいことを意味するばかりでなく，場の理論自身の正当性がある程度示されたといってよかろう．分散式から得られた結合定数 (10.140) は他の方法で決めた値ともよく一致する．

〔問題 10.8〕 分散媒質の屈折率，吸収率を光と原子の前方散乱振幅で表わせ．

§ 10.6 核子の構造

核子あるいは一般に素粒子が大きさを持った粒子であるか質点であるかどうかを調べるにはいろいろな方法が考えられるが，今日しられているもっとも正確な方法は素粒子の荷電分布および磁気能率の分布を実験的に調べることである．もしこれらの分布が空間的に拡がっていれば素粒子は大きさを持っていると考えなければならない．以下核子の荷電分布について調べてみよう．

[Dirac 粒子の拡がりと中性子の荷電分布]

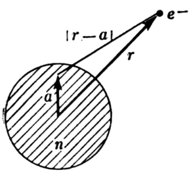
中性子は荷電を持たないけれども，もし中性子が大きさを持つならば中性子の荷電密度の分布を考えることができる． 中性子の中心を原点としたとき点 $\boldsymbol{a}$ における荷電密度を $\rho(\boldsymbol{a})$ としよう．$\rho(\boldsymbol{a})$ は中性子の全荷電が 0 のこと，および分布が球対称であることから，

$$\int \rho(\boldsymbol{a})d\boldsymbol{a}=0,\ \int a_i\rho(\boldsymbol{a})d\boldsymbol{a}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{10.143}$$

をみたし，$\rho(\boldsymbol{a})$ は中心からの距離 $a(=|\boldsymbol{a}|)$ の関数である．

この中性子が静電場 $\boldsymbol{E}$ の中に入ると電磁的エネルギーを得る． 静電場が点 $\boldsymbol{r}$ にある電子によって作られていると考えると点 $\boldsymbol{a}$ における静電ポテンシャル A_0 は，

$$A_0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})=\frac{-e}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|} \tag{10.144}$$



10－22 図

である．静電エネルギー ΔE は，

$$\Delta E=\int \rho(\boldsymbol{a})A_0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})d\boldsymbol{a}$$
$$=\int \rho(\boldsymbol{a})\left\{A_0(\boldsymbol{r})-\sum_i a_i\frac{\partial A_0(\boldsymbol{r})}{\partial r_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_ia_j\frac{\partial^2 A_0(\boldsymbol{r})}{\partial r_i\partial r_j}-\cdots\right\}d\boldsymbol{a}.$$

(10.143) を使うと右辺の展開の第 1・2 項は消えて，

$$\Delta E\approx\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\int \rho(\boldsymbol{a})a_ia_jd\boldsymbol{a}\right)\frac{\partial^2 A_0(\boldsymbol{r})}{\partial r_i\partial r_j}$$
$$=\frac{1}{6}\left(\int \rho(\boldsymbol{a})a^2d\boldsymbol{a}\right)\Delta A_0(\boldsymbol{r})$$
$$=\frac{1}{6}e^2\langle r^2\rangle_n\delta(\boldsymbol{r}) \tag{10.145}$$

となる．ここで $\rho(\boldsymbol{a})$ が球対称で a のみの関数のこと，および

$$\Delta A_0(\boldsymbol{r})=e\delta(\boldsymbol{r})$$

を用い，また中性子の荷電分布の拡がりの半径の平方 $\langle r^2\rangle_n$ を次式で定義した．

$$e\langle r^2\rangle_n=\int \rho(\boldsymbol{a})a^2d\boldsymbol{a}. \tag{10.146}$$

おそい中性子を物質に照射すると物質中の自由電子の作る電場と相互作用する．中性子も電子もほとんど静止していると考えられるから，この相互作用は静電場 (10.144) と中性子の荷電分布との間の Coulomb 力でそのエネルギーは (10.145) で与えられる．電子と中性子の中心とが重なったときのみその電子と中性子の間に力が働くので ($\delta(\boldsymbol{r})$ のため)，物質中の電子密度を一様としたときこの密度と $\langle r^2\rangle_n$ がわかれば ΔE がわかる．

物質により電子密度が異なるので中性子が異なる物質の境界を通過するときエネルギーの変化が起こる．これは光の場合の屈折率の変化に相当し，中性子は境界で屈折を起こす．この屈折の度合と物質中の電子密度から $\langle r^2\rangle_n$ として次の値が得られた．

$$\langle r^2\rangle_n = -(0.35\times10^{-13}\mathrm{cm})^2. \tag{10.147}$$

$\langle r^2\rangle_n < 0$ のことは負電荷が遠くに正電荷が中心近くにあることを示している．いずれにしても $\langle r^2\rangle_n \neq 0$ は中性子が荷電分布を持った大きさのある素粒子であることを示している．

素粒子が大きさを持つ原因にはいろいろ考えられるが，いま Dirac 方程式にしたがうスピン $\frac{1}{2}$ 粒子について考えてみよう．粒子がスピンを持つということはその粒子が内部回転をしており，大ざっぱに考えるとその回転に伴う拡がりをもっと考えられるので，この点につき調べる．まず自由な Dirac 粒子を考えると，

$$H = c\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p} + Mc^2\beta.$$

粒子の速度 dr/dt は (2.78) より，

$$\frac{dr}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \boldsymbol{r}] = c\boldsymbol{\alpha} \tag{10.148}$$

となる．Dirac 粒子の速度 $c\boldsymbol{\alpha}$ は $\boldsymbol{\alpha}$ の各成分 (7.30) の固有値が ±1 であることから，どの成分の値を測定しても光速度 ($\pm c$) で運動している．もちろん $\boldsymbol{\alpha}$ と H は可換でないので運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー $E=\sqrt{M^2c^4+c^2p^2}$ の固有状態は $\boldsymbol{\alpha}$ の固有状態ではない．状態 (7.37), (7.39) 等につき速度 $c\boldsymbol{\alpha}$ の平均値をとると，たとえば (7.37) の状態に対し，

$$\varphi^\dagger c\alpha_z\varphi = N^2(1,\ 0,\ cp_z/(|E|+Mc^2),\ 0)c\begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ cp_z/|E|+Mc^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= N^2\frac{2c^2p_z}{|E|+Mc^2} = \frac{c^2p_z}{|E|}, \quad \varphi^\dagger\alpha_x\varphi = \varphi^\dagger\alpha_y\varphi = 0$$

となり，$c\boldsymbol{\alpha}$ は通常の速度 $c^2\boldsymbol{p}/E$ を与えることがわかる．

静止した粒子 ($\boldsymbol{p}=0$) で $\boldsymbol{\alpha}$ の行列を考えると，(7.30) と $\boldsymbol{p}=0$ の時の Dirac 粒子の四つの解 (7.37), (7.39) より明らかなように $\boldsymbol{\alpha}$ は正エネルギー状態と負エネルギー状態の間にのみ行列要素を持っている．正，負エネルギー状態は $\exp \mp iMc^2t/\hbar$ のように変化するから，$\boldsymbol{\alpha}$ の行列要素は，

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}(0)e^{\pm i\frac{2Mc^2}{\hbar}t} = \pm\, e^{\pm i\frac{2Mc^2}{\hbar}t}$$

である．時間につき一度積分すると，(10.148) より，

$$\boldsymbol{r}(t)=\pm\frac{\hbar}{2Mci}\boldsymbol{\alpha}(t)=\pm\frac{\hbar}{2Mci}e^{\pm i\frac{2Mc^2}{\hbar}t}.$$

$\boldsymbol{\alpha}(t)$, $\boldsymbol{r}(t)$ は演算子 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{r}$ の正，負エネルギーの状態 u, v 間の遷移行列を意味する．これより Dirac 粒子の内部運動は，

$$半径\sim\frac{\hbar}{2Mc},\ 運動量\sim M\frac{dr}{dt}\sim Mc\boldsymbol{\alpha}\sim Mc$$

の運動で，その角運動量は，

$$S\sim\frac{\hbar}{2Mc}\times Mc=\frac{\hbar}{2}$$

となる．もし，粒子が荷電を持っていれば，このような内部運動には電流を伴い，この円電流のため粒子は小磁石の性質を持つと考えられる．(8.22) で得られた磁気能率はこのような内部運動によるものである．

さて，中性子は荷電はないが磁気能率 μ_n (単位 $e\hbar/2Mc$) を持ち，磁場 H の中で $-\mu_n(e\hbar/2Mc)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H})$ のエネルギーを持つ．このことは上の議論から中性子も電流密度を持ち $\rho\neq 0$ のことを示しているようにみえる．この荷電密度と電場との相互作用は次のようにして定量的に求めうる．すなわち磁気能率による相互作用 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}$ があれば Lorentz 不変の要求からこれと同じ強さで電場との相互作用 $-i(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E})$ を Dirac 粒子は持つ (問題 8.2)．したがって，中性子は電磁場の中で，

$$\Delta E=-\mu_n\frac{e\hbar}{2Mc}\beta\{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H})-i(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E})\}$$

の余分のエネルギーを持つ． 4 成分スピノルを大きい成分 $(\psi_1,\ \psi_2)=\varphi$ と小さい成分 $(\psi_3,\ \psi_4)=\chi$ に分け，おそい中性子に対しては $\chi=(\boldsymbol{\sigma p})\varphi/2Mc$ のことを使って $\beta(\boldsymbol{\alpha E})$ を φ に対するものに書き直すと，電場による部分は (問題 8.4 参照)，

$$\Delta E=e\mu_n\left(\frac{\hbar}{2Mc}\right)^2\Delta A_0+\mu\frac{e\hbar}{2M^2c^2}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}).$$

この第一項と (10.145) とを比較すると，

$$\langle r^2\rangle_n=\frac{3}{2}\left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2\mu_n \tag{10.149}$$

となり，$\mu_n=-1.91$ を代入すると，

$$\langle r^2\rangle_n\approx-(0.35\times10^{-13}\text{cm})^2$$

が得られ，実験との一致は極めてよい．

以上は中性子がスピン $\frac{1}{2}$ でかつ磁気能率を持つための荷電分布の拡がりを考えたが，

陽子ももちろん同様な拡がりを持つ．しかし陽子の荷電の拡がりは主として次のような理由によると考えられる．核子は π 中間子と強い相互作用をするので，自由な核子も単なる Dirac 粒子ではなく，

$$p \rightleftarrows n+\pi^+,\quad p \rightleftarrows p+\pi^0,\quad p+\bar{p} \rightleftarrows \pi^0,\quad p+\bar{n} \rightleftarrows \pi^+,\ \cdots$$

等の遷移のため極めて複雑な構造を持つと考えられる．陽子を例にとると，陽子の場 ψ_p, $\bar{\psi}_p$ の表わす自由な陽子を "p" と書くと，実際の陽子は，

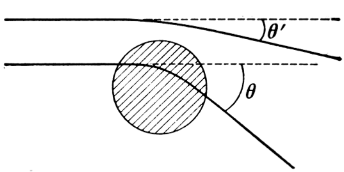
$$\text{“}p\text{”},\ \text{“}n\text{”}+\pi^+,\ \text{“}p\text{”}+\pi^0,\ \text{“}p\text{”}+\pi^++\pi^-,\ \cdots,\ \text{“}p\text{”}+\text{“}p\text{”}+\text{“}\bar{p}\text{”},\ \cdots$$

等の状態の重なった状態で表わされる．これらはすべて同一の n_B, Q, $S(=0)$ 等を持ち，また同一の全角運動量・全運動量を持ち，核子と π 中間子との相互作用 (10.60) を媒介として相互に移り変りうる状態である．この他に次章で述べるような強い相互作用により，

$$p \leftrightarrows K^++\Lambda^0,\ K^0+\Sigma^+,\ \cdots$$

等の遷移も起こるので，p は "Λ^0" $+K^+$, "Σ^+" $+K^0$, $\cdots$ 等の状態も含んでいる．

いま "n" $+\pi^+$ 状態を考えると "p"→"n" $+\pi^+$ の遷移によるエネルギーの変化は $\Delta E \approx \mu_\pi c^2$ の程度なので，$\Delta t \approx \hbar/\Delta E \approx \hbar/\mu_\pi c^2$ の時間だけ系はこの状態に存在することができる．この時間の間に π 中間子が光速度 c で核子の中心からはなれたとしても高々 $\Delta r \approx c\cdot(\Delta t/2) \approx \hbar/2\mu_\pi c \approx 0.7\times10^{-13}\,\mathrm{cm}$ 程度しか遠くにいくことができない．(Δt の時間 "n" $+\pi^+$ 状態に存在しうるから，$\Delta t/2$ の時間外に向って走り，残りの $\Delta t/2$ の時間で元に戻ってくる)．したがって π^+ による荷電の拡がりは $0.7\times10^{-13}\,\mathrm{cm}$ 程度と考えられる．2個以上の π 中間子を含む状態，K 中間子を含む状態，反核子を含む状態等による荷電分布は ΔE が大きくなるので，より小領域での荷電分布を与えることが期待される．



10-23 図 衝突径数が小さいと大きく曲げられ，また荷電の拡がりの中を通る．

そこで，これら荷電分布をはかるために電子と陽子の衝突を行なわせる．陽子の荷電の作る Coulomb 場による電子の散乱を古典力学でまず考えよう．電子が陽子の近くを通るとき Coulomb 力は距離の平方に逆比例して強くなるので，通過する間に受ける力積は衝突径数 b (8-6 図) に逆比例して大きくなる．(力積 ≈ 力 × 衝突時間，力 $\propto 1/b^2$, 衝突時間 $\propto b$)．したがって，陽子の近くを通る程大きな角度曲げられ，また遠くを通るときは小角度の散乱をうける．電子が陽子に衝突するとき $b \sim b+db$ の衝突距離で衝突の起こる確率は $2\pi b\,db$ に比例し，b の大きな衝突程

多く起こるので小角度の散乱が多い．量子力学的に扱っても同様で Rutherford 散乱の断面積 (2.76) で，$a=-e^2/4\pi=-\alpha\hbar c$ とおくと，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2m^2\hbar^2c^2}{4k^4\sin^4(\theta/2)}.$$

(m は電子の質量，k は電子の運動量)，小さな θ に対し $d\sigma/d\Omega\propto\theta^{-4}$ で増大する．

もし陽子の荷電分布が拡がっている場合には，衝突径数 b が小さくなると電子は荷電の拡がりの中に入りこむ．電子が陽子の中心から r の距離にあるときは，r より外側の陽子の荷電分布は電子に力をおよぼさないので，陽子の荷電分布を $\rho(a)$ としたとき，

$$\int_0^r\rho(\boldsymbol{b})d\boldsymbol{b}=4\pi\int_0^r\rho(\boldsymbol{b})b^2db\equiv e(r)$$

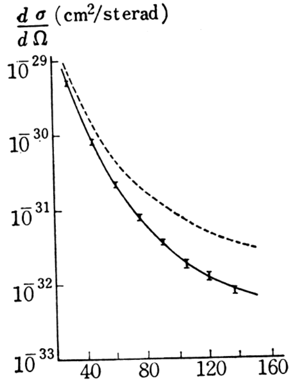
の電荷の作る Coulomb 場が電子に働く．このため $|e(r)|<e$ になれば電子に働く力は点電荷の場合より弱くなり，中心近くを通る大きな散乱角の散乱断面積は Rutherford 散乱の断面積より小さくなる．したがって $d\sigma/d\Omega$ のようすを散乱角の大きな所で調べることにより $e(r)$, $\rho(\boldsymbol{a})$ を実験的に求められる．

電子・陽子が Dirac 方程式にしたがうこと，陽子は荷電分布の他に磁気能率の分布を持つことを考慮して求めた高エネルギーの電子・陽子散乱の断面積を **Rosenbluth の式** といい，

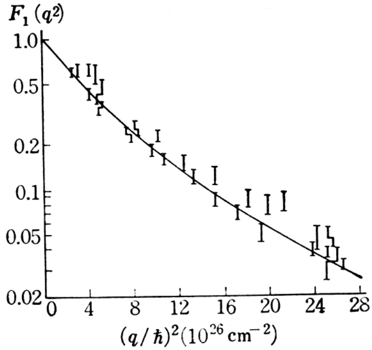
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{\alpha c\hbar}{2E}\right)^2\frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}\frac{1}{1+(2E/Mc^2)\sin^2(\theta/2)}$$
$$\times\left\{F_1{}^2(q^2)+\frac{q^2}{4M^2c^2}[2(F_1(q^2)+\mu_pF_2(q^2))^2\tan^2(\theta/2)+\mu_p{}^2F_2{}^2(q^2)]\right\}\tag{10.150}$$

である．E は電子のエネルギー，q は電子の運動量変化，M, μ_p は陽子の質量，異常磁気能率 ($\mu_p=1.79$) である．電子の質量は E にくらべて小さいとし無視してある．

$F_1(q^2)$, $F_2(q^2)$ は電子が運動量変化 q を受けるような道すじを通るとき，その内側にある荷電，磁気能率の総量でそれぞれ e, $e\hbar/2Mc$ を単位にしてはかったものである．量子力学的には運動量変化 q を受ける電子の道すじといっても古典的軌道のようにはっきりしたものではないが，不確定性関係より $qb\approx\hbar$ の関係があり，大体 b 程度の衝突距離の衝突と考えてよい．q の大きな衝突程近くを通る衝突になり，その断面積をはかることにより中心近くの荷電・磁気能率の分布のようすを調べる．10-24 図は電子の陽子による散乱の $d\sigma/d\Omega$ で点線は $F_1(q^2)=F_2(q^2)=1$ としたときの Rosenbluth の式である．実験は大散乱角の $d\sigma/d\Omega$ がこの式よりはるかに小さくなり陽子の荷電分布が拡がっていることを示している．10-25 図は測定された $d\sigma/d\Omega$ より求めた $F_1(q^2)$ の値である．



10－24 図　400 MeV の電子の陽子による散乱，点線は $F=1$ としたときの Rosenbluth の式による．



10－25 図　陽子の $F_1(q^2)$

q^2 の大きくなるほど $F_1(q^2)$ が減少し，$r \lesssim \hbar/q$ にある陽子の荷電は r と共に減少することを示している．$F_2(q^2)$ も大体同様な形をしている．

$F_1(q^2)$ から陽子の荷電分布の拡がりを求められ，

$$\langle r^2\rangle_p \approx (0.8\times 10^{-13}\text{cm})^2 \tag{10.151}$$

である．これは "n" $+ \pi^+$ 状態の荷電分布によるとして極めてよく説明される値である．

陽子と中性子は荷電対称の関係にあるので，その構造は相互によく似たものと考えられる．π 中間子による構造を考えると，

$$p\,;\ \text{“}p\text{”},\ \text{“}n\text{”}+\pi^+,\ \text{“}p\text{”}+\pi^0,\ \cdots$$

$$n\,;\ \text{“}n\text{”},\ \text{“}p\text{”}+\pi^-,\ \text{“}n\text{”}+\pi^0,\ \cdots.$$

荷電対称性から陽子が "p", "n" $+ \pi^+$, ··· 状態にある振幅はそれぞれ中性子が "n", "p" $+ \pi^-$, ··· 状態にある振幅と同じである．したがって π 中間子による核子の荷電分布は p, n で同じ形で荷電の符号のみ異なる．もし核子の荷電分布が主として核子の π 中間子による構造に起因するなら $\langle r^2\rangle_p \approx -\langle r^2\rangle_n$ でなければならない．これに対し "p", "$\bar{p}$", および $K^\pm$ 中間子等による荷電分布は $[\rho(a)]_p = -[\rho(a)]_n$ をみたさない．$\langle r^2\rangle_p$, $\langle r^2\rangle_n$ が非常に異なるのは，したがって $\pi^\pm$ 以外による荷電分布も重要なことを示している．

いずれにしても電子の陽子・中性子による散乱の実験は核子が $\lesssim 10^{-13}$ cm 程度の拡がりを持つ粒子であることを示しており，強い相互作用をする他の粒子も同様な拡がりを持つことが期待される．

第11章　ハイパロンと K 中間子

素粒子間の衝突・素粒子の崩壊等では荷電の保存則と同時に重粒子数（baryon 数）の保存が成立している．したがって陽子・中性子が素粒子相互の衝突等で他の素粒子に転換するとき陽子・中性子自身の重粒子数と同一の $n_B=+1$ の粒子に移る．これら粒子を**ハイパロン**（hyperon）という．また陽子・中性子（核子）と総称して**重粒子**（baryon）という．11-1 表に baryon の諸性質を記してある．（1-2 表参照）．ハイパロンは Λ^0（ラムダ粒子），$\Sigma^{\pm,0}$（シグマ粒子），$\Xi^{0,-}$（グザイ粒子，またはカスケード粒子という）の6種である．また陽子・中性子からハイパロンを作る場合に，ハイパロンは多くの場合 K 中間子と同時に生成される．K 中間子には $K^{+,0}$ が存在する．この章ではこれらハイパロンと K 中間子について調べる．

11-1 表　Baryon の諸性質

	質　量（MeV）	寿　命（sec）
p	938.256 ± 0.005	安　　定
n	939.550 ± 0.005	$(1.013\pm0.029)\times10^{3}$
Λ^0	1115.40 ± 0.11	$(2.62\pm0.02)\times10^{-10}$
Σ^0	1192.3 ± 0.3	$<10^{-14}$
Σ^+	1189.41 ± 0.14	$(0.79\pm0.03)\times10^{-10}$
Σ^-	1197.08 ± 0.19	$(1.58\pm0.05)\times10^{-10}$
Ξ^0	1314.3 ± 1.0	$(3.06\pm0.40)\times10^{-10}$
Ξ^-	1320.8 ± 0.2	$(1.74\pm0.05)\times10^{-10}$

§ 11.1　ハイパロン・K 中間子の生成と崩壊

素粒子の大部分は有限の寿命を持ち，より軽い2個以上の粒子に転化する（1-2 表）．したがって自然に存在する素粒子の大部分は陽子・電子・ニュートリノ・光子である．しかしながら他の素粒子も次の二つの理由によりある時間，または長時間にわたり存在する．

1）　自由中性子は約 17 分の寿命で崩壊するが，陽子と中性子が集まって原子核を作る場合，核の結合エネルギーが大きくなると核内での中性子は安定になることがある．陽子 Z 個，中性子 N 個からなる質量数 A の原子核の結合エネルギーを $B(A, Z)$ とすると $(N=A-Z)$

$$B(A, Z)/c^2=NM_n+ZM_p-M(A, Z), \tag{11.1}$$

である．M_p, M_n は陽子・中性子の質量，$M(A, Z)$ は原子核 (A, Z) の質量である．この核 (A, Z) で1個の中性子が β 崩壊すると，

$$n \rightarrow p + e^- + \nu.$$

核は $(A, z+1)$ に変る．もし，

$$M(A, Z) - M(A, Z+1) < m_e$$

の場合には，電子を作り出すに充分なエネルギーがないので β 崩壊は起こらず核は安定になる．

この条件は結合エネルギー $B(A, Z)$ で書き直すと，

$$B(A, Z+1) - B(A, Z) < (m_e + M_p - M_n)c^2 \tag{11.2}$$

である．

$$m_e c^2 \approx 0.51 \text{ MeV},$$
$$M_p c^2 \approx 938.3 \text{ MeV},$$
$$M_n c^2 \approx 939.6 \text{ MeV}$$

を代入すると，

$$B(A, Z+1) - B(A, Z) < -0.8 \text{ MeV} \tag{11.2'}$$

である．

原子核 (A, Z) はこの条件がみたされる限り β^- 崩壊に対して安定であるが，もちろん核はこの他の方法でも崩壊することができる．たとえば，陽子は安定で β^+ 崩壊，

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu$$

をしないが，原子核内にある陽子は，

$$M(A, Z) - M(A, Z-1) > m_e$$

の時は崩壊して，原子核 (A, Z) は核 $(A, Z-1)$ に移る．核の結合エネルギーに書き直すと，この条件は

$$B(A, Z-1) - B(A, Z) > (m_e + M_n - M_p)c^2 \approx 1.8 \text{ MeV} \tag{11.3}$$

である．

いずれにしても素粒子の安定性はそれらが自由粒子である時と物質の中に存在する時とで異なり，原子核のように強い結合エネルギーを持つ物質中では不安定な素粒子がより安定になり，また安定な素粒子が不安定になったりする．特に安定な原子核中では (11.2) がみたされており中性子は安定になっている．この事情は他の不安定な素粒子，すなわちハイパロン，K中間子，π, μ 中間子を安定するには充分でない．これらの自由粒子の崩壊の際に，はるかに大量のエネルギーを放出するので (11-3 表)，これらを安定にするよ

うに充分な結合エネルギーを持つ媒質は存在しない．したがってハイパロン，K中間子等につき実験するためには次の方法でそれらを作らねばならない．

2）充分に高エネルギーの素粒子を他の素粒子と衝突させることにより，その運動のエネルギーの一部を質量に変え不安定な粒子を一時的にではあるが作ることができる．作られた素粒子が速度 v で走っているとき，平均として（(4.14) 参照），

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

の時間だけこわれないで存在する．τ_0 は静止した素粒子の寿命である．たとえば K^+ 中間子の τ_0 は 1.2×10^{-8} sec であるが，たとえば $v=(2\sqrt{2}/3)c$ $(\gamma=3)$ の速度の K^+ 中間子は平均として約 10 m 走る．

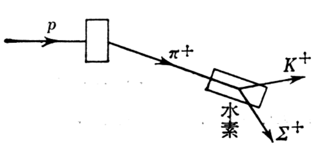
$$l = v\gamma\tau_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 3c\tau_0 \approx 10\,\mathrm{m}.$$

高エネルギーの陽子，γ 線を原子核にあてると，次のようなハイパロン，K 中間子の発生が起こることが確かめられた．例を水素（陽子）と高エネルギー粒子の衝突の場合に限ると p, γ のそれぞれをあてた場合に，

$$\begin{aligned} p+p\to\ & K^++\Lambda^0+p,\ K^++\Sigma^0+p,\ K^++\Sigma^++n,\ K^0+\Sigma^++p,\\ & K^++K^-+p+p,\ K^++\bar{K}^0+p+n,\ K^0+\bar{K}^0+p+p,\\ & K^++K^0+\Xi^0+p,\ K^++K^++\Xi^-+p,\ \Sigma^++\Sigma^-+p+p,\\ & K^0+\Lambda^0+p+\pi^+,\ \cdots \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

$$\begin{aligned} \gamma+p\to\ & K^++\Lambda^0,\ K^++\Sigma^0,\ K^0+\Sigma^+,\ K^++K^-+p,\ K^0+\bar{K}^0+p,\\ & K^++K^0+n,\ K^++K^++\Xi^-,\ K^0+K^++\Xi^0,\ p+\Lambda^0+\bar{\Lambda}_0,\\ & p+\Sigma^0+\bar{\Lambda}^0,\ K^0+\Lambda^0+\pi^+,\ \cdots \end{aligned} \qquad \text{(B)}$$

のような反応が起こることが確かめられている．



11－1 図　2次的に作られた $\pi^\pm$ 中間子と水素のターゲットの衝突による反応．$\pi^++p\to K^++\Sigma^+$.

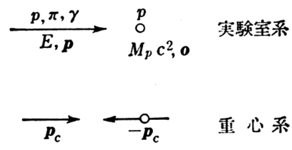
また $\pi^\pm$ 中間子，K 中間子等不安定な素粒子もエネルギーが高ければ充分の距離走るので，陽子－陽子衝突等から作られたこれら高エネルギーの π, K 粒子の通路に物質をおくことにより π, K 中間子と原子核の衝突を起こさせうる．（11－1図）たとえば $\pi^\pm$ 中間子を水素にあてた場合，

$$\pi^+ + p \to K^+ + \Sigma^+,\ K^+ + \bar{K}^0 + p,\ K^+ + K^+ + \Xi^0,\ p + \Lambda^0 + \Sigma^-, \cdots$$

$$\pi^- + p \to K^+ + \Sigma^-,\ K^0 + \Sigma^0,\ K^0 + \Lambda^0,\ K^+ + K^- + n,\ K^0 + K^- + p, \qquad \text{(C)}$$

$$K^+ + K^0 + \Xi^-,\ K^0 + K^0 + \Xi^0,\ \Lambda^0 + \Lambda^0 + \bar{\Lambda}^0, \cdots$$

等の反応が起こる（π^0 中間子は寿命が極めて短かくてあまり長い距離走らないので使い難い）.



11－2 図

$p-p$, $\gamma-p$, $\pi-p$ 反応で入射する p, γ, π のエネルギーを E とし，反応後に存在する粒子の質量の総和を M としよう．重心系での $p-p$, $\gamma-p$, $\pi-p$ 系の全エネルギー W と実験室系での入射エネルギー E の関係は（[問題 4.2] 参照），

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{2M_pc^2(E+M_pc^2)} \qquad (p-p), \\ W &= \sqrt{M_pc^2(2E+M_pc^2)} \qquad (\gamma-p), \qquad (11.4) \\ W &= \sqrt{2M_pc^2E + M_p{}^2c^4 + m_\pi{}^2c^4} \qquad (\pi-p) \end{aligned}$$

であり，$W > Mc^2$ になったとき問題の反応が起こる．いろいろな反応の起こる threshold energy は 11－2 表の通りである．Threshold energy としては p, π の場合は実験室系での運動エネルギー T（$=E-M_pc^2$ または $E-m_\pi c^2$），γ 線の場合は実験室系でのエネルギー E を記してある．

11－2 表　陽子，π 中間子，光子と水素（陽子）との衝突によるK中間子，ハイパロン発生反応の threshold energy（p, n; $\Sigma^{\pm,0}$; $\Xi^{0,-}$; $K^{+,0}$; $\pi^{\pm,0}$ の間の小さな質量差は無視した）

$p+p \to$	$NN\pi$	$N\Lambda K$	$N\Sigma K$	$NNK\bar{K}$	$N\Xi KK$	$NN\bar{N}N$	$NN\Lambda\bar{\Lambda}$	$NN\Sigma\Sigma$	$NN\Xi\bar{\Xi}$
T_p(GeV)	0.29	1.58	1.81	2.5	3.7	5.6	7.1	7.8	9.0

$\pi^\pm + p \to$	$N\pi\pi$	ΛK	ΣK	$NK\bar{K}$	ΞKK	$NN\bar{N}$	$N\Lambda\bar{\Lambda}$	$N\Sigma\Sigma$	$N\Xi\bar{\Xi}$
T_π(GeV)	0.17	0.76	0.91	1.36	2.2	3.5	4.7	5.3	6.2

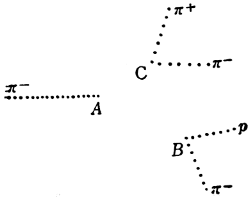
$\gamma + p \to$	$N\pi$	ΛK	ΣK	$NK\bar{K}$	ΞKK	$NN\bar{N}$	$N\Lambda\bar{\Lambda}$	$N\Sigma\Sigma$	$N\Xi\bar{\Xi}$
E_γ(GeV)	0.15	0.90	1.05	1.50	2.3	3.6	4.8	5.4	6.3

ハイパロン，K中間子は共に不安定で短かい時間でより軽い何個かの素粒子に崩壊する．その寿命は 11－1 表および 1－2 表に記してある．主な崩壊の仕方およびその際放出されるエネルギー（Q 値）を 11－3 表に記す．一つの素粒子についてその崩壊の仕方は必ずしも一通りではなく一般には多くの崩壊の仕方がある．

ハイパロン，K中間子が生成されたことを確かめるには，それらが荷電粒子であれば物

11-3 表　ハイパロン，K中間子の主な崩壊におけるQ値

崩壊	Q (MeV)	崩壊	Q (MeV)
$\Lambda^0 \to p+\pi^-$	37.5	$K^+ \to \mu^+ + \nu$	388.1
$\Lambda^0 \to n+\pi^0$	40.9	$K^+ \to \pi^+ + \pi^0$	219.2
$\Sigma^0 \to \Lambda^0+\gamma$	77.0	$K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$	75.0
$\Sigma^+ \to p+\pi^0$	116.1	$K^+ \to \pi^+ + \pi^0 + \pi^0$	84.2
$\Sigma^+ \to n+\pi^+$	110.3	$K^+ \to \pi^0 + \mu^+ + \nu$	253.1
$\Sigma^- \to n+\pi^-$	117.0	$K^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu$	358.3
$\Xi^0 \to \Lambda^0+\pi^0$	76.9	$K^0 \to \pi^+ + \pi^-$	218.8
$\Xi^- \to \Lambda^0+\pi^-$	65.8	$K^0 \to \pi^0 + \pi^0$	228.0



11-3 図　Λ 粒子の生成と崩壊
$\pi^- + p \to \Lambda^\circ + K^\circ$

質中でのイオン化によるエネルギー損失，磁場による曲り方などから質量等を測定すればよい．しかしこれら粒子は極めて特長的な崩壊をするので，その崩壊のようすを調べて生成を確かめることができる（11-3図参照）．たとえば Λ^0 粒子の生成の場合には，泡箱等で 11-3 図のような写真がとれ，B点から陽子と π^- 中間子の飛跡が出発していれば A 点で Λ^0 が作られ B 点でそれが崩壊することを示している．さらにこの推論を確かめるには p, π^- の運動量 $\boldsymbol{p}_p$, $\boldsymbol{p}_\pi$ を測定し，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_p+\boldsymbol{p}_\pi$ の方向が AB 方向と一致し，かつ B 点でのエネルギー保存則

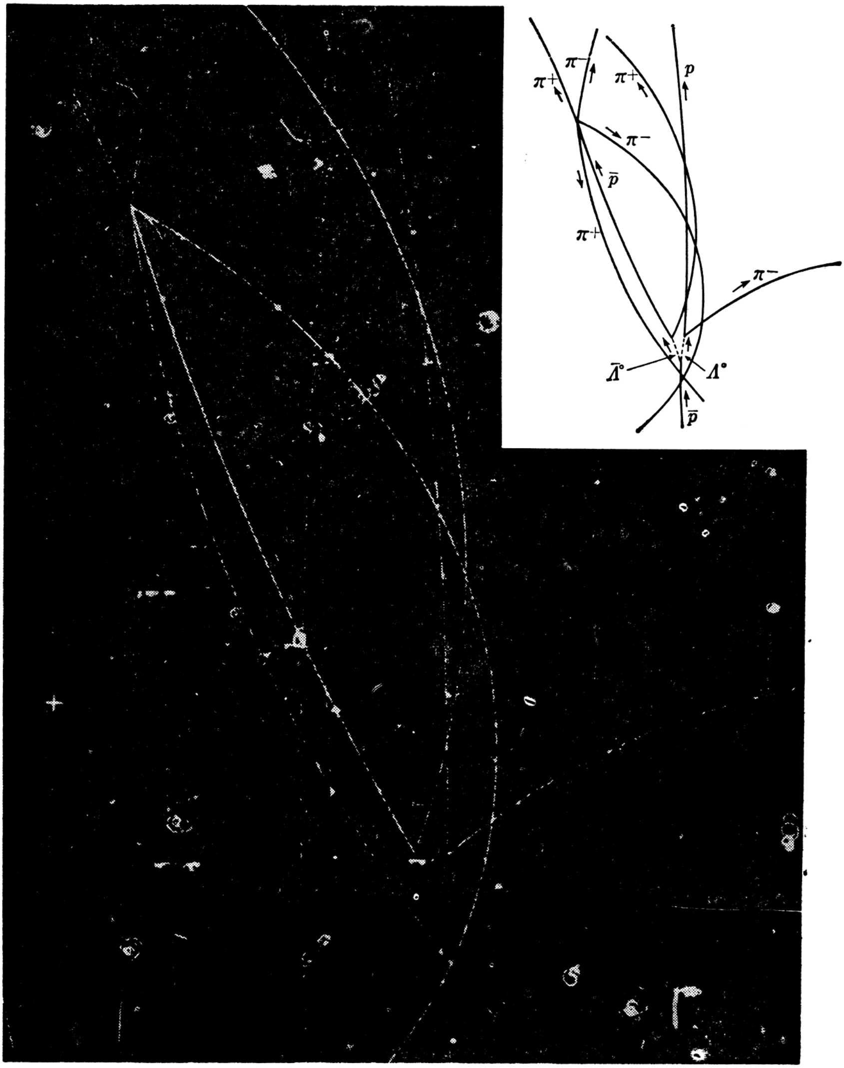
$$\sqrt{M_\Lambda^2c^4+c^2P^2}=\sqrt{M_P^2c^4+c^2p_p^2}+\sqrt{m_\pi^2c^4+c^2p_\pi^2}$$

が成立することを確かめればよい．11-3 図では A 点で Λ^0 と同時に K^0 が作られており，この K^0 は C 点で崩壊している．A 点におけるエネルギー運動量の保存則から $\pi^-+p\to\Lambda^0+K^0$ が A 点で起こったことを確かめられる．

§ 11.2　ハイパロン・K中間子の量子化された場 ——反粒子・スピン・パリティ——

ハイパロン・K 中間子の発生・崩壊の現象ではこれら粒子の数は ± 1 だけ変化する．またこのような変化は空間のあらゆる点で起こりうる．たとえば $\pi^-+p\to K^++\Sigma^-$ を例にとると，π^- 中間子が水素中を通過するときエネルギー・運動量等の保存則がみたされれば水素中のどの場所でもこの反応は起こりうるようにみえる．このためにはハイパロン・K 中間子も陽子・電子等と同様に量子化された場で記述するのが適当と思われる．こ

れら粒子は不安定で他の物質の存在に関係なく常にこれらを崩壊させようとする力が働いており，自由粒子および自由粒子の場という概念は完全には適用できないが，寿命（10^{-7}～10^{-10} sec 程度）は原子核の世界での単位時間（～10^{-23} sec）(1－1 表参照）にくらべてはるかに長く，極めて良い近似でこれら粒子は自由粒子と考えることができる．



11－4 図　$p+\bar{p}\to\Lambda+\Lambda$

〔反粒子〕

ハイパロン，K中間子のスピンはそれぞれ 1/2, 0 のことが実験的に確かめられているので，これを記述する場はスピン 1/2 粒子（Dirac 粒子）の場（第7章）およびスピン0粒子の場（第6章）である．また前者は Fermi 統計，後者は Bose 統計にしたがう．Fermi 粒子の場 ψ はエルミット量でないので ψ は粒子の吸収と反粒子の生成の演算子であり，したがってハイパロンは反粒子を持たねばならない．実際に今日までにすべての baryon に対し反粒子の存在が確かめられており，これらを $\bar{p}$, $\bar{n}$, $\bar{\Lambda}^0$, $\bar{\Sigma}^+$, $\bar{\Sigma}^0$, $\bar{\Sigma}^-$, $\bar{\Xi}^0$, $\bar{\Xi}^-$ と書く．11-4図は Λ^0 と $\bar{\Lambda}^0$ の同時生成の写真である．これら反粒子は粒子と同じ質量，スピン，寿命等を持ち，また荷電は大きさが同じで符号が反対である．

一方，K 中間子はスピン0の Bose 粒子場で記述される．K^+ 中間子の場を $\varphi(x)$ と書くと，$\varphi^\dagger \neq \varphi$ で φ はエルミット量でない．すなわち φ は K^+ の吸収とその反粒子の生成の演算子であるから，$\varphi^\dagger$ は K^+ の発生，K^- の吸収の演算子となり同一ではない．このことは荷電のゲージ変換（第一種）に対して，

$$\varphi \to e^{i\lambda Q}\varphi = e^{i\lambda}\varphi \quad (Q=+1),\ \varphi^\dagger = e^{-i\lambda}\varphi^\dagger \quad (Q=-1)$$

であり，φ は $Q=+1$, $\varphi^\dagger$ は $Q=-1$ の場を表わすからで荷電の保存則と密接な関係がある（§ 8.1 参照）．したがって K^+ は荷電を持つために，その反粒子 K^-（$\bar{K}^+$ と書く）とは同一でない．これに反し K^0 中間子の場合には荷電がないので，その反粒子 $\bar{K}^0$ が K^0 と同一であるか異なるか（$\varphi=\varphi^\dagger$ または $\varphi\neq\varphi^\dagger$）はあらかじめは決められない．しかしながら，$K$ 中間子（K^+, K^0）は後に述べるように strangeness という保存量 S を持ち，$S=+1$ であるので，荷電粒子がそれと異なる反粒子を持つと同様に $S=+1$ の粒子はそれと異なる $S=-1$ の反粒子を持つと推論される．実験的に2種の中性K中間子の存在が確かめられており $\bar{K}^0 \neq K^0$ のことが確かめられた．

§ 11.1 のハイパロン・K 中間子の発生の反応の中にはハイパロンの反粒子の生成反応も含まれているが，重粒子数の保存は常に成立している．また 11-3 表の崩壊過程でも重粒子数は保存され今日この例外は知られていない．この重粒子数の保存則は重粒子が安定な原因で，もしこの保存則がなければ，

$$p \to e^+ + \gamma,\ e^+ + \pi^0,\ \cdots$$

$$\Lambda^0 \to e^+ + \pi^-,\ e^- + \pi^+,\ \cdots$$

等の反応で，安定な p は不安定になり，またハイパロンはより不安定になるであろう．

〔スピンとパリティ〕

ハイパロン・K中間子のスピン・パリティはいろいろな反応を使って調べることができ

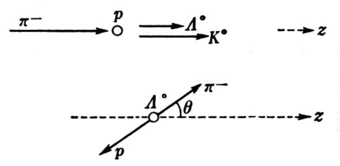
る．ここでは Λ^0 粒子の場合を例にとり調べよう．

a）Λ 粒子のスピン　Λ 粒子が半整数スピン $S(=1/2, 3/2, \cdots)$ を持つことはその崩壊，

$$\Lambda \to p + \pi^-, \cdots$$

等に角運動量の保存則を適用すればただちにわかる．p, π^- のスピンがそれぞれ 1/2, 0 であるから $p-\pi^-$ の相対運動の軌道角運動量を l とすれば $S=l\pm 1/2$, l は整数値 0, 1, 2, $\cdots$ をとるから S は半整数になる．

Λ がスピン 1/2 を持つことを確かめるのはいろいろな方法があるが，ここでは Adair の方法を述べる．いま $\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0$ で作られた Λ^0 を考え，特に π^- の入射方向と同方向に（前方に）飛び出す Λ^0 のみを集める．π^- の入射方向を z 軸とすると，Λ^0 発生の際の角運動量の z 成分の保存則は，



11－5 図　$\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^+$（$\Lambda^0$ の生成）$\Lambda^0 \to p + \pi^-$（Λ^0 の崩壊）

$$l_z + S_z(\pi) + S_z(p) = l_z' + S_z(K^0) + S_z(\Lambda^0). \tag{11.5}$$

$S_z(p), S_z(\Lambda^0), \cdots$ 等は $\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0$ における $p, \Lambda^0, \cdots$ 等のスピンの z 成分，l_z, l_z' は $\pi^- - p$, $\Lambda^0 - K^0$ の相対運動の軌道角運動量の z 成分である．後に述べるように K のスピンは 0 であるので $S_z(K^0)=0$，同様に $S_z(\pi^-)=0$．$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ より $\boldsymbol{L}$ は $\boldsymbol{p}$ と垂直であるが，z 方向は π^-, K^0, Λ^0 の進行方向（$\boldsymbol{p}/\!/z$）であるから，その方向の角運動量成分は 0 である．$l_z = l_z' = 0$．これより，

$$S_z(\Lambda^0) = S_z(p) = \pm 1/2. \tag{11.6}$$

（陽子のスピンは 1/2 であるから $S_z(p)=\pm 1/2$）．

Λ^0 のスピンを S_Λ とすると，前方に作られた Λ の S_z は $\pm 1/2$ であるから容易に崩壊の角分布を求められる．Λ^0 の静止系で話を進めよう．$\Lambda^0 \to p + \pi^-$ で $p\pi^-$ 間の軌道角運動量を L とすると S_Λ は L と陽子スピン 1/2 の和で，角運動量の合成則より $S_\Lambda = L \pm 1/2$ である．崩壊後の $p\pi^-$ 状態は次式で与えられるから（(3.21), (3.40) 参照）

$$\left|S_\Lambda, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \to \left\langle L, \pm 1, \frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right|\left. S_\Lambda, \pm\frac{1}{2}, L, \frac{1}{2}\right\rangle Y_L^{\pm 1}(\theta,\varphi)u_\mp + \left\langle L, 0, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right|\left. S_\Lambda, \pm\frac{1}{2}, L, \frac{1}{2}\right\rangle Y_L^0(\theta,\varphi)u_\pm, \tag{11.7}$$

（$u_\pm$ は p の $S_z=\pm 1/2$ 状態，$Y_L^M(\theta,\varphi)$ は軌道角運動量の L, M 状態）角分布は

$$\left|\left\langle L, \pm 1, \frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right| S_\Lambda, \pm\frac{1}{2}, L, \frac{1}{2}\right\rangle Y_L^{\pm 1}(\theta,\varphi)|^2 + \left|\left\langle L, 0, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right| S_\Lambda, \pm\frac{1}{2}, L, \frac{1}{2}\right\rangle Y_L^{0}(\theta,\varphi)|^2 \tag{11.8}$$

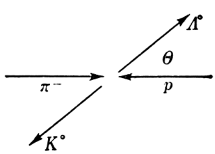
である．$L=S_\Lambda+1/2$ および $L=S_\Lambda-1/2$ のいずれの場合も結果は同一で，特に $S_\Lambda=1/2, 3/2, 5/2$ の場合の角分布を求めると 11－4 表の通りである．角分布は全立体角についての積分が 4π になるように規格化した．$S_z(\Lambda^0)=\pm 1/2$ のいずれの場合も結果は同じである．

11－4 表　Λ 崩壊の角分布

S_Λ	角　分　布
1/2	1
3/2	$\dfrac{1+3\cos^2\theta}{2}$
5/2	$\dfrac{3-6\cos^2\theta+15\cos^4\theta}{4}$

次章で述べるように素粒子の崩壊ではパリティは保存しないので，実際にはパリティの異なる $L=S_\Lambda\pm 1/2$ 両方の状態が共存する．したがって $L=S_\Lambda+1/2$ 状態および $L=S_\Lambda-1/2$ 状態による角分布だけでなく，この二つの干渉項が存在する．この干渉項は始めの陽子の S_z が $+1/2$ か $-1/2$ かで符号が異なることを容易に示しうる．始めの陽子が偏りを持たないときは $S_z=+1/2$ と $S_z=-1/2$ の陽子が同数個存在し，実際に観測される Λ 崩壊は $S_z=\pm 1/2$ の陽子により作られた Λ についての平均値で干渉項は0になる．したがって角分布は Λ 崩壊でパリティが保存されないにもかかわらず 11－4 表で与えられる．

以上の角分布を測定するには $\pi^- p$ 衝突で前方に作られた Λ のみを集めなければならない．げんみつに前方に作られる Λ の数は無限小であるが，実際に (11.6) が成立するためには $l_z'=0$ と考えられる Λ を集めればよい．$\pi^-+p\to\Lambda^0+K^0$ を重心系で考え，Λ^0 の作られる角度を Θ, Λ－K 軌道角運動量を l' としよう (11－6 図)．



11－6 図

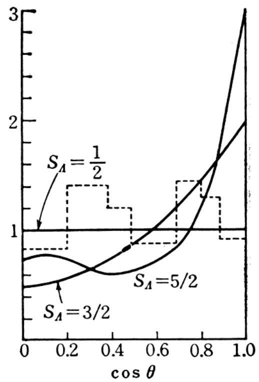
$l'=0$ のときは常に $l_z'=0$ ですべての方向に作られる Θ をとりうる．これに対し $l'=1$ のときは，

$$|Y_1^{\pm 1}(\Theta, \Phi)|^2=\frac{1}{4\pi}\,\frac{3}{2}\sin^2\Theta,$$

$$|Y_1^0(\Theta, \Phi)|^2=\frac{1}{4\pi}3\cos^2\Theta$$

であるから，$l_z'=0$ と近似的にみられるためには $\cos^2\Theta\gg\dfrac{\sin^2\Theta}{2}$ をみたす Θ 方向にでる Λ を集めればよい．$l'>1$ の場合についても同様な議論ができ，一般に l' の大きくなる

ほど条件はきつくなる．11-7 図は $l_z'=0$，したがって $S_z=\pm 1/2$ と考えられる Λ の崩壊の角分布で，これより $S_\Lambda=1/2$ と推論される．(実験室系では前方に出る Λ であるが，重心系では前方 $\Theta\approx 0$，および後方 $\Theta\approx\pi$ に出る Λ に対応する．また，Λ 粒子のスピンの決定には K^0 粒子のスピンが 0 のことを用いたが K 粒子のスピンもその崩壊を用いて求めることができる．これについては第 12 章で論ずる)．



11-7 図　前方に作られた Λ の崩壊の角分布
——理論値
┈┈実験値

b)　Λ 粒子のパリティ　素粒子の崩壊の際には第 12 章で論ずるようにパリティは保存されないので，Λ のパリティを決定するには強い相互作用による反応を用いなければならない．反応 $a+b\to c+d$ が強い相互作用で起こったとし，各粒子のパリティを $P_a, P_b, \cdots$ とし，$a-b$，$c-d$ 間の軌道角運動量を l, l' とすると，強い相互作用はパリティを保存するから，

$$P_aP_b(-1)^l=P_cP_d(-1)^{l'} \tag{11.9}$$

である．$\pi^-+p\to\Lambda^0+K^0$ 等より明らかなようにハイパロンは K 中間子と同時に生成されるので，Λ の生成反応に対し (11.9) は常に積 $P_\Lambda P_K$ を含む．(時には Λ と $\bar{\Lambda}$ の同時発生が起こる．この時は積 $P_\Lambda P_{\bar{\Lambda}}$ として P_Λ が含まれ，これは (7.82) より P_Λ のいかんにかかわらず -1 で P_Λ は決まらない)．したがって l, l' を測り既知の P_a，P_b から P_Λ を決めようと思っても，ただ，積 $P_\Lambda P_K$ のみが決まる．

実際に $P_\Lambda P_K$ を決めるために次の反応をとろう．

$$K^-+\mathrm{He}^4\to{}_\Lambda\mathrm{He}^4+\pi^-.$$

${}_\Lambda\mathrm{He}^4$ は Λ, n, および 2 個の陽子の作る原子核で hypernucleus の一つである (§ 11.5)．K, π, He^4 のスピンはすべて 0，また ${}_\Lambda\mathrm{He}^4$ も He^4 同様にスピン 0 と考えられるので，角運動量保存則より $l=l'$，したがってパリティ保存則 (11.9) は，

$$P_KP(\mathrm{He}^4)=P({}_\Lambda\mathrm{He}^4)P_\pi.$$

$P(\mathrm{He}^4)=P_p{}^2P_n{}^2(=1)$，$P({}_\Lambda\mathrm{He}^4)=P_\Lambda P_nP_p{}^2(=P_\Lambda P_n)$ であるから，

$$P_{K^-}P_n=P_\Lambda P_{\pi^-}.$$

π^- 中間子は疑スカラーで $P_{\pi^-}=-1$ であるから，

$$P_nP_\Lambda P_{K^-}=-1 \tag{11.10}$$

となる．Fermi 粒子のパリティはその反粒子のパリティとの積が -1 であること以外に

その正負は決まらないので（第7章），通常核子の P を $+1$ と定義している．この場合

$$P_{\Lambda}P_{K^-}=-1 \tag{11.10'}$$

となる．もし π 中間子と同様に $P_{K^-}=-1$ と定義すれば $P_{\Lambda}=+1$ である．

以上，Λ 粒子のスピン・パリティの決定について述べた．他のハイパロン，およびK中間子のスピン・パリティも同様に決定できる．その結果ハイパロンのスピンは 1/2, K のスピンは 0, またパリティは，

$$P_N P_{\Lambda} P_K=-1,\ P_{\Lambda}=P_{\Sigma},\ P_N=P_{\Xi} \tag{11.11}$$

となる．$P_N=+1$, $P_K=-1$ と定義すると，これより，

$$P_N=P_{\Lambda}=P_{\Sigma}=P_{\Xi}=1,\ \ P_{\pi}=P_K=-1. \tag{11.12}$$

p, n; $\Sigma^{\pm,0}$; $K^{+,0}$ 等のパリティは荷電によらぬことが実験的に知られており，これらをまとめて P_N, P_{Σ}, P_K と書いた．

§11.3 で述べるように強い相互作用には n_B, Q, および strangeness といわれる3個の保存量があり第4章で述べたように3個の素粒子のパリティは任意に決められる．(11.12) では，

$$P_p=P_n=+1,\ P_{K^-}=-1\ (\text{または}\ P_p=P_n=P_{\Lambda}=+1)$$

と決めたことに相当する．（3個の素粒子の選び方は §8.1 の第一種の荷電の任意性のときの議論を参照せよ).

§ 11.3　Strangeness と荷電スピン

[Strangeness]

ハイパロン・K 中間子の生成の諸反応 A), B), C) を眺めると，いちじるしい特長がある．

i）ハイパロンと K 中間子が常に同時に生成される．(例外的な場合 $p+p\to K^+ + K^- + p + p$, $\gamma+p\to p+\Lambda^0+\bar{\Lambda}^0$, 等では粒子と反粒子の対発生を必ず含む)

ii）荷電・重粒子数等の保存則をみたし threshold energy も比較的低い次の諸反応

$$\begin{aligned}&p+p\to\Sigma^+ + p(0.53),\ \Lambda^0+\pi^+ + p(0.68),\ p+n+K^+(1.12),\ \cdots\\&\gamma+p\to\Lambda^0+\pi^+(0.37),\ n+K^+(0.62),\ \cdots\\&\pi^-+p\to\Lambda^0+\pi^0(0.22),\ K^-+p(0.47),\ \cdots\end{aligned} \tag{D}$$

は見出されていない．括弧内の数字は GeV 単位で測った threshold energy である．

ある種の反応が禁止されるのを説明する一つの手近な方法は，荷電の保存則の果した役割を考えればただちに導かれる．荷電の保存則は，

$$\pi^- + p \to \pi^0 + n, \quad \pi^+ + p \to \pi^0 + \pi^+ + p, \quad \cdots$$

等の反応を許し，一方，

$$\pi^- + p \to \pi^0 + p, \quad \pi^+ + p \to \pi^+ + \pi^- + p, \quad \cdots$$

等の反応を禁止した．いまは baryon, K, π 中間子にある保存量を導入し，これの保存則から A), B), C) の存在と D) の禁止を導くことである．西島・中野および Gell-Mann は次の量 S (**strangeness**) を導入し素粒子間の衝突現象で S は保存されることを確かめた (11-5 表の S の値が実際 A), B), C) の諸反応で保存され D) の諸反応では保存されないことを確かめよ).

11-5 表　素粒子の strangeness

	S		S
p, n	0	$\bar{p}$, $\bar{n}$	0
Λ, $\Sigma^{\pm,0}$	-1	$\bar{\Lambda}$, $\bar{\Sigma}^{\pm,0}$	$+1$
$\Xi^{0,-}$	-2	$\bar{\Xi}^{0,-}$	$+2$
$K^{+,0}$	$+1$	K^-, $\bar{K}^0$	-1

素粒子間の衝突（生成・散乱・…）は非常に強い力で起こるのに対し（§ 11.4)，その崩壊は弱い相互作用といわれる極めて小さい力による（§ 9.3 および § 12.1)．ところでハイパロン・K 中間子の崩壊の際の S の保存を調べてみると（11-3 表，1-2 表，第 12 章),

$$\Lambda^0 \to p + \pi^- \quad (\Delta S = +1),$$
$$K^+ \to \pi^+ + \pi^0 \quad (\Delta S = -1),$$
$$\Sigma^+ \to \Lambda^0 + e^+ + \nu \quad (\Delta S = 0)$$

のように $\Delta S = 0$, ± 1 で必ずしも S の保存はみたされない．また軽粒子の関与してない現象では $\Delta S = \pm 1$ である．そこで S は,

$$\begin{cases} \Delta S = 0 & \text{強い相互作用,} \\ \Delta S = \pm 1,\ 0 & \text{弱い相互作用} \end{cases} \tag{11.13}$$

という選択則が成立しているようにみえる（第 12 章参照)．一方，電磁的相互作用が minimal であれば $p \to p + \gamma$, $\Sigma^+ \to \Sigma^+ + \gamma$ 等光の放出により粒子はその種類をかえないので $\Delta S = 0$ である．

S の保存則はげんみつではないけれども，弱い相互作用（素粒子の崩壊）の場合を除いては成立している．この保存則は荷電の保存の場合と同様に第一種のゲージ変換に対する不変性として表わすことができる．すなわち strangeness の値が S の素粒子の場 ψ に対し,

$$\psi \to e^{i\lambda S}\psi, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi} e^{-i\lambda S} \tag{11.14}$$

のようなゲージ変換を行なっても理論は不変である（λ は任意の実数).

これに反し，第二種の荷電に対応する意味での strangeness の大きさは今日迄見つかっていない．荷電の場合には電磁場と素粒子間の相互作用の強さは荷電量に比例したが，11－5 表の strangeness の大きさに比例してハイパロン・K 中間子と相互作用する場は知られていないし存在しないようにみえる．

このような場が存在すれば，電磁場の場合と同様に質量 0，スピン 1 の粒子であることが推論される．これを媒介とする力は Coulomb 場と同様 $1/r$ のポテンシャルを持ち，荷電の大きさ $e^2/4\pi\hbar c$ に相当する strangeness の大きさが与えられればこれによる力は決定される．

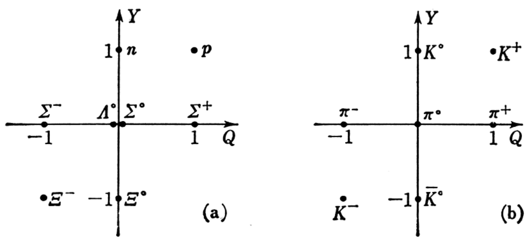
保存量 S が第二種の大きさを持たないことから各素粒子の S の値を決めるには任意性がある．11－4 表の S の代りに S, Q, n_B の任意の 1 次結合も保存量であるから（§8.1 参照），

$$Y = n_B + S \tag{11.15}$$

も保存量である．この Y を **hypercharge** という．Q と同様に素粒子の Y は 0, ±1 の値をとる．(11.6 表) (11－8 図).

11－6 表　素粒子のY

	Y
p, n	+1
Λ^0, $\Sigma^{\pm,0}$	0
Ξ^0, Ξ^-	−1
$\pi^{\pm,0}$	0
$K^{+,0}$	+1
K^-, $\bar{K}^0$	−1



11－8 図　(a) baryon の Q, Y. (b) 中間子の Q, Y.

もし Y に比例した強さで素粒子と相互作用する質量 0，スピン 1 粒子が存在すれば，p, n ($Y=+1$) から構成される原子核の間には $1/r$ のポテンシャルが存在する．これは重力と同じポテンシャルであり，かつ荷電のときのように電子の作る場で遮蔽されることがないので，もし力の強さが非常に弱くなければ重力の実験にむじゅんをきたす．Lee と Yang によれば，力の強さ $g^2/4\pi\hbar c$ は $g^2/4\pi\hbar c \lesssim 2\times10^{-43}$ でなければならない．

［荷電スピン］

Strangeness（または hypercharge）の保存則の存在は極めていちじるしい特長であるが，ハイパロン・K 中間子には核子・π 中間子の場合と同様に荷電スピンの保存則も近似的に成立しているようにみえる．すなわち $\Sigma^{\pm,0}$ は同一のスピン (1/2)，パリティ，S を持ち，またそれらの質量は良い近似で同一である．ただ，荷電がそれぞれ ±1, 0 で $\pi^{\pm,0}$ 中間子の場合と同様に荷電スピン $I=1$ で $I_3=\pm1, 0$ の状態と考えてよいようにみえ

る．同様に $\Xi^{0,-}$; $K^{+,0}$ は $I=1/2$, Λ^0 は $I=0$ の状態と考えられる．11-7 表は baryon および $K\cdot\pi$ 中間子の I, I_3 の表である．

11-7 表　素粒子の荷電スピン

	I	I_3			I	I_3	
N	1/2	+1/2	(p)	π	1	+1	(π^+)
		−1/2	(n)			0	(π^0)
Λ	0	0				−1	(π^-)
Σ	1	+1	(Σ^+)	K	1/2	+1/2	(K^+)
		0	(Σ^0)			−1/2	(K^0)
		−1	(Σ^-)	$\bar{K}$	1/2	+1/2	$(\bar{K}^0)$
Ξ	1/2	+1/2	(Ξ^0)			−1/2	(K^-)
		−1/2	(Ξ^-)				

荷電スピンの保存則(荷電空間での回転に対する不変性)がげんみつに成立すれば $\Sigma^{\pm,0}$; $\Xi^{0,-}$; $K^{+,0}$ 等は同じ質量を持つべきであるが，実際には多少の違いがみえる．たとえば

$$M(\Sigma^-)-M(\Sigma^+)\approx 7.7\,\mathrm{MeV}\approx M(\Sigma)\text{ の }0.7\%$$
$$M(\Sigma^0)-M(\Sigma^+)\approx 2.9\,\mathrm{MeV}\approx M(\Sigma)\text{ の }0.3\% \tag{11.16}$$
$$M(K^0)-M(K^+)\approx 4.2\,\mathrm{MeV}\approx M(K)\text{ の }0.8\%$$

すなわち $\lesssim 1\%$ の ずれ が見られる．

荷電スピンの保存則が近似的に成立していることを確かめるには，単に質量差の小さいことだけでなく，いろいろな素粒子間の衝突の断面積を比較してもよい．たとえば重陽子との衝突の次の 2 反応の断面積 σ_p, σ_n を比較しよう．

$$K^-+d\to\Sigma^-+p\cdots\sigma_p,\qquad K^-+d\to\Sigma^0+n\cdots\sigma_n.$$

d は $I=0$ であるから，始めの状態の荷電スピンは K^- のスピン $(I=1/2, I_3=-1/2)$ に等しい．終状態は $I=1$ の Σ と $I=1/2$ の p, n が存在するから角運動量の合成則により $I=3/2$ と 1/2 状態が存在する．(10.37), (10.38) より，

$$|I=1/2,\ I_3=-1/2\rangle=-\sqrt{\frac{2}{3}}|\Sigma^-p\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}|\Sigma^0n\rangle,$$

$$|I=3/2,\ I_3=-1/2\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}|\Sigma^-p\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}|\Sigma^0n\rangle.$$

衝突の際に働く力が荷電スピンを保存すれば，終状態は始状態と同じく $I=1/2, I_3=-1/2$ の状態でなければならない．したがって $K^-d\to\Sigma^-p$ と $K^-d\to\Sigma^0n$ の振幅の比は $-\sqrt{2/3}:\sqrt{1/3}=-\sqrt{2}$，断面積の比は $\sigma_p/\sigma_n=2$ となる．

断面積 σ を，

$$\sigma = \frac{1}{v}\frac{2\pi}{\hbar}|T|^2\rho \qquad (11.17)$$

と書くと（v は K^- の速度，ρ は終状態の ΣN 状態密度），げんみつにいえば ρ は$\Sigma^- p$ 状態と $\Sigma^0 n$ 状態で異なる．ρ は重心系で，

$$\rho dE = L\frac{dq}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi L}{(2\pi\hbar)^3}q^2 dq.$$

q は N（および Σ）の運動量の大きさで $q \ll M_N c$ のときは，

$$E \approx \frac{q^2}{2M_N} + \frac{q^2}{2M_\Sigma}, \quad dE \approx \left(\frac{1}{M_N} + \frac{1}{M_\Sigma}\right) q dq.$$

これより，

$$\rho = \frac{4\pi L}{(2\pi\hbar)^3}\cdot(2E)^{1/2}\cdot\left(\frac{M_N M_\Sigma}{M_N + M_\Sigma}\right)^{3/2}$$

が得られる．$\Sigma^- p$ 状態と $\Sigma^0 N$ 状態では M_N, M_Σ の値が少し異なり，

$$M(\Sigma^-) - M(\Sigma^0) \approx 4.8\,\mathrm{MeV},$$
$$M(p) - M(n) \approx -1.3\,\mathrm{MeV}.$$

このために，

$$\rho_{\Sigma^- p}/\rho_{\Sigma^0 n} = \left[\frac{M(\Sigma^-)M(p)}{M(\Sigma^-) + M(p)}\Big/\frac{M(\Sigma^0)M(n)}{M(\Sigma^0) + M(n)}\right]^{3/2} \approx 1.002$$

ゆえに 0.2% 程度の差を生ずる．

同様に $\Sigma^{0,-}$; p, n 間の質量差は二つの反応の遷移行列 T に対しても僅かな差を与えることが予期されるので $\sigma_p/\sigma_n = 2$ は近似的にのみ成立することが期待される．

実験をする場合には $K^- + d \to \Lambda^0 + n$ 等，$K^- + d \to \Sigma^0 + n$ と区別するのが難しい反応があり，実験精度は良くないが大体この比は 2 とむじゅんしない．baryon・K 中間子・π 中間子間の強い作用による衝突現象では今の所荷電スピンの保存は比較的よい近似で確かめられており，S の保存と共に重要な役割を演じている．

何個かの素粒子からなる系があった場合，その系の n_B, Q, S は系を構成する各素粒子の n_B, Q, S の和で，これらは加算的な保存量である（§ 8.1）．荷電スピンの大きさはこのような性質を持たないが I_3 は加算的な量なので，強い相互作用には 4 個の加算的保存量がある．しかしこれらのすべては独立でなく 11－5，11－7 表よりわかるように，

$$I_3 = Q - \frac{S + n_B}{2} \qquad (11.18)$$

の関係があり，I_3 は Q, S, n_B の 1 次結合で表わされる．Q, n_B はげんみつに（今日知られている限り），また S は極めて良い近似で保存されるので，上の関係は I_3 も S と同じ近似で保存されることを意味している．すなわち，素粒子の崩壊を起こす弱い相互作用を省略する範囲で I_3 は完全な保存量である．これに反し荷電スピンの大きさの保存則

は前に調べたように 0.1〜1 % 程度に破れている.

[電磁的相互作用]

I スピンの保存の破れる原因は第 10 章で述べたように素粒子の電磁的相互作用に起因すると考えられる.

電磁的相互作用は minimal な相互作用 (§ 8.2) であると考えられるので, $K^{\pm} \rightleftarrows K^{\pm} + \gamma$, $\Sigma^{\pm} \rightleftarrows \Sigma^{\pm} + \gamma$ 等の遷移を与え光子の放出・吸収前後で荷電粒子の種類は変らない. $\Sigma^{+} \rightleftarrows p + \gamma$ 等の相互作用は minimal な相互作用という制限により除かれる ($\Delta S = 0$ を仮定しても除かれる). したがって電磁的相互作用では $\Delta I_3 = 0$ である. さて Σ 粒子と電磁場の minimal な相互作用の強さは Σ の荷電に比例するので, 次の 3 個の遷移行列の比は,

$$
\begin{aligned}
\Sigma^{+} &\rightleftarrows \Sigma^{+} + \gamma & 1,\\
\Sigma^{0} &\rightleftarrows \Sigma^{0} + \gamma & 0,\\
\Sigma^{-} &\rightleftarrows \Sigma^{-} + \gamma & -1.
\end{aligned}
$$

1 : 0 : −1 である. $\Sigma^{\pm,0}$ はそれぞれ $I = 1$, $I_3 = \pm 1, 0$ 状態で荷電空間の回転により相互に移り変るから, 電磁的相互作用が I スピンを保存すれば, この比は 1 : 1 : 1 になるべきである.

Σ の minimal な相互作用を書き直すと,

$$
e(\bar{\psi}_{+}\gamma_{\mu}\psi_{+} - \bar{\psi}_{-}\gamma_{\mu}\psi_{-})A_{\mu} = e\bar{\psi}I_3\gamma_{\mu}\psi A_{\mu}. \tag{11.19}
$$

ここで $\psi_{\pm,0}$ は $\Sigma^{\pm,0}$ の場である. また,

$$
I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}I_3\psi = \bar{\psi}_{+}\psi_{+} - \bar{\psi}_{-}\psi_{-}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_{+} \\ \psi_{0} \\ \psi_{-} \end{pmatrix}. \tag{11.20}
$$

$\bar{\psi}I_3\psi$ は Σ の荷電スピンの第 3 成分で荷電空間の回転に対し, $I = 1$, $I_3 = 0$ の変換性を持つ. したがって A_{μ} は Σ 粒子と相互作用するときはあたかも $I = 1$, $I_3 = 0$ の粒子のように振る舞う.

光子が荷電スピンを持たないと考えれば, この相互作用は系に $\Delta I = 1$, $\Delta I_3 = 0$ の変化を与える. (11.19) は荷電空間の第 3 軸のまわりに対する回転に対し不変であるが, 第 1, 2 軸のまわりの回転に対しては不変でない.

次に K 粒子と電磁場との minimal な相互作用は K^{+} に対し (問題 8.8 参照),

$$
\frac{ie}{\hbar c}(\varphi_{+}^{\dagger}\partial_{\mu}\varphi_{+} - \partial_{\mu}\varphi_{+}^{\dagger}\varphi_{+})A_{\mu} + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2}\varphi_{+}^{\dagger}\varphi_{+}A_{\mu}^2.
$$

K^0 に対し 0 で，これらを書き直すと，

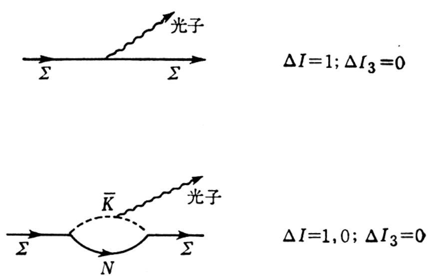
$$
\begin{aligned}
&i\frac{e}{2\hbar c}(\varphi^\dagger\tau_3\partial_\mu\varphi-\partial_\mu\varphi^\dagger\tau_3\varphi)A_\mu+\frac{e^2}{2\hbar^2c^2}\varphi^\dagger\tau_3\varphi A_\mu{}^2\\
&\quad+i\frac{e}{2\hbar c}(\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi-\partial_\mu\varphi^\dagger\varphi)A_\mu+\frac{e^2}{2\hbar^2c^2}\varphi^\dagger\varphi A_\mu{}^2.
\end{aligned}
\tag{11.21}
$$

ここで，

$$
\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_+\\ \varphi_0\end{pmatrix},\quad \varphi^\dagger=(\varphi_+{}^\dagger,\ \varphi_0{}^\dagger),\quad \tau_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}
\tag{11.22}
$$

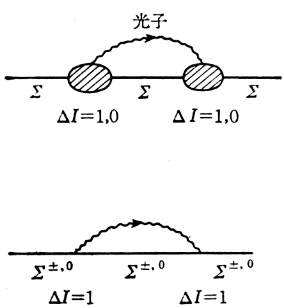
である．$\varphi^\dagger\tau_3\varphi$, $\varphi^\dagger\varphi$ はそれぞれ $I=1$, $I_3=0$; $I=0$, $I_3=0$ として変換する．したがって A_μ は $I=1$, $I_3=0$ のように考えられる部分と $I=0$, $I_3=0$ と考えられる部分があり，強い相互作用をする baryon・π・K 中間子のみに着目すると，系は $\Delta I=1, 0$; $\Delta I_3=0$ の変化をうける．

強い相互作用をする素粒子は §8.3 で述べたように極めて複雑な構造をしており，たとえば Σ は，　　$\Sigma\to N+\bar{K},\ \Lambda+\pi,\ \Sigma+\pi,\ \Xi+K,\ \cdots$
等の強い相互作用により，単なる Dirac 粒子ではなく $N+K$, $\Lambda+\pi$, $\cdots$ 状態等にある確率で存在する複雑な構造をしている．したがって光子との相互作用は始めに minimal な相互作用であると仮定しても，これら強い相互作用により変更をうける．すなわち，Σ の電流・電荷密度は，N, K, π 等による電流・電荷密度の寄与があり，一般に変換性は光子の放出・吸収に対し $\Delta I=1, 0$; $\Delta I_3=0$ である．これに対し，Σ にこのような構造を考えなければ $\Delta I=1$, $\Delta I_3=0$ である (11-9 図)．



11-9 図　Σ 粒子の電磁的相互作用の ΔI, ΔI_z

素粒子はその電磁的相互作用のために余分の質量を持つ．たとえば Σ 粒子は Σ 粒子の荷電・電流密度と電磁場の相互作用で光子を仮想的に放出し，同じ相互作用でその光子を吸収する (11-10 図)．この電磁的相互作用の 2 次の摂動による電磁的質量は，光子の放出・吸出のそれぞれの遷移が $\Delta I=1, 0$; $\Delta I_3=0$ の



11-10 図　$\Sigma^{\pm,0}$ の電磁的質量

変換性を持つから，一般に，

$$\Delta I = 2,\ 1,\ 0;\ \ \Delta I_3 = 0 \tag{11.23}$$

の変換性を持つ.

Σ 粒子の状態を（11.20）のように1列3行の行列で表わすと，その電磁的質量は，

$$\delta M = a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{11.24}$$

で表わされる．右辺の第1, 2, 3項はそれぞれ $\Delta I = 0,\ 1,\ 2$ の変換性を持った部分である.

ΔI, $\Delta I_3 = 0$ の変換性を持つ部分は $\Sigma^{\pm,0}$ を $\Sigma^{\pm,0}$ に移す 3×3 行列で，

$$M = (M_{\lambda,\mu}) = \begin{pmatrix}M_{1,1} & M_{1,0} & M_{1,-1}\\ M_{0,1} & M_{0,0} & M_{0,-1}\\ M_{-1,1} & M_{-1,0} & M_{-1,-1}\end{pmatrix}$$

とおくと，Clebsch-Gordan 係数（3.40）を用い，

$$M_{\lambda,\mu} = \langle 1, \mu, \Delta I, 0 | 1, \lambda, 1, \Delta I\rangle = \delta_{\mu,\lambda}\langle 1, \lambda, \Delta I, 0 | 1, \lambda, 1, \Delta I\rangle$$

で表わされる．これは $\Sigma(I=1)$ 状態と変換性 ΔI, $\Delta I_3(=0)$ を持つ相互作用から終状態 $\Sigma(I=1)$ を作ることに相当する．$\mu \neq \lambda$ のときは0で M は Σ の荷電を変えない.

$\Delta I = 0,\ 1,\ 2$ につき $M_{\lambda,\mu}$ を求めると，

$$M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ (\Delta I = 0),\qquad M = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\ (\Delta I = 1),$$

$$M = \sqrt{\frac{1}{10}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad (\Delta I = 2).$$

a 項は $\Sigma^{\pm,0}$ の質量を同じ値だけずらし質量差を与えない．b, c は質量差を与える．これらを理論上から計算するのは極めて難しいが（11.16）より $2b \approx -7.7\,\mathrm{MeV}$, $b + 3c \approx -2.9\,\mathrm{MeV}$，したがって，

$$b \approx -3.8\,\mathrm{MeV},\ \ c \approx 0.3\,\mathrm{MeV} \tag{11.25}$$

のことが期待される.

電磁的相互作用はこのように荷電スピンの保存則を破るが，その相互作用の強さは比較的弱いので（$e^2/4\pi\hbar c \approx 1/137$）$\lesssim 1\%$ 程度の荷電スピンの保存の破れが期待される．電磁的相互作用の影響を正しく数量的に評価することは難しいので，荷電スピンの保存の破れを電磁的相互作用だけによるかどうかは，あまり決定的なことはいえない．しかし強い相互作用自身が荷電スピンの保存則を破っているとしても，その破り方は $\lesssim 1\%$ 程度の小さなものでなければならない.

〔問題 11.1〕 高エネルギーの K^- と重陽子の衝突で,

$$K^- + d \to \Sigma + N + \pi, \quad \Lambda + N + \pi$$

の反応が起こる. Σ, π, N としてはいろいろの荷電を持ったものがある. これらのうち $\pi^\pm$ を生ずる全確率と, π^0 を生ずる全確率の比は, 荷電不変性が成り立てば2であることを示せ. 実験値は 2.12 ± 0.1 である.

〔問題 11.2〕 K^- を陽子に吸収させる反応,

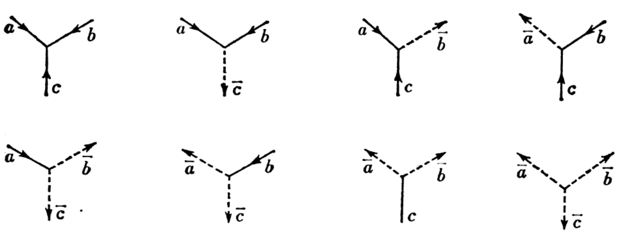
$$\begin{aligned} K^- + p &\to \Sigma^- + \pi^+ \\ &\to \Sigma^0 + \pi^0 \\ &\to \Sigma^+ + \pi^- \end{aligned}$$

は, 荷電不変ならば $I=0, 1$ の状態の振幅 M_0, M_1 の2個で表わされる. K^- がほとんど止っているときは, 上の三通りの反応の起こる比はほぼ $2:1:1$ である. このとき M_0 と M_1 の大きさの比を求めよ.

§ 11.4 粒子間の強い相互作用

〔湯川型の相互作用〕

Baryon, $\pi \cdot K$ 中間子の間には強い相互作用が働いて相互転換が起こる. このような力がやはり局所的な湯川型の相互作用であるとしよう. このときは相互作用のエネルギー密度がその点xにおけるいろいろの場の量 $\psi(x)$, $\phi(x)$ 等の積で表わされる. たとえば, 電子の電磁的相互作用は $e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x)$, 核子と π 中間子の相互作用は $ig\bar{\psi}(x)\gamma_5\tau\psi(x)\phi(x)$ で与えられたが, baryon, K 中間子等の相互作用もこのような形であるとする.



11-11 図 相互作用 $g\chi_a\chi_b\chi_c$ による素粒子 a, b, c 間の遷移
──→ 粒子 ┈┈→ 反粒子

湯川型の相互作用ではエネルギー密度が3個の場の積である. それぞれの場は素粒子の吸収または生成の演算子を含むから, 素粒子 a, b, c の場 χ_a, χ_b, χ_c の積から作られた相互作用では局所的に次の転換が起こる (χ_a は粒子 a の吸収および反粒子 $\bar{a}$ の生成, χ_b, χ_c も同様). (11-11 図).

$$
\begin{aligned}
&a+b+c\to\text{真空},\\
&a+b\to\bar{c},\ \ a+c\to\bar{b},\ \ b+c\to\bar{a},\\
&a\to\bar{b}+\bar{c},\ \ b\to\bar{c}+\bar{a},\ \ c\to\bar{a}+\bar{b},\\
&\text{真空}\to\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}.
\end{aligned}
\qquad \text{(E)}
$$

相互作用のエネルギー密度はエルミット量でなければならぬから，もし $\chi_a\chi_b\chi_c$ なる相互作用があれば，そのエルミット共役量である $\chi_a{}^\dagger\chi_b{}^\dagger\chi_c{}^\dagger$ なる相互作用も同時に存在する．もちろん a, b, c がエルミットな場で表わされるとき，すなわち，粒子と反粒子が同一のときは，$\chi_a{}^\dagger\chi_b{}^\dagger\chi_c{}^\dagger$ と $\chi_a\chi_b\chi_c$ は同一のものである．$\chi_a{}^\dagger\chi_b{}^\dagger\chi_c{}^\dagger$ は遷移（E）の逆過程をひき起こす．

n_B, Q, S の保存則をみたすには第一種のゲージ変換に対する不変性，または（E）をみて明らかなように，

$$
\begin{aligned}
(n_B)_a+(n_B)_b+(n_B)_c&=0,\\
Q_a+Q_b+Q_c&=0,\\
S_a+S_b+S_c&=0
\end{aligned}
$$

をみたすように相互作用がえらばれていればよい．$\chi_a{}^\dagger\chi_b\chi_c$ の形の相互作用については a の代りに $\bar{a}$ を考えればよい．$\chi_a{}^\dagger\chi_b{}^\dagger\chi_c$ についても同様である．

ハイパロン・K 中間子を含む湯川型の相互作用で n_B, Q, S の保存則をみたすのは，

$$
\begin{aligned}
&\bar{p}\Lambda K^+,\ \bar{n}\Lambda K^0;\ \bar{p}\Sigma^+K^0,\ \bar{p}\Sigma^0K^+,\ \bar{n}\Sigma^0K^0,\ \bar{n}\Sigma^-K^+;\\
&\bar{\Lambda}\Xi^0K^0,\ \bar{\Lambda}\Xi^-K^+;\ \Sigma^+\Xi^0K^+,\ \bar{\Sigma}^0\Xi^0K^0,\ \Sigma^0\Xi^-K^+,\ \Sigma^-\Xi^-K^0;
\end{aligned}
\qquad \text{(I)}
$$

およびこれらのエルミット共役量である．Λ, p, K^+ 等は $\psi_\Lambda, \psi_p, \phi_{K^+}$ 等を意味する．

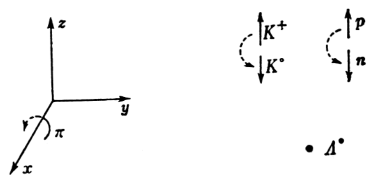
またハイパロンの π 中間子を媒介とする力は，

$$
\begin{aligned}
&\bar{\Lambda}\Lambda\pi^0;\ \bar{\Sigma}^+\Lambda\pi^+,\ \Sigma^0\Lambda\pi^0,\ \bar{\Sigma}^-\Lambda\pi^-;\ \Sigma^+\Sigma^+\pi^0,\ \Sigma^+\Sigma^0\pi^+,\\
&\Sigma^0\Sigma^0\pi^0,\ \Sigma^0\Sigma^-\pi^+,\ \Sigma^-\Sigma^-\pi^0;\ \bar{\Xi}^0\Xi^0\pi^0,\ \bar{\Xi}^0\Xi^-\pi^+;
\end{aligned}
\qquad \text{(II)}
$$

およびこれらのエルミット共役量である．K 中間子と π 中間子間の相互作用で 3 個の場の積でできているもの（これも広い意味で湯川型といえる）としては，

$$\bar{K}^+K^+\pi^0,\bar{K}^+K^0\pi^+ \qquad \text{(III)}$$

およびこのエルミット共役量が考えられる．



11－12 図　荷電空間の第 1 軸のまわりの π 回転

相互作用は n_B, Q, S の保存だけでなく，I スピンの保存をみたさなければならない．この保存則は（I）～(III) に記された相互作用の強さがすべては独立でなく幾つかの関係があることを結論する．たとえば，$\bar{N}\Lambda K$ 相

互作用には二つの相互作用 $\bar{p}\Lambda K^+$, $\bar{n}\Lambda K^0$ がある．それぞれの強さを g_+, g_0 とすると，

$$\Lambda+K^+\to p \quad T_+,$$
$$\Lambda+K^0\to n \quad T_0$$

の二つの遷移の振幅 T_+, T_0 は g_+, g_0 に比例する．荷電空間のスピン状態は K, N (共に $I=1/2$) に対し，

$$K^+=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ K^0=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\ p=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ n=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

であるから，荷電空間で第1軸のまわりに座標系を π だけ回転すると，

$$e^{i\pi I_1}=e^{i\frac{\pi}{2}\tau_1}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\tau_1=i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$
$$\left(\tau_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \tau_1^2=1,\ I_1=\frac{1}{2}\tau_1\right)$$

を用い，

$$K^+\to iK^0,\ K^0\to iK^+,\ p\to in,\ n\to ip \qquad (11.26)$$

となる．また Λ は $I=0$ で回転しても不変である $\Lambda\to\Lambda$．したがって，$\Lambda+K^+\to p$ を I スピン空間で x 軸のまわりに角度 π 回転すると $\Lambda+K^0\to n$ となり，もしこの力が回転に対し不変であれば，$T_+=T_0$，すなわち $g_+=g_0$ でなければならない．

同様にして (I)～(II) の力は次のように I スピンの保存則によりまとまる．

$$\begin{aligned}
&g_{N\Lambda K}(\bar{p}\Lambda K^+ + \bar{n}\Lambda K^0)\equiv g_{N\Lambda K}\overline{N}K\Lambda,\\
&g_{N\Sigma K}\{(\sqrt{2}\bar{n}\Sigma^- + \bar{p}\Sigma^0)K^+ + (\sqrt{2}\bar{p}\Sigma^+ - \bar{n}\Sigma^0)K^0\}\equiv g_{N\Sigma K}\overline{N}\tau K\Sigma,\\
&g_{\Xi\Lambda K}(\bar{\Lambda}\Xi^0K^0-\bar{\Lambda}\Xi^-K^+)\equiv g_{\Xi\Lambda K}\bar{\Lambda}\overline{K}_G\Xi,\\
&g_{\Sigma\Xi K}\{\sqrt{2}\bar{\Sigma}^-\Xi^- + \bar{\Sigma}^0\Xi^0)K^0-(\sqrt{2}\bar{\Sigma}^+\Xi^0-\bar{\Sigma}^0\Xi^-)K^+\}\equiv g_{\Xi\Sigma K}\bar{\Sigma}\overline{K}_G\tau\Xi
\end{aligned}\qquad (\mathrm{I}')$$

および

$$\begin{aligned}
&g_{NN\pi}\{\sqrt{2}(\bar{p}n\pi^+ + \bar{n}p\pi^-)+(\bar{p}p-\bar{n}n)\pi^0\}\equiv g_{NN\pi}\overline{N}\tau N\pi,\\
&g_{\Sigma\Lambda\pi}(\bar{\Sigma}^+\Lambda\pi^+ + \bar{\Sigma}^0\Lambda\pi^0+\bar{\Sigma}^-\Lambda\pi^-)\equiv g_{\Sigma\Lambda\pi}\bar{\Sigma}\Lambda\pi,\\
&g_{\Sigma\Sigma\pi}\{(\bar{\Sigma}^0\Sigma^- - \bar{\Sigma}^+\Sigma^0)\pi^+ + (\bar{\Sigma}^+\Sigma^+ - \bar{\Sigma}^-\Sigma^-)\pi^0 + (\bar{\Sigma}^-\Sigma^0-\bar{\Sigma}^0\Sigma^+)\pi^-\}\\
&\quad\equiv g_{\Sigma\Sigma\pi}\bar{\Sigma}\times\Sigma\cdot\pi,\\
&g_{\Xi\Xi\pi}\{\sqrt{2}(\bar{\Xi}^0\Xi^-\pi^+ + \bar{\Xi}^-\Xi^0\pi^-)+(\bar{\Xi}^0\Xi^0-\bar{\Xi}^-\Xi^-)\pi^0\}\equiv g_{\Xi\Xi\pi}\bar{\Xi}\tau\Xi\pi.
\end{aligned}\qquad (\mathrm{II}')$$

Σ, π は荷電スピン空間でのベクトル，N, Ξ, K, K_G はスピノル，したがって $\overline{N}\tau K$, $\overline{K}_G\tau\Xi$, $\overline{N}\tau N$, $\bar{\Xi}\tau\Xi$ はベクトル，Λ, $\overline{N}K$, $\overline{K}_G\Xi$ はスカラーである．(III) の K, π 相互作用は $g_{KK\pi}\overline{K}\tau K\pi$(III′) と書けるが次に述べるようにパリティ保存則より $g_{KK\pi}=0$ である．また (II) で $\Lambda\Lambda\pi$ 結合は荷電スピンを保存しないので $g_{\Lambda\Lambda\pi}=0$ で存在しない．

(II′) の K_G は次式で定義される荷電スピノルである．

$$K_G = \begin{pmatrix} \bar{K}_0 \\ -K^- \end{pmatrix},\quad \bar{K}_G = (\bar{K}^0,\ -K^+). \tag{11.27}$$

K_G はスピノル K に G 共役の演算（§ 10.2）を行なって得られる．すなわち，

$$G = Ce^{i\pi I_2} = C\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$GK = G\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} K^0 \\ -K^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{pmatrix} = K_G \tag{11.28}$$

である．C は荷電共役をとる演算子である．

荷電空間で任意の方向の軸 $\boldsymbol{n}$ 軸のまわりの角度 θ の回転により，K は次のように変換する．

$$K \to K' = e^{i\theta(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{I})}K.$$

$\boldsymbol{G}$ と $\boldsymbol{I}$ とが可換のことを用いると，同じ回転に対し K_G も K と同様な変換をするスピノルであることがわかる．

$$K_G \to GK' = Ge^{i\theta(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{I})}K = e^{i\theta(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{I})}GK = e^{i\theta(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{I})}K_G.$$

次にエネルギー密度は Lorentz 変換に対して不変量でなければならない．また(11.12)のパリティが保存する必要がある．このような湯川型の相互作用は π 中間子と核子の場合と同様に，

$$H(x) = ig\{\varphi_a(x)\bar{\psi}_b(x)\gamma_5\psi_c(x) + \varphi_a{}^\dagger(x)\bar{\psi}_c(x)\gamma_5\psi_b(x)\}\cdots\text{擬スカラー型},$$

$$H(x) = \frac{f}{m_a}\{\partial_\mu\varphi_a(x)\bar{\psi}_b(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi_c(x) + \partial_\mu\varphi_a{}^\dagger(x)\bar{\psi}_c(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi_b(x)\}\cdots\text{擬ベクトル型} \tag{IV}$$

の二通りが可能である．第二項は H をエルミット量にするため加えたものである．g, f は実数でそれぞれ擬スカラー結合定数，擬ベクトル結合定数という．

(III) の形の相互作用は強い相互作用としては存在しない．一般にスピン 0 の擬スカラー粒子相互の間に湯川型の相互作用が存在できない理由は空間反転に対し不変な $H(x)$ を作れないためで，たとえば $\varphi_a\varphi_b\varphi_c$ は Lorentz 不変であるが空間反転に対し符号を変える．このことは φ の微分量を含む湯川型の相互作用でも成立する．すなわち，3 個のスピン 0，負パリティ粒子の間の遷移 $a \to b + c$ を考えると，パリティ保存より b-c 間の軌道角運動量 l は 1, 3, … の奇数でなければならない．一方，角運動量保存則より $l = 0$ で両者を同時にみたし得ない．

n_B, S, Q の保存，I スピン保存，Lorentz 変換・空間反転に対し不変な相互作用のエ

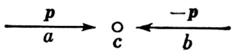
ネルギー密度は (I′), (II′), (IV) より 11－8 表のようになる.

11－8 表　ハイパロンの $\pi\cdot K$ 結合

$N\Lambda K$	$ig_{N\Lambda K}\bar{\psi}_N\gamma_5\phi_K\psi_\Lambda+(f_{N\Lambda K}/m_K)\bar{\psi}_N\gamma_5\gamma_\mu\partial_\mu\phi_K\psi_\Lambda+$	エルミット共役量
$N\Sigma K$	$ig_{N\Sigma K}\bar{\psi}_N\gamma_5\boldsymbol{\tau}\phi_K\psi_\Sigma+(f_{N\Sigma K}/m_K)\bar{\psi}_N\gamma_5\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\partial_\mu\phi_K\psi_\Sigma+$	〃
$\Lambda\Xi K$	$ig_{\Xi\Lambda K}\bar{\psi}_\Lambda\gamma_5\phi_{KG}\psi_\Xi+(f_{\Xi\Lambda K}/m_K)\bar{\psi}_\Lambda\gamma_5\gamma_\mu\partial_\mu\bar{\phi}_{KG}\psi_\Xi+$	〃
$\Sigma\Xi K$	$ig_{\Xi\Sigma K}\bar{\psi}_\Sigma\gamma_5\bar{\phi}_{KG}\boldsymbol{\tau}\psi_\Xi+(f_{\Xi\Sigma K}/m_K)\bar{\psi}_\Sigma\gamma_5\gamma_\mu\partial_\mu\bar{\phi}_{KG}\boldsymbol{\tau}\psi_\Xi+$	〃
$\Sigma\Lambda\pi$	$ig_{\Sigma\Lambda\pi}\bar{\psi}_\Sigma\gamma_5\boldsymbol{\phi}_\pi\psi_\Lambda+(f_{\Sigma\Lambda\pi}/m_\pi)\bar{\psi}_\Sigma\gamma_5\gamma_\mu\partial_\mu\boldsymbol{\phi}_\pi\psi_\Lambda+$	〃
$\Sigma\Sigma\pi$	$ig_{\Sigma\Sigma\pi}\bar{\psi}_\Sigma\gamma_5\times\psi_\Sigma\cdot\boldsymbol{\phi}_\pi+(f_{\Sigma\Sigma\pi}/m_\pi)\bar{\psi}_\Sigma\gamma_5\gamma_\mu\times\psi_\Sigma\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\phi}_\pi+$	〃

[相互作用の強さ]

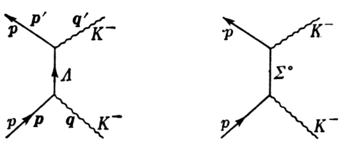
3個の素粒子 a, b, c 間の湯川型の相互作用 (11－8 表) は遷移 $a+b\to c$ 等をひき起こす. いま a, b 粒子が衝突して, この相互作用により c になったとしても, もし運動量・エネルギーの保存則がみたされていなければ c 状態は中間状態として存在しうるのみで, 不確定性関係から許される短い時間しか系はこの状態に存在し得ない. 重心系 (＝c 粒子の静止系) で考えるとエネルギー・運動量が同時に保存される条件は 11－13 図より明らかなように, $M_c \geq M_a + M_b$ である. 強い相互作用のいずれもこの条件をみたさないので, $H(x)$ の1次の摂動では実際の遷移は起こらない.



11－13 図　$a+b\to c$

例外として a, b, c のうちのいずれかが自由粒子でなく, たとえば原子核中の陽子・中性子のような場合には, H の1次の振動でも観測可能な現象をひき起こすことができ, たとえば ΛNK 結合により K^- 中間子が核中の陽子に衝突して Λ になることはできる. この事情は光電効果の場合と同じである (§ 8.5 参照).

自由粒子間の衝突を実際に行なわせるには, 少くとも局所的な相互作用が 2 点 X, Y で作用する H について2次の振動まで考えに入れねばならない. 例として K^-p 散乱を考えよう. $N\Lambda K$, $N\Sigma K$ 結合の 2 次の振動で 11－14 図のような中間状態 Σ^0, Λ^0 を通る弾性散乱が起こる. § 9.4 にしたがって2次の摂動で pK^- 弾性散乱の振幅 F を求めよう. 中間状態 Λ, Σ を通る振幅 (11－14 図 a, b) を F_a, F_b とすると, パリティ, 角運動量の保存則よりこれらは $j=1/2$, $l=1$ の散乱振幅である. l は K^-p 間の軌道角運動量である.



a　　　　b

11－14 図　K^-p弾性散乱
$p(\boldsymbol{p})+K^-(\boldsymbol{q})\to p(\boldsymbol{p}')+K^-(\boldsymbol{q}')$

運動量 $\boldsymbol{q}$ の K^- 中間子が静止している陽子に衝突して, 運動量 $\boldsymbol{q}'$ の K^-, 運動量 $\boldsymbol{p}'$

の陽子になる散乱では,

$$F_a = \frac{g_{N\Lambda K}^2}{c}\varphi(q')\bar{u}(p')i\gamma_5\frac{\gamma_\mu(p+q)_\mu - M_\Lambda c}{(p+q)_\mu{}^2 + M_\Lambda{}^2c^2}i\gamma_5 u(p)\varphi(q), \qquad (11.29)$$

$$F_b = \frac{g_{N\Sigma K}^2}{c}\varphi(q')\bar{u}(p')i\gamma_5\frac{\gamma_\mu(p+q)_\mu - M_\Sigma c}{(p+q)_\mu{}^2 + M_\Sigma{}^2c^2}i\gamma_5 u(p)\varphi(q). \qquad (11.30)$$

ここで,

$$p_\mu = (0, M_N c),\quad q_\mu = (q, E/c),\quad E = \sqrt{c^2q^2 + m_K{}^2c^4}.$$

特に,前方散乱のときは $p_\mu' = p_\mu = (0,\ M_N c)$, $q_\mu' = q_\mu = (q,\ E/c)$ である.また

$$u(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

である.(11.29) の分母は,

$$\begin{aligned}(p+q)_\mu{}^2 + M_\Lambda{}^2c^2 &= M_\Lambda{}^2c^2 - \left(M_N c + \frac{E}{c}\right)^2 + q^2\\ &= -2M_N E + (M_\Lambda{}^2 - M_N{}^2 - m_K{}^2)c^2\\ &= -2M_N\left[E - \frac{M_\Lambda{}^2 - M_N{}^2 - m_K{}^2}{2M_N}c^2\right]\\ &\equiv -2M_N(E - E_\Lambda).\end{aligned}$$

ただし,

$$E_\Lambda = \frac{c^2}{2M_N}(M_\Lambda{}^2 - M_N{}^2 - m_K{}^2)$$

である.(11.29) の分子は,γ_5 が γ_μ と反可換であることと,

$$\bar{u}(0)\boldsymbol{\gamma}u(0) = 0, \quad \bar{u}(0)\gamma_0 u(0) = 1$$

を使うと,

$$-\bar{u}(0)\gamma_5[\gamma_\mu(p+q)_\mu - M_\Lambda c]\gamma_5 u(0) = (M_\Lambda - M_N)c - \frac{E}{c}$$

となる.これより,

$$F_a = g_{N\Lambda K}{}^2\frac{M_\Lambda - M_N - E/c^2}{-2M_N(E - E_\Lambda)}\varphi(q)^2.$$

F_a は $E = E_\Lambda$ で無限大となり,そのときの係数($E = E_\Lambda$ における極の留数)は

$$-\frac{1}{2M_N}(M_\Lambda - M_N - E_\Lambda/c^2) = \frac{(M_\Lambda - M_N)^2 - m_K{}^2}{4M_N{}^2}.$$

したがって,$E = E_\Lambda$ の近くでは,

$$F_a \sim g_{N\Lambda K}{}^2 \frac{(M_\Lambda - M_N)^2 - m_K{}^2}{4M_\Lambda{}^2} \frac{1}{E - E_\Lambda} \varphi(q)^2. \tag{11.31}$$

同様に，

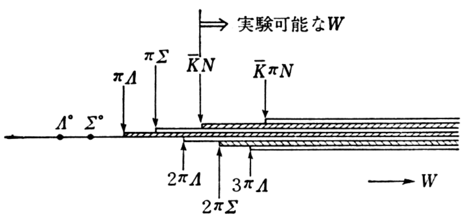
$$F_b \sim g_{N\Sigma K}{}^2 \frac{(M_\Sigma - M_N)^2 - m_K{}^2}{4M_\Sigma{}^2} \frac{1}{E - E_\Sigma} \varphi(q)^2. \tag{11.32}$$

E_Σ は E_Λ と同様に定義される.

E_Λ , E_Σ は重心系での K^-p 系の全エネルギー W がちょうど静止した Λ, Σ を作るのに充分な値になったとき，すなわち，

$$W = M_\Lambda c^2, \quad W = M_\Sigma c^2 \tag{11.33}$$

となるような K^- の実験室系でのエネルギーである. F_a, F_b はこのとき無限大となるのであるが， $W \geq (M_N + m_K)c^2 > M_\Sigma c^2 > M_\Lambda c^2$ なので実験できる W に対しては有限である. pK^- 散乱は Σ^0, Λ^0 中間状態を通る過程のみでなく，なお多くの中間状態を通る過程がある. 中間状態は $n_B = +1$, $S = -1$, $Q = 0$, $I = 0$ または 1 の状態で $\Lambda + \pi$, $\Sigma + \pi$, $\bar{K} + N$, $\cdots$ 等が考えられる. これら中間状態のとりうるエネルギー W の値を 11-15 図に示してある. エネルギー W での $\bar{K}N$ 散乱の散乱振幅には中間状態のエネルギーがこの W の値に近いものが効くので，低エネルギー$\bar{K}N$ 散乱には Σ^0, Λ^0 状態のみでなく $\Lambda + \pi$, $\Sigma + \pi$, $\bar{K} + N$, 等々も重要である. したがって， $W \geq (M_K + M_N)c^2$ での散乱実験から f_a, f_b, の大きさを推定し, $g_{N\Lambda K}$, $g_{N\Sigma K}$ について正確な知識を得るのは難しい.



11-15 図　K^-p 散乱に寄与する中間状態

$K^-p \to \Lambda^0$	$W = 1.12$ BeV
Σ^0	$W = 1.19$ BeV
$\pi^0\Lambda^0$	$W \geq 1.25$ BeV
$\pi\Sigma$	$W \geq 1.33$ BeV
$2\pi\Lambda$	$W \geq 1.39$ BeV
$\bar{K}$-N	$W \geq 1.43$ BeV
$2\pi\Sigma$	$W \geq 1.47$ BeV
$3\pi\Lambda$	$W \geq 1.53$ BeV
$\bar{K}\pi N$	$W \geq 1.57$ BeV

現在の所， 低エネルギーの $\bar{K}N$ 散乱， $\gamma + N \to \Lambda + K$, $\Sigma + K$, $\pi + N \to \Lambda + K$, $\Sigma + K$ 等の解析より，

$$\frac{g^2{}_{N\Lambda K}}{4\pi\hbar c} \approx \frac{g^2{}_{N\Sigma K}}{4\pi\hbar c} \approx 2 \tag{11.34}$$

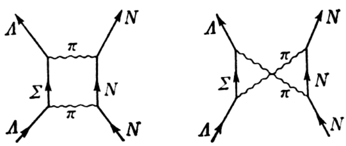
程度の値が得られている. これは $g_{NN\pi}{}^2/4\pi\hbar c \approx 14$ にくらべて約1桁小さく，

$$g_{N\Lambda K}{}^2/g_{NN\pi}{}^2 \approx m_\pi{}^2/m_K{}^2 \tag{11.35}$$

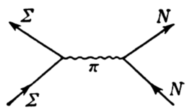
の関係が大体成立しているようにみえる．しかし $g_{N\Lambda K}{}^2/4\pi\hbar c$, $g_{N\Sigma K}{}^2/4\pi\hbar c$ の値はなお充分大きく，$\bar{K}N$ 散乱等にいくつかの共鳴状態が存在する．したがってこれら $N\Lambda K$, $N\Sigma K$ 結合を摂動で扱うことは一般にできない．

Ξ 粒子の K 中間子による力の強さ $g_{\Xi\Lambda K}$, $g_{\Xi\Sigma K}$ については充分な知識が得られていない．

ハイパロンの π 中間子による力については § 11.5 で述べる hypernucleus の研究から，$g_{\Lambda\Sigma\pi}$, $g_{\Sigma\Sigma\pi}$ についてその大きさを論ずることができる．Λ 粒子と核子との間の力を与えるものはいろいろあるが，11-16 図の 2 個の π 中間子の交換による力が Λ 粒子と核子とを結合して hypernucleus を作る主な寄与をする．この力は $g_{\Sigma\Lambda\pi}{}^2\ g_{NN\pi}{}^2$ に比例するので，これより $g^2{}_{\Sigma\Lambda\pi}$ の大きさを推定できる．($g_{NN\pi}{}^2/4\pi\hbar c\approx 14$ を使う)．さらにくわしく調べると，ΛN 結合のようすは中間状態に存在する ΣN 間の力にもよる．ΣN 間の力は 1 個の π 中間子の交換による力があり (11-17 図) $g_{NN\pi}\,g_{\Sigma\Sigma\pi}$ に比例するので，$g_{NN\pi}$ がわかっていれば，この力の大きさより $g_{\Sigma\Sigma\pi}$ について或る程度の知識を得ることができる．$g_{\Xi\Xi\pi}$ については極めて僅かな知識しか得られていない．



11-16 図　2 個の π 中間子の交換による ΛN 力



11-17 図　1 個の π 中間子の交換による ΣN 力

ハイパロンの関与する湯川型の相互作用の強さについては実験の不足，実験結果から力の強さを推定する際の難しさのため精度のよい答は得られてない．現状をまとめると擬スカラー結合の強さは 11-9 表のようなものである．

11-9 表　湯川型相互作用の強さ

$g^2{}_{NN\pi}/4\pi\hbar c=14$
$g^2{}_{\Lambda\Sigma\pi}/4\pi\hbar c\approx 14$
$g^2{}_{\Sigma\Sigma\pi}/4\pi\hbar c\approx (14?)$
$g^2{}_{N\Lambda K}/4\pi\hbar c\approx 2$
$g^2{}_{N\Sigma K}/4\pi\hbar c\approx 2$

擬スカラー結合の代りに擬ベクトル結合をとる場合には，その結合定数 f の大きさを，

$$f_{abc}=\frac{m_c}{M_a+M_b}g_{abc} \tag{11.36}$$

ととると擬スカラー結合の場合とほぼ同じ結果が得られる．これは (10.68) の関係を一般化したものである (問題 11.3)．擬ベクトル結合では $f^2{}_{NN\pi}/4\pi$ と $f^2{}_{N\Lambda K}/4\pi$ がほぼ等しい値 (≈ 0.1) となる．

〔共鳴状態〕

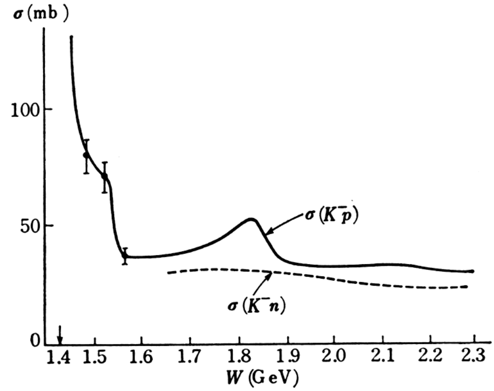
K 中間子と核子とを衝突させると強い相互作用により，いろいろな反応が起こる．たとえば K^-p 衝突では，

$$K^- + p \to K^- + p \text{（弾性散乱）},\ \bar{K}^0 + n \text{（荷電交換弾性散乱）}$$

$$K^- + p \to \begin{cases} K^- + \pi^0 + p,\ \bar{K}^0 + \pi^- + p,\ \cdots \\ \Lambda + \pi^0,\ \Sigma^{\pm,0} + \pi^{\mp,0},\ \cdots \\ \Lambda + \pi^+ + \pi^-,\ \cdots \\ \cdots\cdot \end{cases} \qquad \text{（非弾性散乱）}$$

等の弾性・非弾性散乱が起こる．

K^-p 衝突の全断面積を 11－18 図に記す．全エネルギー ～1815 MeV の所に全断面積の山がみられ，これは $n_B=1,\quad Q=0,\quad S=-1$ の共鳴状態と考えられる．$\bar{K}N$ 系の荷電スピンは K_G, N がそれぞれ $I=1/2$ であるから，



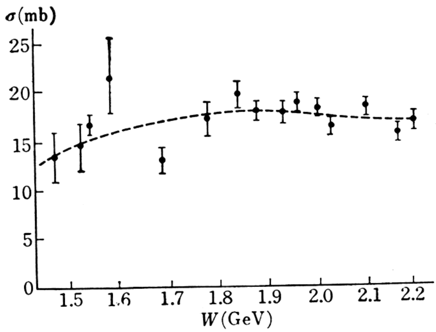
11－18 図　K^-p 散乱の全断面積
（点線は K^-n 散乱の全断面積）

$$I=1\begin{cases} \bar{K}^0 p & I_3=+1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{K}^0 n - K^- p) & \quad 0, \\ -K^- n & \quad -1 \end{cases} \qquad I=0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{K}^0 n + K^- p).$$

したがって K^-p の共鳴状態の I は 1 または 0 である．しかし K^-n 散乱 ($I=1$, $I_3=-1$) の全断面積で同じ質量の所に山が見出されないことより $I=0$ と考えられる．

KN(K^+p, K^+n 等) 衝突では $\bar{K}N$ 衝突と異なり，全断面積はエネルギーの関数として比較的ゆるやかに変化しており，共鳴状態は見出されていない (11－19 図)．また全断面積は K^-p 散乱にくらべて小さく，K^+p 間の力は K^-p 間の力にくらべて弱い．

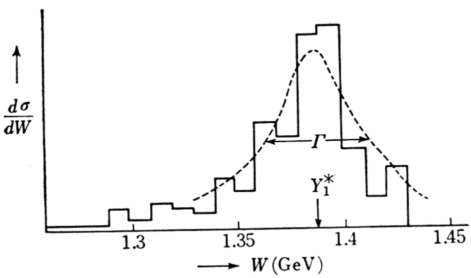
$\bar{K}N$ 衝突は $n_B=1$, $S=-1$ の共鳴状態を調べるのにつごうよいが，$\bar{K}N$ 衝突の全エネルギーは $W \geq 1.43$ GeV (11.15 図) で，これ以下のエネルギーの共鳴状態を調べるのには $\bar{K}N$ 散乱ではできない．$\bar{K}N$ と同一の n_B, S を持つ系としては $\pi\Lambda$, $\pi\Sigma$ 衝突が考えられ，これらの W はそれぞれ $W \geq 1.25$ GeV, $W \geq 1.33$ GeV で $\bar{K}N$ 散乱の



11－19 図 K^+p 散乱の全断面積

W の最小値よりさらに小さくなりうる．しかし核子と異なり Λ, Σ, π 等はターゲットとして用いることができないので，実際上このような衝突を実験的に測ることは困難である．

Kp, πp 衝突等の断面積を大雑把に $\sigma \sim 60\,\text{mb} = 6\times10^{-26}\,\text{cm}^2$，入射 K, π 中間子の数を $N \sim 10^6$個/sec. とすると，これらが陽子中を通過して1秒間に平均1回の衝突を起こすには $1/N\sigma \approx (1/6)\times10^{20}$ 原子/cm² の水素を通過しなければならない．（液体水素の密度 ρ は $\rho \approx 0.07$ であるから，これは $d = \dfrac{1}{N\sigma N_0\rho} \approx \dfrac{\frac{1}{6}\times10^{20}}{6\times10^{23}\times0.07} \approx 4\times10^{-4}\,\text{cm}$ の厚さの液体水素に相当する）．1秒間に1個の $\pi\Lambda$ 衝突を起こさすには，Λ の寿命が短いことを考慮すると $\dfrac{1}{6}\times10^{20}\times\dfrac{1}{2.5\times10^{-10}} \approx 7\times10^{28}$ 個/cm² の Λ を用意しなければならないが，実際には1個の Λ を用意することも難しい．



11－20 図 $K^- + p \to \pi^+ + \pi^- + \Lambda^0$ における $\pi^+\Lambda$ 系の全エネルギー W（入射する K^- の運動量 $\approx 0.85\,\text{GeV/c}$）

しかしながら $\pi\Lambda$, πK 衝突等不安定な素粒子間の衝突のようすは間接的な方法を通じてくることができる．$\bar{K}N$ 衝突の非弾性散乱 $K^- + p \to \pi^+ + \pi^- + \Lambda$ を例にとろう．11－20 図は一定のエネルギーの K^- によるこの非弾性散乱で作られた $\pi^+\Lambda$ のその重心系での全エネルギーの分布である．π^+, π^-, Λ の4次元運動量を p_+, p_-, p_Λ とすると $(p_+ + p_\Lambda)_\mu{}^2, \cdots$ 等は Lorentz 不変量で $\pi^+ - \Lambda$ の重心系 $(\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_\Lambda = 0)$ では，

$$(p_+ + p_\Lambda)_\mu{}^2 = (E_+ + E_\Lambda)^2/c^2 = W^2/c^2. \tag{11.37}$$

ただし，この E_Λ は Λ のエネルギーで W は $\pi^+ - \Lambda$ 重心系での全エネルギーである．非弾性散乱の微分断面積 $d\sigma/dW$ が $W \approx 1.38\,\text{GeV}$ で $\Gamma \approx 50\,\text{MeV}$ の幅の山を持つことは作られた $\pi^+ - \Lambda$ の間の力がこのエネルギー W のときに極大を持ち，$\pi^+ - \Lambda$ 散乱

を行なったとき，このエネルギーで共鳴が表われることを示していると考えられる．

同様に $K^- + p \to K^- + \pi^0 + p$, $K^0 + \pi^- + p$ 等より $K - \pi$ 散乱の共鳴を探すことができる．このようにして求められた各共鳴状態のエネルギー，幅，およびスピン J, パリティ P, n_B, S, I の大きさ 11-10 を表にしるす．これらと 10-3 表の $n_B = +1$, $S = 0$ の粒子・共鳴状態が現在知られている強い相互作用に関与する重粒子および共鳴状態である．これら共鳴状態の幅，J, P 等の値は実験の進むにつれて多少変ることも考えられる．

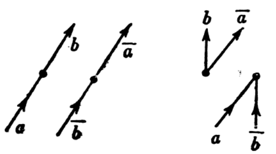
11-10 表　ハイパロンと共鳴状態　$n_B = +1$, $S \neq 0$

	質量 (GeV)	幅 (MeV)	J	P	S	I
Λ	1.115	~0	1/2	+	−1	0
Σ	~1.195	~0	1/2	+	−1	1
Ξ	~1.320	~0	1/2	+	−2	1/2
Y_1^*	~1.385	~50	3/2	+	−1	1
Y_0^*	~1.405	~50	1/2	−	−1	0
Y_0^*	~1.520	~16	3/2	−	−1	0
Ξ^*	~1.530	<7	3/2	+	−2	1/2
Ω	~1.675	~0	(3/2)	(+)	−3	0
Y_1^*	~1.660	~40	3/2	−	−1	1
Y_0^*	~1.815	~70	5/2	+	−1	0

より高エネルギーの共鳴状態，$|S|$ の大きな共鳴状態等は実験的になかなか見出し難い．今後も実験の進むにつれて新しい共鳴状態が見出されることが期待される．

〔一般の型の強い相互作用〕

この章ではこれまで素粒子間の力として湯川型の相互作用を考えた．これは電磁場とスピン 1/2 粒子との相互作用の minimal な形を手本にしたものであるが，相互作用の可能な形としては場の量につき 3 次の湯川型以外に 4 次，5 次，…，一般に n 次のものも考えうる．また特殊な場合に 2 次のものも考えられる．



11-21 図　$n = 2$ の相互作用 $g\bar{\psi}_b\psi_a$ による遷移

a)　$n = 2$

この相互作用は $a \rightleftarrows b$, 真空 $\rightleftarrows a + \bar{b}$, 真空 $\rightleftarrows \bar{a} + b$ の遷移をひき起こす．(11.21 図) Lorentz 変換・パリティの保存則から a, b は同じスピン・パリティを持たねばならないので，たとえば a が陽子，b が Σ^+ というぐあいで，$H(x) = g\bar{\psi}_p(x)\psi_{\Sigma^+}(x) +$ エルミ

ット共役等の相互作用が考えられる．しかしさらに Q, n_B, S, I の保存則より強い相互作用であるためには a と b は Q, n_B, S, I も同一でなければならず，実際には存在しない．この種の相互作用は第12章の弱い相互作用では存在しうる．

b) $n=4$

$a+b \rightleftarrows c+d$ 等の遷移を局所的にひき起こす．Fermi 型の相互作用はこれである．特に $n=3$ では存在しなかった擬スカラー粒子相互間の力もあり，たとえば，

$$\lambda(\varphi_\pi{}^2)^2 \qquad (\pi-\pi \text{ 散乱})$$
$$\lambda'\varphi_K{}^\dagger\varphi_K\varphi_\pi{}^2 \qquad (K-\pi \text{ 散乱}) \qquad \text{(V)}$$
$$\lambda''(\varphi_K{}^\dagger\varphi_K)^2 \qquad (K-K \text{ 散乱})$$

などが考えられ，中間子相互の散乱を起こさせる．

一般に Fermi 粒子の場 $\bar\psi$, ψ につき $2m(m=0, 1, 2, \cdots)$ 次，Bose 粒子の場 φ, φ^+ につき l 次の相互作用があり φ, φ^+ の微分が k 個入っている場合，結合定数 g の次元は

$$[\bar\psi]=[\psi]=[L]^{-3/2},\ [\varphi]=[\varphi^\dagger]=[\text{エネルギー}]^{1/2}[L]^{-1/2}=[\hbar c]^{1/2}[L]^{-1}$$
$$[H(x)]=[\text{エネルギー}][L]^{-3}=[\hbar c][L]^{-4} \qquad (11.38)$$

であるから（(6.84), (7.56) 参照），

$$[g]=[H(x)]/[L]^{-3m}[L]^{-l}[L]^{-k}[\hbar c]^{l/2}$$
$$=[\hbar c]^{1-l/2}[L]^{3m+l+k-4} \qquad (11.39)$$

である．長さの単位として，ある素粒子の Compton 波長 $(\hbar/Mc)=(\hbar c/Mc^2)$ をつかうと，

$$[g]=G[\hbar c]^{3m+(l/2)+k-3}[Mc^2]^{4-3m-l-k}. \qquad (11.40)$$

Gは次元のない定数である．(V) の相互作用では，

$$\lambda=G/\hbar c \quad (G:\text{無次元}) \qquad (11.41)$$

と書ける．

2個の中間子の間には強い力が働くことが知られている．中間子の標的を作って中間子・中間子散乱を起こさせることは不可能であるが，陽子のまわりに存在する π 中間子の雲に中間子を衝突させることにより散乱断面積を推定することができる．また，

$$\bar p+p\to\pi+\pi+\cdots+K+\bar K$$

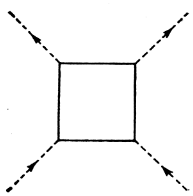
などの反応で作られた2個の中間子の4次元運動量 p_1, p_2 から $(p_1+p_2)_\mu{}^2=W^2/c^2$ を作り，中間子－中間子散乱で，どこに共鳴が現われるかを調べることもできる．同様に $(p_1+p_2+p_3)_\mu{}^2$ の分布から 3 個の中間子の共鳴状態を調べることもできる．このよう

にして見つかった共鳴状態（$n_B=0$ のもの）を 11-11 表に示す．しかしこれらの解析から（V）の結合定数 $\lambda, \lambda', \lambda''$ の値を決めることは困難である．

11-11 表　中間子の共鳴状態

	質量（MeV）	幅（MeV）	J	P	S	I	
η	549	<10	0	−	0	0	3π の共鳴状態
ρ	763	100	1	−	0	1	2π　〃
ω	783	<15	1	−	0	0	3π　〃
φ	1020	< 5	1	−	0	0	$K\bar{K}$　〃
κ^*	725	<15	$\binom{0}{1}$	$\binom{+}{-}$	1	1/2	$K\pi$　〃
K^*	891	50	1	−	1	1/2	$K\pi$　〃

中間子の間に散乱が起こるからといって（V）の相互作用が存在すると結論するのは早計である．それは（IV）の湯川型相互作用だけからでも 11-22 図のような高次の過程により中間子の散乱が起こりうるからである．前にも述べたようにある相互作用が実際に存在するのかそれとも他の相互作用から導かれたものかを決めることは困難である．湯川型の相互作用 $a+b\rightarrow c$ にしてもそれが基本的なものでなく，もっと複雑なものから導かれたものかもしれない．しかし次のようにして相互作用の詳細によらぬ形で $a+b\rightarrow c$ 遷移の強さを定義することができる．いま $a-b$ 間の力が複雑ではあるがある有限の到達距離を持ち，$a-b$ の相対距離 r が $r>R$ のときは力が働かないとする．$a-b$ 系の束縛状態 $\psi=\varphi/r$ は次の Schrödinger 方程式を解いて得られる（簡単のため $l=0$ とする）．



11-22 図　中間子-中間子散乱の Feynman 図．実線は baryon または反 baryon の伝播を示す．

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+V(r)\varphi=E\varphi,$$
$$V(r)=0,\quad r>R. \tag{11.42}$$

M は $a-b$ 系の換算質量で，

$$\frac{1}{M}=\frac{1}{M_a}+\frac{1}{M_b}. \tag{11.43}$$

束縛状態は $E<0$ の固有状態で φ は $r>R$ では，

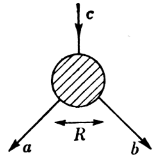
$$\varphi(r)=\eta e^{\sqrt{-2ME/\hbar^2}\,r} \tag{11.44}$$

で与えられる．η は規格化の条件できまるものである．E は束縛粒子 c の質量 M_c と

$$M_c=M_a+M_b+E/c^2 \tag{11.45}$$

の関係にある．したがって (11.44) の指数関数形は a, b, c の質量だけできまり，力には関係しない．したがって $r>R$ での a, b の存在確率の大きさを決める η で $a+b\rightarrow c$ の強さを与えることにすれば，力の複雑さには関係なく一義的に決められる．

以上は非相対論的方程式での議論であるが，一般に粒子間の力の外側で自由粒子を見出す振幅という考え方で相互作用の強さを与えることができる．これだと点xでのエネルギー密度を与えるやり方と違い，あいまいな点がない．



11－23 図

〔問 題 11.3〕 Baryon が中間子を放出あるいは吸収するときの行列要素は，(11.36) のようにとるとき擬ベクトル結合でも擬スカラー結合でも同じになることを示せ．

〔問 題 11.4〕 π 中間子，K 中間子の場についてそれぞれ 2 次で，微分を 2 個含む相互作用 Hamiltonian にはどのようなものがあるか．

〔問 題 11.5〕 共鳴状態 η の G パリティは $+1$ と考えられている．このとき η は強い相互作用では崩壊できないことを示せ．電磁的相互作用も考えるならば，どのような崩壊が可能か．

§ 11.5　Hypernuclei

核子（陽子と中性子）は π 中間子を媒介とする核力で強く結合され原子核を作る．核子以外の baryon についてはどうであろうか．原子核のうち安定な原子核では核内の陽子・中性子は $\beta^{\pm}$ 崩壊等に対して安定であり，また極めて多数の陽子・中性子が集まった大きな原子核もある．これに対してハイパロンは中性子にくらべて崩壊の Q 値は極めて大きく (11－3 表)，ハイパロン相互にまたは核子と結合してもその結合エネルギーが Q 値をこえて大きくなることはないので，ハイパロンが安定になることは期待できない．ハイパロンの寿命は大体 $\sim 10^{-10}$ sec であるから，ハイパロン・核子が結合して作られる核があれば，やはりこの程度の寿命を持ったものと考えられる．

Λ 粒子は核子と結合して原子核を作ることが知られており **hypernuclei** (または hyperfragment) という．11－12 表は見出された hypernucleus とその結合エネルギー，

11－12 表　Hypernuclei と結合エネルギー B_Λ

	結合エネルギー B_Λ		結合エネルギー B_Λ
${}_\Lambda H^3$	0.21 ± 0.20 MeV	${}_\Lambda Be^8$	6.6 ± 0.6 Mev
${}_\Lambda H^4$	2.20 ± 0.14	${}_\Lambda Li^9$	7.2 ± 0.6
${}_\Lambda He^4$	2.36 ± 0.12	${}_\Lambda Be^9$	6.6 ± 0.3
${}_\Lambda He^5$	3.08 ± 0.06	${}_\Lambda B^{11}$	9.9 ± 0.6
${}_\Lambda He^7$	3.0 ± 0.5	${}_\Lambda B^{12}$	9.8 ± 0.4
${}_\Lambda Li^7$	5.5 ± 0.3	${}_\Lambda C^{13}$	10.8 ± 0.5
${}_\Lambda Li^8$	6.1 ± 0.4		

スピンの表である．たとえば $_{\Lambda}H^3$ は Λ, p, n の3個の素粒子の結合した核で $n_B=3$, $Q=1$, $S=-1$ である．同様に $_{\Lambda}He^4$ は Λ, n および2個の p の結合した核で $n_B=4$, $Q=2$, $S=-1$ である．hypernucleus が重くなる程その Q, n_B の実験的決定が難しくなお多数の hypernucleus が存在すると思われるが，それらの性質は確かめられてない．(Z, M が大きいので range が短く，また，たとえエネルギーが大きく range の長い場合でも寿命が短いので実験が難しい)．

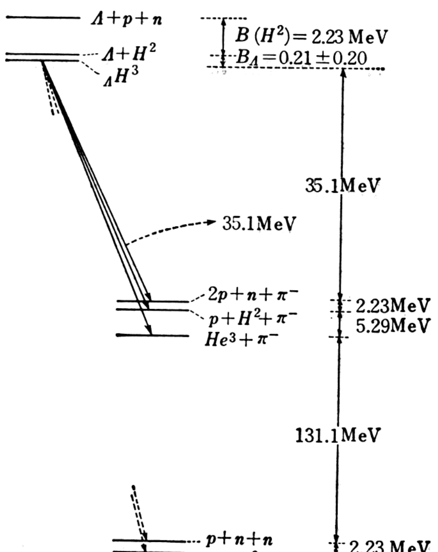
Hypernucleus の結合エネルギーは次のように定義する．たとえば $_{\Lambda}H_3$ の場合では

$$_{\Lambda}H^3 \rightarrow \Lambda + H^2,$$

$$B_{\Lambda} = [M(\Lambda) + M(H^2) - M(_{\Lambda}H^3)]c^2 \qquad (11.46)$$

で $B_{\Lambda} > 0$ である．一般に hypernucleus を $_{\Lambda}Z^A$, 質量数 A, 荷電 Z の原子核を Z_A と書くと，

$$B_{\Lambda} = [M(\Lambda) + M(Z_{A-1}) - M(_{\Lambda}Z^A)]c^2. \qquad (11.47)$$



11-24 図　$_{\Lambda}H_3$ とその崩壊

B_{Λ} は核 Z_{A-1} に1個の Λ 粒子が加わった時に生ずる余分のエネルギーで，$B_{\Lambda} > 0$ のとき hypernucleus として存在し，$B_{\Lambda} < 0$ のときは存在しない．核 Z_A の結合エネルギーを $B(Z_A)$ と書くと hypernucleus $_{\Lambda}Z^A$ を Λ, p, n から作るときに放出される全エネルギーは，

$$B_{\Lambda} + B(Z_{A-1})$$

である．11-24 図は $_{\Lambda}H^3$ に対し，これらエネルギーの関係を示す．

通常の原子核では核 Z_A に1個の陽子または中性子を加えて $(Z+1)_{A+1}$ または Z_{A+1} を作るときの結合エネルギーはAの大きさによらず大体一定で約 8 MeV であるが，Λ 粒子を核 Z_A に結合させて $_{\Lambda}Z_{A+1}$ を作るときの B_{Λ} は 11-12 表からわかるように，A と共に単調にふえていく．また A の小さいときの B_{Λ} は極めて小さく Λ と核子の間の力は核力にくらべて弱いことを示している．このため，$_{\Lambda}H^2$, すなわち Λ と p の結合した核は存在しない．($B(_{\Lambda}H^2) < 0$)．同様に

Λ と n の結合核も見出されていない.

Λ の自然崩壊 $\Lambda \to N + \pi$ の Q 値にくらべて B_Λ は小さいので, hypernucleus は $\sim 10^{-10}$ sec 程度の寿命で崩壊する. たとえば ${}_\Lambda H^3$ は次のようないろいろの仕方で崩壊する.

$$
{}_\Lambda H^3 \begin{cases} \nearrow He^3 + \pi^-,\ p + H^2 + \pi^-,\ 2p + n + \pi^- \cdots A \\ \to (H^3 + \pi^0,\ n + H^2 + \pi^0,\ p + 2n + \pi^0) \cdots B \\ \searrow (H^2 + n,\ p + 2n). \cdots\cdots\cdots\cdots C \end{cases}
$$

括弧内のものは実験的には確かめられてないが存在すると思われる. 11-24 図には π 崩壊 (π^- のみ) および π の出ない崩壊が示してある. これらは ${}_\Lambda H^3$ 内の Λ の崩壊によるものであるが, 二通りの崩壊の機構が考えられる.

$$
\Lambda \to \begin{cases} p + \pi^- \\ n + \pi^0. \end{cases} \qquad \text{(a)}
$$

$$
\begin{cases} \Lambda + \text{“}\pi^{+}\text{”} \to p \\ \Lambda + \text{“}\pi^{0}\text{”} \to n. \end{cases} \qquad \text{(b)}
$$

a) Λ の自然崩壊. 作られた $\pi^{-,0}$ は核内の p, n に吸収され外に出てこないこともある. このときは ${}_\Lambda H^3$ の (C) 崩壊にあたる. b) Λ の強制崩壊. ${}_\Lambda H^3$ 内の核子の作る $\pi^{+,0}$ 中間子場と Λ とが弱い相互作用により p, n に遷移する過程で (C) 崩壊に寄与する. この b) は核内の π 中間子場による Λ の強制崩壊で, このため hypernucleus の寿命は自由な Λ の寿命より一般に短かい.

Λ と核子間の力は (I′), (II′) の強い相互作用から導かれる. 11-16 図には 2 個の π 中間子による力を示してあるが, このほか K 中間子の交換による力もある. これらの特長は次のようである.

	range	力の型	力の強さ
2π)	$\lesssim \hbar/2m_\pi c(\approx 0.7\times 10^{-13}\,\text{cm})$,	通常力,	$\propto g^2{}_{NN\pi}/4\pi\hbar c \cdot g^2{}_{\Lambda\Sigma\pi}/4\pi\hbar c$
K)	$\lesssim \hbar/m_K c(\approx 0.4\times 10^{-13}\,\text{cm})$,	交換力,	$\propto g_{N\Lambda K}{}^2/4\pi\hbar c.$

2π), K) はそれぞれ通常力・交換力のうちで最も力の range の長いものである.

強い相互作用は荷電スピンを保存するので, これより導かれる ΛN 間の力も荷電スピンを保存する. したがって, Λp, Λn 間の力は等しいと考えられる. (このことは $p \rightleftarrows n$ の交換に対する対称性, すなわち荷電対称性だけからも導かれる. (よりくわしい考察から, 2 個の π 中間子交換による力が主に hypernucleus を作る働きをしており, かつ, これから導かれる力は ΛN のスピンの和が 0 か 1 かに非常に依存することが示されている.)

いろいろな hypernucleus の B_Λ, スピン J と ΛN 力にもとづく計算との比較から結合定数の大きさを推定しうる．$g^2{}_{NN\pi}/4\pi\hbar c\approx 14$ を用いると，

$$g^2{}_{\Lambda\Sigma\pi}/4\pi\hbar c\approx g^2{}_{\Sigma\Sigma\pi}/4\pi\hbar c\approx g^2{}_{NN\pi}/4\pi\hbar c\approx 14. \qquad (11.48)$$

(ΛN 間の力を論ずるときには強い相互作用による遷移 $\Lambda N\rightleftarrows\Sigma N$ のために，ΣN 間の力を除外して論ずることはできない．こうして $g^2{}_{\Sigma\Sigma\pi}/4\pi\hbar c$ の大きさはある程度評価できるが誤差は相当大きい．)

Λ と核子から作られた hypernucleus が見出されているのに反し，Σ, Ξ 粒子の作る原子核や，K 中間子を含む核の存在は確かめられてない．Σ 粒子が核内に入ると，つぎのような反応が起こりうる．

$$\Sigma^+ + \text{“}n\text{”}\to\Lambda+p,\ \Sigma^- + \text{“}p\text{”}\to\Lambda+n,\ \Sigma^0+\text{“}p\text{”}\to\Lambda^0+p,\ \Sigma^0+\text{“}n\text{”}\to\Lambda^0+n.$$

(“p”, “n” は核内の p, n を意味する)．これらの反応は大きな Q 値を持ち ($Q\approx(M_\Sigma-M_\Lambda)c^2\approx 80\,\text{MeV}$)，かつ強い相互作用のみたす保存則とむじゅんしないので，強い相互作用により極めて短い時間（核単位の程度）に Σ は Λ に変ってしまうので，Σ の hypernucleus を作ることができない．例外として Σ^+-p, Σ^--n の結合した質量数2の二つの結合状態に対しては上の反応は存在しない．もし Σ^+-p, および（または）Σ^--n 間の相互作用が強ければ Σ の hypernucleus として観測される可能性がある．現在の所これらは力の強さが充分でなく hypernucleus にはならないと考えられている．

Ξ 粒子が原子核内に入ると，Σ の場合と同様に強い相互作用により次の反応が起こる．

$$\Xi^- + \text{“}p\text{”}\to\Lambda^0+\Lambda^0,\quad \Xi^0+\text{“}n\text{”}\to\Lambda^0+\Lambda^0.$$

このときの Q 値は $\sim$27 MeV である．したがって Ξ 粒子を含む hypernucleus の存在も期待されない．例外として Ξ^--n, Ξ^0-p の結合状態が考えられるが現在の所では実験的に見つかっておらず多分 $B_\Xi<0$ と考えられる．

K 中間子と核子の結合系も反 K 中間子 $\bar{K}^0$, K^- に対しては，

$$\bar{K}^0+\text{“}p\text{”}\to\Sigma^+,\Lambda^0+\pi^+,\Sigma^{+,0}+\pi^{0,+}\cdots;\ \bar{K}^0+\text{“}n\text{”}\to\Lambda^0,\Sigma^0,\Lambda^0+\pi^0,\Sigma^{\pm,0}+\pi^{\mp,0},\cdots$$

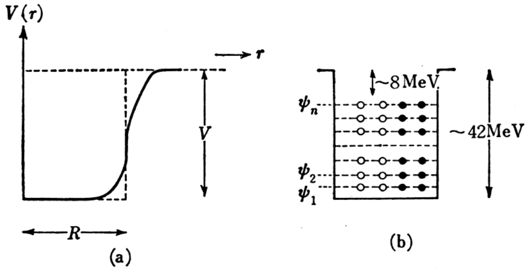
$$K^-+\text{“}p\text{”}\to\Lambda^0,\Sigma^0,\Lambda^0+\pi^0,\Sigma^{\pm,0}+\pi^{\mp,0},\cdots;\ K^-+\text{“}n\text{”}\to\Sigma^-,\Lambda^0+\pi^-,\Sigma^{0,-}+\pi^{-,0},\cdots$$

等のために不安定で hypernucleus は作れない．これに反し K 中間子 K^+, K^0 に対しては強い相互作用で核内の K^+, K^0 を不安定にするものがないので，もし K と核子間に強い引力が働けば束縛状態が作られうる．実際には $K-N$ 間の力は大体斥力で，このような K を含む原子核は存在しないと考えられる．

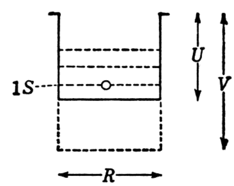
以上のようにハイパロン・K中間子を含む原子核としては Λ 粒子を含む hypernucleus のみ存在する．今日知られているものは Λ を1個含む $S=-1$ の核であるが，1個以

上の Λ を含む核の存在も当然予想される．ただ，実験的には外から高エネルギー粒子をあてて Λ を作るときに，多数の Λ を作る threshold energy は1個の Λ を作るときより非常に高いこと，またその断面積は小さくなること，および作られた Λ が核内にとどまるためには，それらの Λ の運動エネルギーが低くなければならないこと等のために，2個以上の Λ 粒子を含む $S<-1$ の hypernucleus はなかなか作り難い．

原子核理論によれば原子核を構成する核子は他の核子により作られるポテンシャルの中を自由に運動していると考えて近似的に良いことが知られている．ポテンシャルの形は，11-25 図の（a）のようなものであるが，軽い核を除いては深さ V，半径 R の井戸型のポテンシャルと考えてよい．$V\approx 42$ MeV である．陽子・中性子はこのポテンシャルの



11-25 図　原子核内の陽子・中性子
○陽子　●中性子



11-26 図　Hypernucleus 内の Λ 粒子

中での定常状態 $\psi_1, \psi_2, \cdots$ のうちのエネルギーの低い方の状態をしめており，Pauli 原理により各状態に陽子・中性子が2個ずつ入っている．2個の陽子（または中性子）のスピンの向きは互に反対方向である．

Hypernucleus 中の Λ と核子との間の力は短かい range の力で，したがって Λ はその近傍にある核子からのみ力をうける．原子核内での核子密度は大体一様なので，核表面を除いては核内のどの場所でも Λ は同数個の核子からの力を受け，ポテンシャルの深さは場所および核の質量数によらず大体一定のことが予期される．この深さを U としよう．Λ はこの深さ U，半径 R の井戸型ポテンシャルの中での定常状態の中で一番低いエネルギーの状態をとる（1S 状態）（11-26 図）．半径 R，深さ U の井戸型ポテンシャルの中での最底エネルギー状態のエネルギー（$-B_\Lambda$）は大体次式で与えられる．

$$B_\Lambda \approx U - \frac{\pi^2\hbar^2}{2M_\Lambda R^2}. \tag{11.49}$$

R は質量数 A の核に対し，

$$R \approx r_0 A^{1/3},\ \ r_0 \approx (1.2\sim1.4)\times10^{-13}\,\mathrm{cm}. \tag{11.50}$$

(11.49) を導くには井戸型ポテンシャルに対する Schrödinger 方程式を解く．$l=0$ に対し $r<R$ での波動関数は $\psi\propto\sin(p_1r/\hbar)/r$, $r>R$ に対し $\psi\propto e^{-\chi r}/r$ とすると，$r=R$ での境界条件より $(p_1R/\hbar)\cot(p_1R/\hbar)=\chi R$. B_Λ と χ との関係は，$\chi^2=\dfrac{2M_\Lambda}{\hbar^2}B_\Lambda$, また $\dfrac{p_1{}^2}{2M_\Lambda}=U-B_\Lambda$ である．$p_1\ll\chi\hbar$ $(U-B_\Lambda\ll B_\Lambda,\ U)$ の場合は $\cot(p_1R/\hbar)\approx\infty$, このうち p_1 の最小値に対しては $p_1\approx\dfrac{\pi\hbar}{R}$. したがって $B_\Lambda\approx U-\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2M_\Lambda R^2}$.

(11.49) は B_Λ が質量数 A がふえると共に増大し，A が非常に大きくなると $B_\Lambda\approx U$ になることを示している．U の大きさを知るには井戸型ポテンシャルの近似のよい A の大きな hypernucleus の実験値を使うのがよい．B_Λ の値が測られている A の最も大きな hypernucleus $_\Lambda C^{13}$ より U を求めると，

$$B_\Lambda=10.8\pm0.5\,\mathrm{MeV}\qquad ({}_\Lambda C^{13})$$

より，

$$U=26\pm2.5\,\mathrm{MeV}. \tag{11.51}$$

誤差は主として C^{12} の核半径がよく知られないことによる．したがって Λ に対する核ポテンシャルは核子に対する核ポテンシャルの $\sim2/3$ 程度と考えられる．

§11.6 ユニタリー対称性

Baryon および中間子には共鳴状態も含めると非常にたくさんの種類があることをみてきたが，これらは荷電スピンによるいくつかの多重項に分類できた．陽子と中性子は荷電スピン 1/2 の核子の二つの状態で，Σ^+, Σ^0, Σ^- は荷電スピン1の三重項である．一つの多重項に属する状態は，荷電空間の回転で (10.18), (10.35) のように互に移りかわる．すなわち n 重項に属する粒子の状態を $\varphi_\alpha(\alpha=1,\cdots,n)$ とすれば，荷電空間の回転に対して n 行 n 列の行列 $A_{\alpha\beta}$ が対応して，状態は，

$$\varphi_\alpha'=A_{\alpha\beta}\varphi_\beta\quad(\alpha,\ \beta=1,\ \cdots,\ n) \tag{11.52}$$

と変わる．hamiltonian がこの回転で不変ならば（荷電不変ならば），$H\varphi_\alpha=E\varphi_\alpha$ から $H\varphi_\beta=E\varphi_\beta$ が導かれるので，エネルギー固有値（質量）はすべて等しいはずである．実際には電磁的相互作用など荷電不変性を破る力が存在するので，多重項に属する粒子の間には質量差が存在する．しかしこれは小さいので，5 MeV 程度の差は無視する近似では荷電不変性，荷電多重項の考えが成り立つ．多重項の粒子は質量が等しいだけでなく，そ

のスピン，パリティ等が共通であるのはもちろんである．

荷電空間（3次元の空間）の回転の全体は数学のことばで群をつくり，これを $SO(3)$（3次元 orthogonal group の意味）という．これの要素である一つの回転に対して，n 次元空間の変換(11.52)が対応する．このようなとき，群は n 次の行列により表現されたという．(11.52) は $SO(3)$ の n 次元空間による表現である．一般に多重項は，Hamiltonian を不変にする群の表現になっていることがわかる．

素粒子および共鳴の表を見ると，いくつかの粒子が共通のスピン，パリティを持っている．たとえば中間子では，

$$\pi^{\pm,0},\ \eta,\ K^{+,0},\ K^{-},\ \bar{K}^{0} \tag{11.53}$$

は，いずれもスピン 0，パリティ − であり，baryon では

$$p,\ n,\ \Lambda,\ \Sigma^{\pm,0},\ \Xi^{0},\ \Xi^{-} \tag{11.54}$$

がスピン 1/2，パリティ + と考えられる．これらの質量は等しくはないが，それ以外の性質は似ているので，質量差を無視することにすれば一まとめにして大きい多重項（**ユニタリー多重項**という）を考えることができそうである．これは荷電不変性よりさらに広い不変性を考えることになるが，多重項内にかなりの質量差があることから，この新しい不変性は近似的なものである．

新しい不変性としてどのようなものが適当かを考える前に，荷電不変性（$SO(3)$ による不変性）を少し別の形に書き改めてみよう．荷電空間の $\boldsymbol{n}$（$=n_1,\ n_2,\ n_3$）方向のまわりに座標系を θ だけ回転すると，p，n は，

$$\begin{pmatrix} p' \\ n' \end{pmatrix} = \exp\left(i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}\right)\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \tag{11.55}$$

で変換されるが，この変換行列は $(\boldsymbol{\tau n})^2=1$ により，

$$\exp\left(i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\tau n}\right) = \cos\frac{\theta}{2} + i\boldsymbol{\tau n}\sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}+in_3\sin\frac{\theta}{2} & (in_1+n_2)\sin\frac{\theta}{2} \\ (in_1-n_2)\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}-in_3\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{11.56}$$

この2行2列の行列 U はユニタリーであり，その行列式は1である．

$$U^{\dagger}U=1, \quad \det(U)=1. \tag{11.57}$$

逆に(11.57)を満足する2行2列の行列は(11.56)の形に書くことができ，3次元空間の回転に対応している．(11.57)をみたす2次の行列の全体は群をつくり，この群を $SU(2)$（2次元 special unitary 群の略．Special とは行列式の値が1のものに限るという意味）という．もともと荷電空間という3次元空間が実際に存在するわけでなく，(11.55) のよう

な変換だけが意味のあるものであるから，荷電不変性を $SO(3)$ に対する不変性というかわりに，(11.55) を基本的なものを考えて $SU(2)$ に対する不変性ということもできる.

p と n を2成分スピノル ξ_α で表わし，反核子 $\bar{p}$, $\bar{n}$ をスピノル ξ^α で表わすことにする.

$$\xi_\alpha=\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix},\quad \xi^\alpha=(\bar{p},\ \bar{n}). \tag{11.58}$$

反核子は核子のエルミット共役量から得られるもので，ξ^α は $\xi_\alpha{}^*$ と同じように変換される.

$$\begin{aligned}\xi_\alpha{}'&=\sum U_{\alpha\beta}\xi_\beta,\\ \xi'^\alpha&=\sum U_{\alpha\beta}{}^*\xi^\beta=\sum \xi^\beta(U^\dagger)_{\beta\alpha}.\end{aligned} \tag{11.59}$$

次に核子 ξ_α と反核子 ξ^α からなる系の変換性を調べよう. $I=1/2$ と $I=1/2$ の系の合成系であるから，$I=0$ と $I=1$ の状態が含まれているはずである.

$$\Phi_\alpha{}^\beta=\xi^\beta\xi_\alpha$$

とすると，$SU(2)$ の変換で，

$$\Phi_\alpha{}'^\beta=\sum_{\gamma,\delta} U_{\alpha\gamma}\Phi_\gamma{}^\delta U_{\delta\beta}{}^\dagger \tag{11.60}$$

となる. 行列 $\Phi_\alpha{}^\beta$ の跡 $\sum_\alpha \Phi_\alpha{}^\alpha$ は不変量であって，これが $I=0$ に相当する. これを引いた残り，

$$\Psi_\alpha{}^\beta=\xi^\beta\xi_\alpha-\frac{1}{2}\delta_\alpha{}^\beta\sum\xi^\gamma\xi_\gamma=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\bar{p}p-\bar{n}n) & \bar{n}p\\ \bar{p}n & -\frac{1}{2}(\bar{p}p-\bar{n}n)\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+\\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau\pi) \tag{11.61}$$

は, $I=1$ すなわち π 中間子と同じように変換されることがわかる. $\sim$ は $SU(2)$ で同じように変換されるという意味である. このことを確かめるには, $\pi'^2=(\tau\pi')^2$ をつくり，これが $(\tau\pi)^2=\pi^2$ に等しいことから π^2 の長さが不変，すなわち，3次元直交変換であることをみればよい. 核子・反核子の系がπ中間子と同じように変換されることから，さらに積極的に，π 中間子は核子・反核子の結合してできた束縛状態であるという描像を考えることもできる. しかしここでは単に変換性が等しいことだけを問題とすることにする.

[3次元ユニタリー群]

陽子，中性子の2成分スピノルから出発して π 中間子をつくることができたが，p, n

だけでは strangeness を持つ粒子はでてこない．そこで strangeness の素となるべきものとして Λ 粒子も仲間に加えて 3 成分スピノル

$$\xi_\alpha=\begin{pmatrix} p \\ n \\ \Lambda \end{pmatrix},\quad \xi^\alpha=(\bar{p},\ \bar{n},\ \bar{\Lambda}) \tag{11.62}$$

を考える．この 3 個の粒子を基本的なものと考え，これからすべての粒子がつくられる（少くとも変換性に関しては）という立場を**坂田模型**という．3 個の baryon ξ_α を変換する一般のウニタリー行列は，

$$e^{i\gamma}U,\quad U^\dagger U=1,\quad \det(U)=1$$

と書くことができる．ただし U は行列式が 1 のウニタリー行列である．このうち $e^{i\gamma}$ は baryon 数の保存を与えるゲージ変換で，この部分を除くと残りは $SU(3)$ の群を作る．こうして $SU(2)$ の不変性を拡張して $SU(3)$ に対する不変性を考えてみよう．もちろん核子と Λ 粒子の質量は等しくないので，$SU(3)$ に対する不変は近似的なものであり $M_\Lambda=M_N$ と見なす極限でのみ成り立つ．

まず，この群の無限小変換を調べてみる．$SU(2)$ では無限小変換（(11.55) の無限小変換）は，

$$U=1+\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{3}\tau_i\Delta\theta_i$$

で与えられる（$\Delta\theta$ の 2 次以上は無視する）．τ_i は (10.17) で与えられる行列で，跡が 0 のエルミット行列である．$SU(3)$ では無限小変換を，

$$U=1+i\Delta U$$

と書くと，これがウニタリー行列であるためには（ただし ΔU の 2 次は無視する），ΔU はエルミット行列でなければならない．次に U の行列式が 1 になるためには（ΔU の 1 次まで）ΔU の跡が 0 である．3 行 3 列の行列でこの条件を満足し，互に独立なものは 8 個存在する．それを $\lambda_i\,(i=1,\ \cdots,\ 8)$ とすれば，

$$U=1+\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{8}\lambda_i\Delta\theta_i \tag{11.63}$$

と書くことができる．

λ の具体的な形として次のようにとることにしよう．まず $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ は $p,\ n$ のみに働き，$\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$ に相当するものとする．

$$\lambda_i=\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\tau_i} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\qquad i=1,\ 2,\ 3. \tag{11.64}$$

λ_4, λ_5 は p と Λ を入れ換え，λ_6, λ_7 は n と Λ を入れ換えるようにする．

$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}. \tag{11.65}$$

残る λ_8 は核子と Λ 粒子を区別するもので，

$$\lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}. \tag{11.66}$$

これらの行列は，

$$T_r(\lambda_\alpha\lambda_\beta)=2\delta_{\alpha\beta} \tag{11.67}$$

の関係を満足する．ただし，T_r は行列の跡を意味する．8 個の λ_i のうち 2 個だけ（λ_3 と λ_8）が対角行列で互に可換である．これは荷電スピンのときと比較して，いまは 2 個の保存量（I_3 と strangeness S）が存在することに対応している．

Baryon p, n, Λ と反 baryon $\bar{p}$, $\bar{n}$, $\bar{\Lambda}$ の合成系を考えよう．$\xi^\beta\xi_\alpha$ は (11.60) のように変換され（ただし $\alpha,\beta=1, 2, 3$），跡 $\sum_\alpha\xi^\alpha\xi_\alpha$ はやはり変換の不変量である．この部分を引いて，

$$P_\alpha{}^\beta=\xi^\beta\xi_\alpha-\frac{1}{3}\delta_\alpha{}^\beta\sum\xi^\gamma\xi_\gamma$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{2\bar{p}p-\bar{n}n-\bar{\Lambda}\Lambda}{3} & \bar{n}p & \bar{\Lambda}p\\ \bar{p}n & \dfrac{2\bar{n}n-\bar{\Lambda}\Lambda-\bar{p}p}{3} & \bar{\Lambda}n\\ \bar{p}\Lambda & \bar{n}\Lambda & \dfrac{2\bar{\Lambda}\Lambda-\bar{p}p-\bar{n}n}{3}\end{pmatrix}. \tag{11.68}$$

これを (11.61) と同じように，

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\lambda_i p_i \tag{11.69}$$

と書くことにすれば，p_i は次の関係で与えられる変換をする．

$$\sum_i\lambda_i p_i'=\sum_i U\lambda_i U^\dagger p_i.$$

あるいは λ_i を掛けて跡をとり，(11.67) をつかうと，

$$p_i'=\frac{1}{2}\sum_j T_r(\lambda_i U\lambda_j U^\dagger)p_j\quad (i,\ j=1,\ \cdots,\ 8) \tag{11.70}$$

である．与えられた U に対し p_i の1次変換が得られるので，これは $SU(3)$ の8次元空間による表現である．すなわち3次元の ξ_α とその複素共役量のように変換する ξ^α の合成系は不変量（1次元表現）と8次元表現に分解される．これを記号で，

$$3\times 3^* = 1+8 \tag{11.71}$$

と書く．この8個のうち p_1, p_2, p_3 は p と n だけの変換 $SU(2)$ では $I=1$ すなわち π 中間子と同じように変換され，p_4-ip_5，p_6-ip_7 は Λp，Λn と同様で $I=1/2$，strangeness（あるいは hypercharge Y）が $+1$ の K とみなすことができ，p_8 は $I=0$ で η とすることができる（11－13 表 および 11－27 図）．まとめて，

$$P=\begin{pmatrix} \dfrac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\dfrac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\dfrac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\dfrac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\eta \end{pmatrix}. \tag{11.72}$$

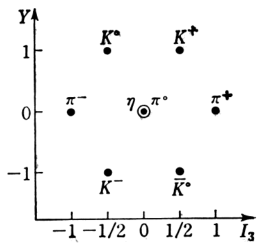
こうして8個の擬スカラー中間子（11.53）は $SU(3)$ の8次元表現に属する8重項にまとめられ，$SU(3)$ の変換により，

$$P' = UPU^\dagger \tag{11.73}$$

と変換される．

11－13 表　8重項の構造

I	Y	粒　子
1	0	π, Σ, ρ
1/2	1	K, N, K^*
1/2	-1	$\bar{K}$, Ξ, $\bar{K}^*$
0	0	η, Λ, φ



11－27 図　擬スカラー中間子の8重項

［8 重項模型］

坂田模型ではこうして擬スカラー粒子の8重項が得られるが，baryon のうち p, n, Λ だけが基本粒子として特別な扱いをうけ，Σ, Ξ は ξ^α, ξ_α, ξ_α から作られているとしなければならない．(11.54) の8個の baryon がほぼ同じ性質であることから，これは不満足である．もう一つの考え方として8個の baryon も擬スカラー粒子と同様に $SU(3)$ の8次元表現に属するとする．荷電スピン，hypercharge の関係も 11－13 表に見られるように，うまくいっている．(11.72) と同様に

$$B=\begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}}+\frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}}+\frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ -\Xi^- & \Xi^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda \end{pmatrix},$$

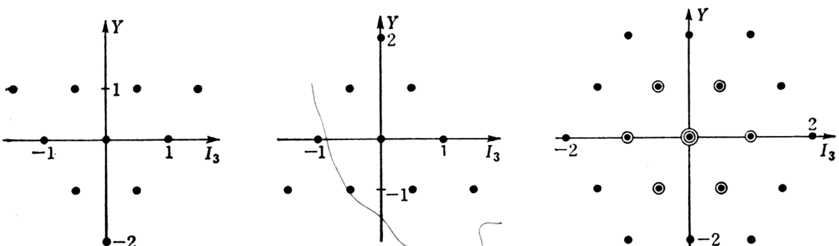
$$\bar{B}=\begin{pmatrix} \frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}}+\frac{\bar{\Lambda}}{\sqrt{6}} & \bar{\Sigma}^- & -\bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}}+\frac{\bar{\Lambda}}{\sqrt{6}} & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & \bar{n} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\Lambda} \end{pmatrix} \tag{11.74}$$

とすれば，これらは (11.73) のように変換される．8 個の baryon を同等に扱うこの立場を **8 重項模型**(octet model) という．この場合，基本的な 3 個の粒子を考える必要はないが，強いていうならば $SU(3)$ の変換をする基本的な 3 個の Fermi 粒子 t と 3 個の Bose 粒子 b があり（これらは現在みつかっている粒子には対応しない)，baryon は $b^\dagger t$ から，擬スカラー中間子は $\bar{t}t$, $b^\dagger b$ からできていると考えればよい．中間子の共鳴状態である ρ, K^* 等も 11-13 表にみられるように $J=1$, パリティ負の 8 重項を作ると考えられる．$I=0$ の成分として ω でなく φ をとった理由はあとで述べる．

§ 10.4 で π 中間子と核子の散乱状態に共鳴が存在することをみた．π と核子の系は $I=1/2$ と $I=3/2$ の状態に分解されるが，このうち後者に共鳴状態が現われる．このことを $SU(3)$ の 8 重項模型で考えてみよう．baryon (8 重項) と，擬スカラー中間子 (8 重項) の系は (11.71) と同じ意味でいくつかの表現に分解されるが，それは，

$$8\times8=1+8+8+10+10^*+27 \tag{11.75}$$

であることがわかっている．10, 10*, 27 次元表現の構造を 11-14 表および 11-28 図に示す．このように 10 次元には $I=3/2$, $Y=1$ の成分があり，3/2—3/2 共鳴に対応



(a) 10次元表現　(b) 10*次元表現　(c) 27次元表現

11-28 図　10, 10*, 27 重項の構造

させることができる．そうすると，この他に $I=0$, $Y=-2$ 等の共鳴が存在するはずであるが，11-14 表の最後の列に書いてあるように，ちょうどそのような粒子がみつかっている．これらは，$J=3/2$, パリティ $+$ の 10 重項を作ると考えられる．27 次元にも $I=3/2$, $Y=1$ の成分はあるが，粒子の数が多すぎて適当でない（あとに述べる質量公式からも 10 次元がよいことがわかる）．

11-14 表 10 重項の構造

I	Y	粒子
3/2	1	N^*
1	0	Y_1^*
1/2	-1	Ξ^*
0	-2	Ω^-

次に $SU(3)$ で不変な湯川型相互作用を考えよう．これは B, $\overline{B}$, P の積で変換により不変なものを作ることである．Baryon B と擬スカラー中間子 P の積は (11.75) のように分解されるが，このときでてくる 2 個の 8 次元表現と 8 次元の $\overline{B}$ との積が不変量になり得るので，2 個の形が存在する．具体的に，

$$T_r(\overline{B}BP),\quad T_r(\overline{B}PB)$$

が不変量であることがわかる．普通この和と差をとり，

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\,T_r(\overline{B}BP+\overline{B}PB)\quad D\text{-型},\\&\sqrt{2}\,T_r(\overline{B}BP-\overline{B}PB)\quad F\text{-型}.\end{aligned}\tag{11.76}$$

それぞれを **D-型，F-型の結合**という．荷電多重項に分けて書くと（結合定数および Dirac 行列 γ_5 を省略して），

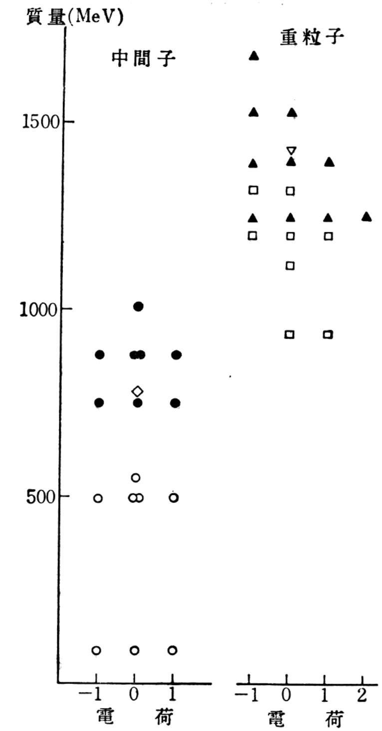
$$\begin{aligned}H_D=&\overline{N}\tau N\pi+\frac{2}{\sqrt{3}}(\overline{\Sigma}\Lambda+\overline{\Lambda}\Sigma)\pi-\overline{\Xi}\tau\Xi\pi\\&-\frac{1}{\sqrt{3}}(\overline{N}K+\overline{\Xi}K_G)\Lambda-\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{\Lambda}(\overline{K}N+\overline{K}_G\Xi)+(\overline{N}\tau K-\overline{\Xi}\tau K_G)\Sigma+\overline{\Sigma}(\overline{K}\tau N-\overline{K}_G\tau\Xi)\\&-\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{N}N\eta-\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{\Lambda}\Lambda\eta+\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{\Sigma}\Sigma\eta-\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{\Xi}\Xi\eta,\end{aligned}\tag{11.77}$$

$$\begin{aligned}H_F=&\overline{N}\tau N\pi+2\overline{\Sigma}\times\Sigma\pi+\overline{\Xi}\tau\Xi\pi\\&-\sqrt{3}(\overline{N}K-\overline{\Xi}K_G)\Lambda-\sqrt{3}\overline{\Lambda}(\overline{K}N-\overline{K}_G\Xi)-(\overline{N}\tau K+\overline{\Xi}\tau K_G)\Sigma\\&-\overline{\Sigma}(\overline{K}\tau N+\overline{K}_G\tau\Xi)+\sqrt{3}\,\overline{N}N\eta-\sqrt{3}\,\overline{\Xi}\Xi\eta.\end{aligned}\tag{11.78}$$

(11.76) のとり方は $B\to B^T$, $\overline{B}\to\overline{B}^T$, $P\to P^T$, すなわち，

$$p\leftrightarrow-\Xi^-,\ n\leftrightarrow\Xi^0,\ \Sigma^+\leftrightarrow\Sigma^-,\ K^+\leftrightarrow K^-,\ K^0\leftrightarrow\overline{K}^0,\ \pi^+\leftrightarrow\pi^-\quad(R)$$

のおきかえに対し D 型は不変，F 型は符号を変えるようにしてある．一般の結合はこの二つの混合 $\alpha H_D+\beta H_F$ であり，2 個の結合定数でバリオンと擬スカラー中間子の湯川型結合が書き表わされる．これがどの程度正しいか今のところ確かめられていない．



11 − 29 図　素粒子の質量スペクトル
○　擬スカラー中間子8重項
●　ベクトル中間子8重項
◇　ベクトル中間子単一項（ω）
□　baryon 8重項
▲　$J=3/2^+$ の10重項
▽　単一項（Y_0^*）

このように荷電不変性を拡張して $SU(3)$ に対する不変性を仮定し，いろいろの議論をすることができる．これを**ユニタリー対称性**（unitary symmetry）という．これにより，粒子を多重項に分類できるが，次に述べる質量公式により，この分類の正しいことが証明される．11 − 29 図にはっきり多重項に分類される粒子の質量を図示してある．

［対称性の破れ］

ユニタリー対称性は近似的にしか成り立たないことははじめからわかっている．この対称性のこわれ方について考える．§ 11.3 では電磁的相互作用のため荷電不変性は厳密には成り立たず，不変性をこわす力は $I=1$, $I_3=0$ の成分のように振る舞うことをみた．これの類推から，$SU(3)$ の対称性をこわす力が存在し，それは8次元表現の $I=0$ 成分（たとえば P のうち η）と同じ変換性を持つとしてみよう．この力により超多重項内に質量の差が生ずるが，この力について，2次以上の項は無視するとすれば簡単な関係式が得られる．計算の結果，ある多重項に属する粒子（荷電スピン I, hypercharge Y）の質量は，

$$m=a+bY+c\left[I(I+1)-\frac{Y^2}{4}\right]\quad\text{(Fermi 粒子)}\qquad(11.79)$$

と書けることがわかった．Bose 粒子に対しては質量の2乗に対して (11.79) の式が成り立つ．これを **Gell-Mann-大久保の質量公式** という．8重項の baryon に対しては，a, b, c を消去して，

$$\frac{1}{2}(M_N+M_\Xi)=\frac{1}{4}(3M_\Lambda+M_\Sigma)\qquad(11.80)$$

が得られる．値を入れると左辺は 1127 MeV，右辺は 1134 MeV でかなりよく合ってい

る．擬スカラー粒子では，

$$m_{K}^{2} = \frac{1}{4}(3m_{\eta}^{2} + m_{\pi}^{2}) \tag{11.81}$$

で，やはりよく合っている．$J=1^-$ の8重項では，

$$m_{K^*}^{2} = \frac{1}{4}(3m_{\varphi}^{2} + m_{\rho}^{2}) \tag{11.82}$$

は，あまりよく合わない．φ のかわり ω をとれば事情はさらに悪くなる．おそらく8重項の $I=0$ 成分は純粋な φ 粒子でなく，φ と ω の混合した状態と考えられる．

Baryon の共鳴状態の10重項では $I=1+(Y/2)$ の関係がある．したがって (11.79) の式は $m=a'+b'Y$ となり，4個の荷電多重項の質量は等間隔に分布していることになるが，実側値はこの関係とよく合っている．これらのことは“少しこわれたユニタリー対称性”という考え方の成功を意味する．

〔問題 11.6〕 (11.70) の変換はユニタリー変換であることを証明せよ．

〔問題 11.7〕 核子と π 中間子の散乱振幅は (10.79) のように2個の振幅 $T_{3/2}$，$T_{1/2}$ で表わされる．$SU(3)$ 不変の近似で baryon と擬スカラー中間子の散乱は何個の振幅で書き表わされるか．

〔問題 11.8〕 8重項の baryon に対する質量公式 (11.80) を導け．

〔ヒント〕 $\overline{B}$ と B の積で η と同じように変換されるものを作れ．

第12章 弱い相互作用

§ 12.1 素粒子の自然崩壊と弱い相互作用

多くの素粒子は不安定である時間がくると，より軽い2個以上の素粒子に転化する．時刻 $t=0$ で素粒子 A が存在したとき，A の自然崩壊 $A\to B+C+\cdots$ のためにその後の時刻 $t(>0)$ では系が A に見出される確率 $P_A(t)$ は t と共に減少する．((4.12)参照)

$$P_A(t)=\exp(-wt). \tag{12.1}$$

$1/w$ 秒後には，この確率は初めの $1/e$ になり，この時間，

$$\tau=1/w \tag{12.2}$$

を素粒子 A の**寿命** (mean life) といっている．また $P_A(t)$ が元の値の 1/2 になる時間，

$$\tau_{1/2}=\frac{\log 2}{w}=\log 2\cdot\tau \tag{12.3}$$

を**半値寿命** (half life) という．τ, $\tau_{1/2}$ は § 4.1 で議論したように，どの Lorentz 座標系で測定するかにより，その値が異なるが，通常は素粒子Aの静止系で測る．このようにして測られた素粒子の寿命 τ は 1-2 表に記してある．

素粒子の寿命は中性子のように $\sim 10^3$ sec のものから Λ, Σ, K^0 のように $\sim 10^{-10}$ sec のもの (π^0, Σ^0 は，さらに短い寿命を持つ) まで寿命の値はひろい範囲にわたっている．しかし共通して言えることは素粒子世界での時間の単位 $\sim 10^{-23}$ sec にくらべてはるかに長く (1-1 表)，素粒子間の衝突が起こっている短い時間の間には関与する素粒子の崩壊する可能性はほとんどないといってよい．言い換えれば，素粒子の崩壊を起こす力は素粒子間の衝突を起こす強い相互作用にくらべて，はるかに弱く，長時間その力が働いて始めてその効果が現われることになる．

素粒子 A の崩壊 $A\to B+C+\cdots$ が起こるときには，エネルギー・運動量の保存別がみたされていなければならない． A の静止系でエネルギーの保存則を考えると崩壊の起こるためには，

$$M_A>M_B+M_C+\cdots. \tag{12.4}$$

この崩壊で質量の一部は素粒子 $B, C, \cdots$ の運動エネルギーに転化し，このエネルギーが崩壊の Q 値である (9.1).

素粒子Aの崩壊には荷電の保存則・重粒子数の保存・角運動量の保存等々の保存則があ

り，これら保存則がみたされ，かつ $Q>0$ のときに崩壊が起こる．一般に一つの素粒子 A に対しこれら条件をみたす多くの崩壊の仕方があるので，崩壊後の状態は多くの異なる状態がある．たとえば Λ 粒子は 12－1 表のようないろいろの崩壊の仕方をする．同時におのおのの崩壊に対する Q 値，および全体の崩壊に対する割合（分岐比）を記してある．

12－1 表　Λ 粒子の崩壊

	Q(MeV)	分岐比 (%)
$\Lambda \to p\pi^-$	37.5	67.7 ± 1.0
$n\pi^0$	40.9	31.6 ± 2.6
$p\mu^-\bar{\nu}$	71.5	～0.01
$pe^-\bar{\nu}$	176.6	～0.09

素粒子 A がいろいろな崩壊の仕方 $1, 2, \cdots, n$ で崩壊するとき，i 番目の崩壊の仕方による $P_A(t)$ の単位時間あたりの減少は $P_A(t)$ に比例し，$w_iP_A(t)$ と書ける．w_i は定数．したがって，

$$-\frac{dP_A(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n} w_iP_A(t). \tag{12.5}$$

これより (12.1) が得られ，その場合の w は，

$$w=\sum_{i=1}^{n} w_i \tag{12.6}$$

である．寿命 τ (12.2) に対しては，

$$\frac{1}{\tau}=\sum\frac{1}{\tau_i}, \quad \tau_i=\frac{1}{w_i} \tag{12.7}$$

で，τ_i を i 番目の崩壊による**部分寿命** (partial life time) という．また λ_i は i 番目の崩壊の確率であるから，**分岐比** R_i は，

$$R_i=w_i/\sum_{j=1}^{n} w_j \tag{12.8}$$

である．

$A\to B+C+\cdots$ 崩壊が $ABC\cdots$ 間の相互作用の Hamiltonian H によって起こるとすると，この崩壊の単位時間あたりの確率 w は (2.68) より，

$$w=\frac{2\pi}{\hbar}|T|^2\rho(E) \tag{12.9}$$

で与えられる．ρ は崩壊後の状態 $B+C+\cdots$ の単位エネルギーあたりの状態密度，T は H による $A\to B+C+\cdots$ 崩壊の遷移行列である．

もし崩壊の相互作用が粒子 $A, B, C, \cdots$ の量子化された場で表わされるとすると，$A\to B+C+\cdots$ 遷移が H で起こるためには H は $A, B, C, \cdots$ の場の積を含まねばならない (9.94)．Bose 粒子が m 個，Fermi 粒子が $2l$ 個 $A, B, C, \cdots$ 中に存在するとき，Bose 粒子の場を $\varphi(x)$，Fermi 粒子の場を $\psi(x)$，$\bar{\psi}(x)$ と書くと，

$$H=\int H(x)dr,\quad H(x)=g\{\phi(x)\}^m\{\bar{\psi}(x)\psi(x)\}^l \tag{12.10}$$

と書ける.（m および l は0または正整数であり，崩壊後の粒子数を $n(\geq 2)$ とすると，$n+1=2l+m$）である．$\{\phi(x)\}^m$ は $A, B, C, \cdots$ 中の m 個の Bose 粒子の場の積で，これら Bose 粒子の種類を $1, 2, \cdots, m$ とすると $\phi_1(x)\phi_2(x)\cdots\phi_m(x)$ の意味である．Fermi 粒子に対する $\{\bar{\psi}(x)\psi(x)\}^l$ も同様であり，ψ と $\bar{\psi}$ が l 個ずつ入っているのは Fermi 粒子数の保存則のためである．$H(x)$ は Lorentz 変換，空間回転に対して不変で，これら $m+2l$ 個の場の量の積はこの条件をみたすように適当に組み合せなければならない．((9.113)～(9.115), (9.109) 参照)．(12.10) の H により遷移確率 w を求めると (9.134) が得られる．

(12.10) の相互作用の強さを表わす結合定数 g の次元は m, l の値で異なり，§ 11.4 と同様に，

$$[g]=[\hbar c]^{1-\frac{m}{2}}[L]^{m+3l-4} \tag{12.11}$$

となる．g を次元のない量にするにはある粒子の Compton 波長 $\hbar/Mc$ を用いて $\bar{g}$ を定義する．

$$\bar{g}=g(Mc/\hbar)^{m+3l-4},\quad [\bar{g}]=(\hbar c)^{1-\frac{m}{2}}. \tag{12.12}$$

$\bar{g}^2/(\hbar c)^{2-m}$ は次元のない量になる．また $\hbar=c=1$ の自然単位系では $\bar{g}$ は次元のない量である．たとえば $\Lambda\to p+\pi^-$ 崩壊の H が (9.109) で与えられるとすると，$m=1$, $l=1$ であり，g_Λ は $[\hbar c]^{1/2}$ の次元を持つ (12.11)．したがって $g_\Lambda{}^2/4\pi\hbar c$ は次元のない量で (9.110) で与えられる．また (9.111) の $\pi\to\mu+\nu$ 崩壊の H についても同様である．(9.113) の核子の β 崩壊の H については $m=0, l=2$ で g_{F_1} は $[\hbar c][L]^2$ の次元を持つ．これは［質量］·［長さ］^{5}·［時間］$^{-2}$ の次元で (9.116) で与えられる．(9.114), (9.115) についても同様である．

［素粒子の2体崩壊］

素粒子はいろいろの崩壊の仕方を持つが，特に崩壊後2粒子 ($n=2$) になる場合を考えよう．$A\to B+C$ 崩壊の H を (9.94) のように，

$$H(x)=gA(x)B(x)C(x) \tag{12.13}$$

と書くと，A, B, C が Bose 粒子か Fermi 粒子かに応じて次の二つの場合が考えられる

a）$l=0,\ m=3$　$[g^2]=[\hbar c]^{-1}[\hbar/Mc]^{-2}$　（例　$K^+\to\pi^++\pi^0$),

b）$l=1,\ m=1$　$[g^2]=[\hbar c]$　（例　$\pi^+\to\mu^++\nu,\ \Lambda\to p+\pi^-$).

それぞれの場合につき (9.140) と同様に崩壊確率 w を計算すると，12-2 表の値が得

られる．表には崩壊の Q 値，各粒子の寿命 τ と分岐比とから計算された w（w_i と書くべきだが，いまはその素粒子の特定の崩壊を問題にしているので指標 i をはぶく），これより計算された $g^2/4\pi$ の値がしるされている．ただし単位は $\hbar=c=1$，また $l=0$，$m=3$ の場合には g^2 は次元を持つので，陽子の質量 M_p を用いて $g^2(\hbar/M_pc)^2$ を g^2 とした．

Q, w は崩壊によりいろいろ異なるが $g^2/4\pi$ の値は大体一定で 10^{-14} 程度の値を持つ．一方で強い相互作用 $N \rightleftarrows N+\pi$, $N \rightleftarrows \Lambda+K$ 等の相互作用の強さ $g^2/4\pi$ は1の程度，電磁的相互作用の場合は $e^2/4\pi \sim 10^{-2}$ であり，崩壊の相互作用はこれらにくらべて極めて弱い相互作用ということができる．

12－2 表　素粒子の2体崩壊

	Q(MeV)	w(sec^{-1})	$g^2/4\pi$
$\Lambda \to p+\pi^-$	38	2.6×10^9	0.8×10^{-14}
$\Sigma^- \to n+\pi^-$	117	6.3×10^9	1.4×10^{-14}
$\Xi^- \to \Lambda+\pi^-$	66	5.7×10^9	1.1×10^{-14}
$\pi^+ \to \mu^+ +\nu$	34	3.9×10^7	0.26×10^{-14}
$K^+ \to \mu^+ +\nu$	388	5.1×10^7	0.026×10^{-14}
$K^0 \to \pi^+ +\pi^-$	219	7.5×10^9	4.8×10^{-14}
$K^+ \to \pi^+ +\pi^0$	219	1.7×10^7	0.011×10^{-14}

［素粒子の3体崩壊］

素粒子の3体崩壊 $n\to p+e^-+\bar{\nu}$, $\mu^-\to\nu+e^-+\bar{\nu}$ 等を調べよう．(9.113)～(9.115) のように相互作用の H を書くと，その結合定数の次元は次のようになる．

a）$l=2,\ m=0$　$[g]=[\hbar c][\hbar/Mc]^2$　（例 $n\to p+e^-+\bar{\nu}$），

b）$l=1,\ m=2$　$[g]=[\hbar/Mc]$　（例 $\pi^+\to\pi^0+e^++\nu$）

c）$l=0,\ m=4$　$[g]=[\hbar c]^{-1}$　（例 $K^+\to\pi^++\pi^++\pi^-$）．

12－2 表と同様に $g^2/4\pi$ を計算すると 12－3 表になる．（単位は $\hbar=c=M_p=1$）．表から明らかなように，2体崩壊のときと同様に $g^2/4\pi$ は極めて小さく 10^{-14} 程度の値を持つ．

12－3 表　素粒子の3体崩壊

	Q(MeV)	w(sec^{-1})	$g^2/4\pi$
$\mu^- \to e^- +\nu+\bar{\nu}$	105	4.5×10^5	0.76×10^{-14}
$\pi^+ \to \pi^0+e^++\nu$	4.1	6×10^{-1}	4.8×10^{-14}
$K^+ \to \pi^++\pi^++\pi^-$	75	4.5×10^6	1.4×10^{-13}
$n \to p+e^-+\bar{\nu}$	0.78	0.95×10^{-3}	4.3×10^{-11}
$\Lambda \to p+e^-+\bar{\nu}$	177	4×10^6	4.1×10^{-12}

（(9.116) の g_F を $\hbar=c=M_p=1$ の単位で書き直すと，

$$g \approx (10^{-49}\,\text{gram cm}^5\,\text{sec}^{-2})\,(\hbar c)^{-1}(\hbar/M_pc)^{-2} \approx 0.77\times10^{-5}$$
）

〔弱い相互作用と衝突過程〕

崩壊を起こす弱い相互作用は単に粒子の崩壊に関与するだけでなく，粒子間の衝突過程をひき起こす．一例として $A \to B+C+D$ なる崩壊を考え，A, B, C, D はすべてスピン0の粒子としよう．これに対応する弱い相互作用は (12.10) より A, B, C, D の場を $\phi_A, \phi_B, \phi_C, \phi_D$ としたとき $\phi_A\phi_B{}^\dagger\phi_C{}^\dagger\phi_D{}^\dagger$ の積を含む．ϕ_A, $\phi_B{}^\dagger$ 等は (6.86), (6.87) のように表わされ，ϕ_A は粒子 A の吸収または反粒子 $\overline{A}$ の放出，$\phi_B{}^\dagger$ は粒子 B の放出または反粒子 $\overline{B}$ の吸収を行なう演算子である．したがって $A \to B+C+D$ を起こす弱い相互作用は同時に $A+\overline{B} \rightleftarrows C+D, A+\overline{C} \rightleftarrows B+D$, $A+\overline{D} \rightleftarrows B+C$ 等の散乱をひき起こす．このことは粒子のスピンの値によらずに成立する．

実験的にも中性子の β 崩壊 $n \to p+e^-+\overline{\nu}$ に対応する $\overline{\nu}+p \to n+e^+$ 反応の存在が確かめられており，この反応は β 崩壊と同じ力で起こるので，その断面積は中性子の β 崩壊の寿命から計算できる．断面積は極めて小さく弱い相互作用により起こることを示している．(実際には $\overline{\nu}+p \to n+e^+$ は $\overline{\nu}$ と原子核中での p との衝突として確かめられている)．また μ^- 中間子は物質中を通過するとイオン化によりエネルギーを失ない，遂には静止して物質中の一つの原子核のまわりの軌道に捕獲される．捕獲された後に $\mu^- \to e^-+\overline{\nu}+\nu$ 崩壊する場合もあるが，時には核中の陽子で吸収され $\mu^-+p \to \nu+n$ の反応により ν に転化することが知られている． この吸収の速さは核により異なるが大体 μ の崩壊の時間と同程度の時間で起こり弱い相互作用によりひき起こされることを示している． また $\pi^+ \to \mu^++\nu$ 崩壊で作られた ν による反応 $\nu+n \to p+\mu^-$ の存在も確かめられ，その断面積も弱い相互作用から予期される小さな値を持っている．

〔相互作用の種類〕

素粒子間の相互作用は大別すると強い相互作用・弱い相互作用・および電磁的相互作用に分類できる (242 ページ参照)．この他にわれわれはすべての物質の間に重力が働くことを知っている．重力と Coulomb 力とをくらべると，質量 M, M' 荷電 e, e' 間に働く重力，Coulomb 力のポテンシャルはそれぞれ，

$$\frac{G\cdot MM'}{r},\quad \frac{ee'}{4\pi r} \tag{12.14}$$

で (r は2粒子間の距離)，重力の強さは次元のない定数 $GMM'/\hbar c$ の大きさで表わすことができる．G は重力定数で，

$$G = 6.67\times 10^{-8}\,\mathrm{cm^3\,g^{-1}\,sec^{-2}}. \tag{12.15}$$

M, M' としての陽子の質量 M_p をとると，

$$GM_p{}^2/\hbar c \approx 6\times 10^{-39} \tag{12.16}$$

となり，重力は陽子間の Coulomb 力 ($e^2/4\pi\hbar c \approx 1/137$) にくらべてはるかに小さい．したがって素粒子間の力や衝突の問題では重力の影響は直接現われないと考えてよい．12－4 表はいろいろな型の力の強さを示している．

12－4 表　種々な力の強さ

強い相互作用	$g^2/4\pi\hbar c$	~ 1
電磁的相互作用	$e^2/4\pi\hbar c$	$\sim 10^{-2}$
弱い相互作用	$\bar{g}^2/4\pi(\hbar c)^{2-m}$	$\sim 10^{-14}$
重　　力	$GM_p{}^2/\hbar c$	$\sim 10^{-38}$

§ 12.2　軽粒子と弱い相互作用

ニュートリノ・電子・μ 中間子は総称して**軽粒子** (**lepton**) とよばれる．これらは素粒子の中で最も質量の小さい Fermi 粒子群であるが，そのいちじるしい特徴は相互間にまた他の素粒子との間に強い相互作用が存在しないことである．したがって相互間に π 中間子・K 中間子等を媒介として強い相互作用が働いている**重粒子** (baryon) とは明らかに異種の Fermi 粒子と考えられる．また重粒子数の保存則より重粒子から軽粒子への転化は禁止されており，重粒子は重粒子間だけで，また軽粒子は軽粒子間だけで転換が起こるようにみえる．

軽粒子に働く最も強い力は電磁気的な力で，第 8 章で調べたように軽粒子と光子の間には minimal な相互作用が働く．しかし電荷のないニュートリノに対しては電磁気的な力は存在しないと考えられる．minimal な相互作用は，

$$
\begin{aligned}
&e^\pm \rightleftarrows e^\pm + \gamma, \qquad \mu^\pm \rightleftarrows \mu^\pm + \gamma, \\
&\gamma \rightleftarrows e^+ + e^-, \qquad \gamma \leftrightarrows \mu^+ + \mu^-
\end{aligned}
\tag{I}
$$

で表わされる遷移を起こし，電子・μ 中間子の Coulomb 散乱・対発生等をひき起こすが $\mu - e$ 間の遷移等粒子の種類を変えることはない．

この電磁的相互作用を除いては，弱い相互作用のみが軽粒子に働くと考えられ，また特にニュートリノに対してはもっぱら弱い相互作用のみが作用する．軽粒子の関与する崩壊現象として知られているのは次のようなものである．

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \mu^\pm \to e^\pm + \nu + \nu, \\
&\text{(b)}\quad \pi^\pm \to \mu^\pm + \nu, \qquad n \to p + e^- + \nu, \\
&\qquad\ \ \pi^\pm \to e^\pm + \nu, \qquad \Sigma^\pm \to \Lambda^0 + e^\pm + \nu, \\
&\text{(c)}\quad \Lambda^0 \to p + \mu^- + \nu, \qquad \Lambda^0 \to p + e^- + \nu, \\
&\qquad\ \ \Sigma^- \to n + \mu^- + \nu, \qquad \Sigma^- \to n + e^- + \nu, \\
&\qquad\ \ K^\pm \to \mu^\pm + \nu, \qquad K^\pm \to \pi^0 + \mu^\pm + \nu, \qquad K^\pm \to \pi^0 + e^\pm + \nu.
\end{aligned}
\tag{II}
$$

（a）は軽粒子のみが関与する遷移，（b），（c）では軽粒子の他に強い相互作用をする粒子も関与している．（b）では strangeness S が保存し，（c）では S が ± 1 だけ変化している．

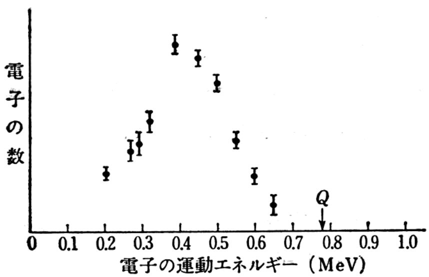
以上は素粒子の自然崩壊であるが，原子核では § 11.1 で述べたように陽子が不安定になることもあり，この場合は陽電子を放出する β^+ 崩壊がみられる．

$$(\mathrm{b}')\quad \text{“}p\text{”} \rightarrow \text{“}n\text{”} + e^+ + \nu.$$

“p”，“n” は核内の陽子・中性子である．

［ν の存在］

これら軽粒子の関与する崩壊でいちじるしいのは常にニュートリノ（ν）が現われることである．((a)～(c) ではニュートリノと反ニュートリノ（$\bar{\nu}$）は区別して書いていない)．$\nu(\bar{\nu})$ は他の粒子との間に強い相互作用も電磁的相互作用もないので，実験的にその存在を確かめるのは極めて困難であった．ν の存在が推測されたのは，いろいろな原子核の β 崩壊で出てくる電子（陽電子）のエネルギーの測定からである．



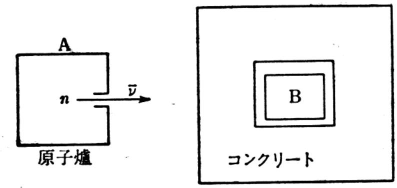
12－1 図　$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ 崩壊の電子のエネルギー分布

12－1 図は中性子の β 崩壊で出てくる電子のエネルギー分布である（$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$）．電子のエネルギーを測定すると 0～0.78 MeV の間に分布しており，そのエネルギーは一定ではない．反跳陽子の運動量はその静止質量にくらべて非常に小さいので，陽子の運動エネルギーは無視できるから，崩壊後の荷電粒子の全運動エネルギーは電子の運動エネルギーと考えてよい．β 崩壊の Q 値 ≈ 0.78 MeV であるから，もし中性子の崩壊が $n \rightarrow p + e^-$ であり，他に中性粒子が放出されてなければ，電子の運動エネルギーはエネルギー保存則から常に $Q(=0.78\,\mathrm{MeV})$ に等しくなければならない．したがって実験事実はエネルギー保存則をすてるか，観測にかからない中性粒子の存在のいずれかを要求している．エネルギー保存則は § 4.2 で論じたように時間の一様性（時間の座標原点の移動に対する物理法則の不変性）に起因しており，非常に基本的な物理法則と考えられる． Pauli はいろいろな原子核の β 崩壊で電子のエネルギーが連続的な値をとることより，一個の中性粒子が同時に放出されていると考え**ニュートリノ**と名づけた．

ν の存在を実証するには ν により起こる反応の存在を示せばよい．Reines と Cowan は次のような実験を行なった．すなわち，12－2 図のように原子炉中の多数の中性子の崩壊の際に作られると考えられる $\bar{\nu}$ を陽子にあてて，

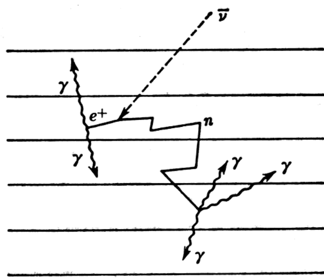
$$\bar{\nu}+p\to e^{+}+n$$

の反応の存在を確かめた．



12－2 図　$\bar{\nu}+p\to e^{+}+n$ 実験

中性子等の粒子がBに入ってくるとまぎらわしい反応を大きな頻度で起こすから，Bは充分に外側を厚いコンクリート，鉛等で遮蔽しなければならない．$\bar{\nu}$ は遮蔽に使った物質中をほとんど素通りすると考えられる．B は Cd を含み，作られた n が Cd に吸収されたときに出る何個かの γ 線と e^{+} が B を作る物質中の電子 e^{-} と対消滅したときに作られる γ 線とを同時に計数管で測定した（12－3 図）．対消滅による γ 線のエネルギーは ~ 0.51 MeV であること，n は低速で何度か B 中で散乱された後に Cd に吸収され，したがって，対消滅による γ 線の放出と Cd 吸収による γ 線の放出に短かい時間のずれの存在すること等を確かめることにより $\nu+p\to e^{+}+n$ の存在を裏づけた．



12－3 図　ν の検出

S：シンチレーション計数管で γ 線を検出する．

Cd：$\bar{\nu}+p\to e^{+}+n$，および n の吸収を行なう Cd を含むターゲット．

〔ν の質量〕

ν の質量はいろいろな核の β 崩壊で放出される電子（または陽電子）のエネルギーの最大値を実験的に求めることにより得られる．もし，ν に質量 m_{ν} があれば，電子の運動エネルギーの最大値（崩壊の Q 値に等しい）は $m_{\nu}=0$ の時にくらべて $m_{\nu}c^{2}$ だけ小さくなる．実験結果は $m_{\nu}=0$ と考えてよく，現在の所，

$$m_{\nu}c^{2}<200\ \mathrm{eV} \tag{12.17}$$

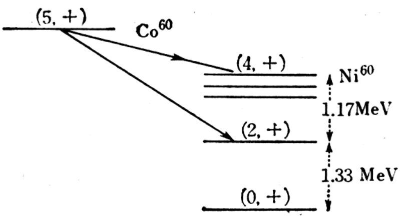
である．ν の質量を 0 と考えてむじゅんする事実は知られていないので，$m_{\nu}=0$ と仮定しよう．

〔パリティ非保存〕

空間反転（$\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r},\ t\to t$）に対し強い相互作用・電磁的相互作用が不変でパリティ保存則が成立していることが実験的に確かめられている．minimalな電磁的相互作用や(10.60) § 11.4 (IV) 等の強い相互作用は空間反転に対して不変のようにとった．弱い相互作用が

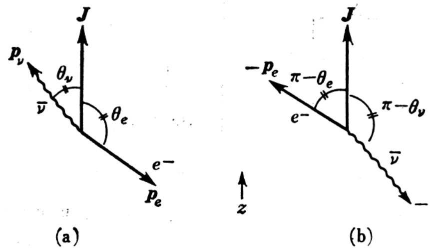
空間反転でどのように変るかを調べるために一例として次のβ崩壊をとろう．

$$\mathrm{Co}^{60} \to \mathrm{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}.$$



12－4 図　$\mathrm{Co}^{60} \to \mathrm{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}$ 崩壊
$(5, +) \to (4, +) R$（分岐比）≈ 1
$\searrow (2, +) R \approx 10^{-4}$

τ（寿命）≈ 5.3 年



12－5 図　$\mathrm{Co}^{60} \to \mathrm{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}$ 崩壊とパリティ．

12－4 図は Co^{60}, Ni^{60} のエネルギー準位を示したものである．Co^{60} の基底状態のスピンは $J=5$ で主として Ni^{60} の $J=4$ の励起状態に β 崩壊する．Co^{60} を適当な方法で偏極させ，そのスピンの偏りの方向を z 軸とし，崩壊後の e^-, $\bar{\nu}$ の運動量 $\boldsymbol{p}_e$, $\boldsymbol{p}_\nu$ と z 軸の角度を θ_e, θ_ν とする．12－5 a 図のような崩壊に空間反転を行なうと，

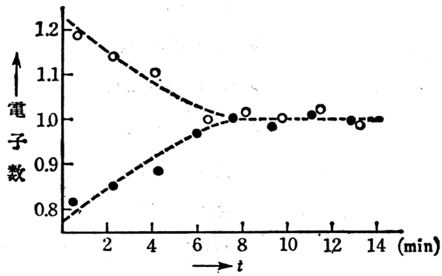
$$\boldsymbol{J} \to \boldsymbol{J},\ \boldsymbol{p}_e \to -\boldsymbol{p}_e,\ \boldsymbol{p}_\nu \to -\boldsymbol{p}_\nu \tag{12.18}$$

より，12－5 b 図のような崩壊になる．Co^{60} のスピン方向は変らない．もし弱い相互作用が空間反転に対し不変ならば，a，b 図のような崩壊の頻度は等しい．$\bar{\nu}$ は測定するのが難しいので，あらゆる方向 $\theta_\nu = 0 \sim \pi$ に $\bar{\nu}$ が放出される全確率のみが測定される．θ_e, θ_ν 方向に e^-, $\bar{\nu}$ の放出される確率を $w(\theta_e, \theta_\nu)$ とすると，実験的には，

$$w(\theta_e) = \int_0^\pi w(\theta_e, \theta_\nu) d(\cos\theta_\nu)$$

が測定される．$d(\cos\theta_\nu)$ は ν が θ_ν 方向にでるときの立体角 $d\Omega(=2\pi d(\cos\theta_\nu))$ に比例する．$w(\theta_e)$ は e^- が θ_e 方向にでる確率．もし空間反転に対する不変性が成り立てば $w(\theta_e, \theta_\nu) = w(\pi-\theta_e, \pi-\theta_\nu)$ より，

$$\begin{aligned} w(\pi-\theta_e) &= \int w(\pi-\theta_e, \theta_\nu) d(\cos\theta_\nu) \\ &= \int w(\pi-\theta_e, \pi-\theta_\nu) d(\cos(\pi-\theta_\nu)) \qquad (12.19) \\ &= \int w(\theta_e, \theta_\nu) d(\cos\theta_\nu) = w(\theta_e). \end{aligned}$$



12-6 図 $Co^{60} \to Ni^{60} + e^- + \bar{\nu}$ 崩壊におけるパリティ非保存.
○ $\theta=\pi$ 方向の電子数
● $\theta=0$ 方向の電子数
(偏りのない Co^{60} から放出される電子数は方向性がない. この数を1ととった)

Wu 達は (1957 年) 偏りを持った Co^{60} から放出される電子の数を Co^{60} の偏りの方向 ($\theta=0$) および反対方向 ($\theta=\pi$) で比較した (12-6 図). Co^{60} は低温に保たれているが, 温度が上昇すると共に Co^{60} の偏りの大きさは減少するので, カウントの割合いは時間と共に変化しある時間たつと偏りはなくなり, 電子放出の方向性は消失する. このようすも図に示してある. Co^{60} が偏りを持つときに $\theta=0$ と $\theta=\pi$ 方向で電子放出の割合に差のあるのが認められる. これは $w(0) \neq w(\pi)$ で (12.19) に反し β 崩壊でパリティ非保存のことを示しており, 電子は Co^{60} のスピンと反対向きに多く放出される.

このような空間反転に対する不変性の破れ (パリティ非保存) はすべての弱い相互作用に共通の特徴であることがいろいろな実験で確かめられている.

[2 成分ニュートリノと β 崩壊の相互作用]

ニュートリノは質量 0 のために 4 成分の内部自由度の代りに 2 成分の内部自由度を持つ可能性のあることを § 7.4 に示した. 2 成分ニュートリノの場合には空間反転に対して不変でないが, β 崩壊等でパリティ非保存が確かめられたので 2 成分理論の可能性が生れてきた.

β 崩壊 ($n \to p + e^- + \bar{\nu}$) の相互作用の Hamiltonian H を考えよう. これは 4 個の場から作られるが, 重粒子数・軽粒子数の保存則があるので p と n, e と ν とを組合せて

$$H(x) = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_p O^B \psi_n \cdot \bar{\psi}_e O^L \psi_\nu + \text{(エルミット共役量)} \qquad (12.20)$$

と書く. O^B, O^L は重粒子および軽粒子のスピン (Dirac の γ 行列) による部分, g は結合定数である. ($1/\sqrt{2}$ は通常用いられる g の定義と一致させるためにつけた.)

$H(x)$ は Lorentz 変換に対して不変であるから, $\bar{\psi}_p O^B \psi_n$ が Lorentz 変換に対してスカラー・ベクトル・テンソルであるそれぞれの場合に応じて $\bar{\psi}_e O^L \psi_\nu$ もスカラー・ベクトル・テンソルでその積が不変量になっていなければならない. いま軽粒子の部分に着目すると 153 ページの表より,

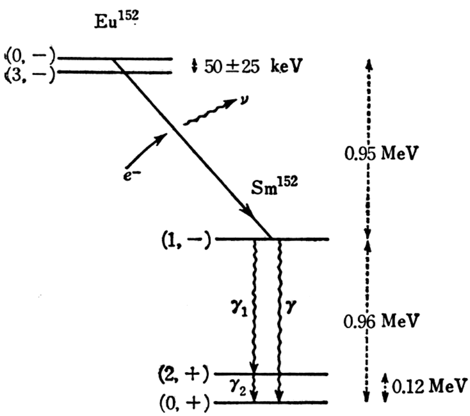
	$\bar{\psi}_e O^L \psi_\nu$	エルミット共役量
スカラー	$\bar{\psi}_e(a+ib\gamma_5)\psi_\nu$	$(\bar{\psi}_\nu(a^*+ib^*\gamma_5)\psi_e)$,
ベクトル	$\bar{\psi}_e(a+b\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu$	$(\bar{\psi}_\nu(a^*+b^*\gamma_5)\gamma_\mu\psi_e)$,
テンソル	$\bar{\psi}_e(a+ib\gamma_5)\sigma_{\mu\lambda}\psi_\nu$	$(\bar{\psi}_\nu(a^*+ib^*\gamma_5)\sigma_{\mu\lambda}\psi_e)$

である．空間反転の不変性は成立しないことがわかったので $a=0$，または $b=0$ である必要はなく Lorentz 変換に対する変換性は同じで空間反転に対する変換性の異なるものが共存しうる．a，b は任意の複素数にとる．このようにとると $\bar{\psi}_e O^L \psi_\nu$ のエルミット共役量は表の括弧内の量になる．

いろいろな β 崩壊ででてくる e^-，e^+ について，そのスピンの偏りを実験的に測ると極めていちじるしい特徴が見出される．すなわち e^- はそのスピンが大体進行方向と反平行，e^+ は平行であり，この傾向は $e^\pm$ の速度が光速度に近づくほどいちじるしい．定量的に表わすと $e^\pm$ のヘリシティは，

$$h=\frac{(\sigma\cdot p)}{|p|}\approx\begin{cases}-v/c & e^- \\ +v/c & e^+\end{cases} \tag{12.21}$$

であることが見出された．v は $e^\pm$ の速度である．いろいろな β 崩壊で放出される $e^\pm$ のエネルギーは，その Q 値で決まる上限があり $v=c$ にはなれないが，Q 値の大きな β 崩壊では $v\approx c$ になりうるので，これらの場合には e^- はほとんど完全に左巻き，e^+ は右巻きの状態で出てくる．



12-7 図 Eu^{152} の K 電子捕獲
$Eu^{152}(0, -)$：準安定状態
$Sm^{152}(1, -)$：$\tau=(7\pm\ )2\times10^{-14}$sec
γ 放出の $R\approx0.14$
γ_1, γ_2 放出の $R\approx0.10$

ν のヘリシティの測定は極めて難しいが Goldhaber, Grodzins, Sunyar によって測定され ν は $h=-1$，したがって $\bar{\nu}$ は $h=+1$ のことが確かめられた．彼らは Eu^{152} の準安定状態（約9時間の寿命）が Eu 原子中の電子を吸収して Sm^{152} に変る際に放出される ν のヘリシティを測定した．12-7 図に示すように Eu^{152} の準安定状態のスピン・パリティは 0−，これがK電子（$S_{1/2}$）を吸収して（K 電子捕獲）ν を出すときに移る Sm^{152} の励起状態は 1−

である．この状態は約 3×10^{-14} sec の短かい寿命で γ 線を放出し Sm^{152} の基底状態 0+ に移る．

ν の放出方向を $-z$ 軸にとり角運動量の保存則を考えよう．K 電子捕獲により作られた Sm^{152} (1－) は反跳をうけ，z 軸方向に走る．初めの Eu^{152} はスピン 0，K 電子の軌道角運動量も 0 なので，捕獲前の系の J_z は K 電子のスピンの z 成分 $S_z^{(e)}$ に等しく $S_z^{(e)}=\pm1/2$ のいずれかである．作られた ν，Sm^{152} の軌道角運動量の z 成分は 0 なので，角運動量の保存より Sm^{152}(1－) のスピンの z 成分は $S_z^{(e)}-S_z^{(\nu)}$ に等しい (12-8 a 図参照)．これより，

$$Sm^{152}(1-)\text{ のスピンの } z \text{ 成分}=\begin{cases}0 \text{ または } -1 \cdots \nu \text{ のヘリシティ } -1,\\ 0 \text{ または } +1 \cdots \nu \text{ のヘリシティ } +1.\end{cases}$$

この Sm^{152} (1－) が γ 線を放出するとき，特に Sm^{152} (1－) の運動方向と同方向 (z 軸方向) にでる γ 線のスピンは，

$$Sm^{152}(1-)\to Sm^{152}(0+)+\gamma$$

における角運動量保存則より (12-8 b 図)，

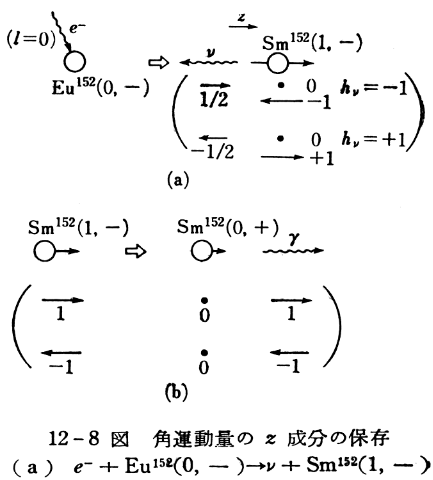
$$S_z^{(\gamma)}=\begin{cases}-1 \cdots \nu \text{ のヘリシティ } -1,\\ +1 \cdots \nu \text{ のヘリシティ } +1\end{cases}$$

である．($S_z=0$ の Sm^{152}(1－) は z 方向に γ 線を出せない)．

γ 線は Sm^{152} の中を通過させ，

$$\gamma+Sm^{152}(0+)\to Sm^{152}(1-)\to\gamma+Sm^{152}(0+)$$

で表わされる共鳴散乱を起こす γ 線のみを測定する．γ 線のエネルギーが Sm^{152} にちょうど励起エネルギー (～960 keV) を与えうるときに共鳴が起こり強い散乱をうける．反跳された Sm^{152}(1－) から出る γ 線は元来このエネルギーに近い値を持っているが，静止している Sm^{152}(1－) から放出されるわけではないので，Sm^{152}(1－) の運動方向と γ 線の放出方向とのなす角度により γ 線のエネルギーが異なってくる．簡単な計算から Sm^{152}(1－) と同方向 (z 軸



12-8 図 角運動量の z 成分の保存
(a) $e^-+Eu^{152}(0,-)\to\nu+Sm^{152}(1,-)$
(b) $Sm^{152}(1,-)\to\gamma+Sm^{152}(0,+)$

方向）に放出されるγ線がもっとも共鳴エネルギーに近く大きな散乱をうけることがわかる（問題 12.1 参照).

Sm（-1）の反跳方向は直接は観測できないが共鳴散乱の方法では反跳 Sm の方向またはそれに近い方向に放出されるγ線を測定することになり，このγ線の偏りをはかることからνの偏りがわかる．γ線が右（左）巻きのときνも右（左）巻きである．このようにして，ν はヘリシティ -1 のことが確かめられた．νの質量が0のこと，νのヘリシティの測定，その他の種々の実験よりνは左巻き，$\bar{\nu}$は右巻きで2成分理論で記述されると考えられる．

（後述するように $n\rightarrow p+e^-+\bar{\nu}$ ででてくるニュートリノと $\pi^-\rightarrow\mu^-+\bar{\nu}$ ででてくるニュートリノは別種のもので，後者のニュートリノ $\bar{\nu}$ のヘリシティは別の方法で調べなければならない).

2成分ニュートリノを記述する場 ψ_ν は（7.81）の条件をみたす．

$$(1+\gamma_5)\psi_\nu=0. \tag{12.22}$$

いま一応4成分持った ψ_ν を考えて，これから $(1-\gamma_5)\psi_\nu$ を作ると，

$$(1+\gamma_5)\{(1-\gamma_5)\psi_\nu\}=(1-\gamma_5{}^2)\psi_\nu=0$$

であるから，$(1-\gamma_5)\psi_\nu$ は4成分の ψ_ν から左巻きの ν に対応する2成分をとりだしたものと考えてよい．

同様に電子の場を ψ_e と書くと，もし電子の運動量 p が大きく電子の質量 m が省略できるとき（$p\gg mc$)，すなわち電子の速度 v が光速度 c に近いときは，$(1-\gamma_5)\psi_e$ はほとんど $h=-1$ の電子を表わすと考えてよい．

ν が $h=-1$ であること，$v\approx c$ の e^- が $h=-1$ であることより，弱い相互作用の $H(x)$(12.20) の中には ψ_ν, ψ_e は常に $(1-\gamma_5)\psi_\nu$, $(1-\gamma_5)\psi_e$ の形で入ってくると仮定しよう．また $\bar{\psi}_\nu$, $\bar{\psi}_e$ については，

$$\{(1-\gamma_5)\psi_\nu\}^\dagger=\psi_\nu{}^\dagger(1-\gamma_5)=\psi_\nu{}^\dagger\gamma_0\gamma_0(1-\gamma_5)=\bar{\psi}_\nu\gamma_0(1-\gamma_5)=\bar{\psi}_\nu(1+\gamma_5)\gamma_0$$

等よりわかるように $\bar{\psi}_\nu(1+\gamma_5)$, $\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)$ の形で H の中に入る．軽粒子 ν, e より作られる $\bar{\psi}_eO^L\psi_\nu$ およびそのエルミット共役量の中で，この条件をみたす唯一のものは，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu&=\bar{\psi}_e\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_\nu,\\ \bar{\psi}_\nu(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_e&=\bar{\psi}_\nu\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_e\end{aligned} \tag{12.23}$$

で153ページの表より明らかなように，これらは相互にエルミット共役である．これに対し，たとえば次のスカラー量，

$$\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\psi_\nu,\quad \bar{\psi}_\nu(1+\gamma_5)\psi_e$$

は，それぞれ，

$$(h=+1\ \text{の}\ \nu)\to(h=-1\ \text{の}\ e^-),\quad (h=+1\ \text{の}\ e^-)\to(h=-1\ \text{の}\ \nu)$$

等の遷移を起こし，右巻きの ν または e^- が関与してくる．

以上のことから左巻きの ν，および $v\approx c$ で左巻きの e^- のみが関与する $H(x)$ は次のようになる．

$$H(x)=\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_p(a+b\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n\cdot\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu+(\text{エルミット共役量}). \tag{12.24}$$

この $H(x)$ により運動量 $\boldsymbol{p}$ の電子が作られるときのその電子の偏りを求めてみよう．

電子の波動関数は (7.37), (7.39) により表わされ，これに $(1-\gamma_5)$ をかけると (7.30) の γ_5 の表示を用い，($\boldsymbol{p}$ は z 軸方向にとった)

$$\begin{aligned}(1-\gamma_5)u(p,+1)&=N\left(1-\frac{cp}{E+mc^2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\\(1-\gamma_5)u(p,-1)&=N\left(1+\frac{cp}{E+mc^2}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{12.25}$$

同様にして，((12.25) のエルミット共役量に右から γ_0 をかける)

$$\begin{aligned}\bar{u}(p,+1)(1+\gamma_5)&=N\left(1-\frac{cp}{E+mc^2}\right)(1,0,1,0),\\\bar{u}(p,-1)(1+\gamma_5)&=N\left(1+\frac{cp}{E+mc^2}\right)(0,1,0,1).\end{aligned} \tag{12.26}$$

ここで N は規格化の定数 (7.38) である．

電子が作られるとき，$\bar{\psi}_e$ が常に $\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)$ として現われることより，$\sigma_z=\pm 1$ の電子の見出される確率は $[1\mp cp/(E+mc^2)]^2$ に比例することがわかる．したがって電子の偏りの平均値は，

$$h=\frac{\langle\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\rangle}{p}=\langle\sigma_z\rangle=\frac{\left(1-\dfrac{cp}{E+mc^2}\right)^2-\left(1+\dfrac{cp}{E+mc^2}\right)^2}{\left(1-\dfrac{cp}{E+mc^2}\right)^2+\left(1+\dfrac{cp}{E+mc^2}\right)^2}=-\frac{cp}{E}=-\frac{v}{c} \tag{12.27}$$

となり，ちょうど実験結果と一致する．

同様に e^+ が作られるときは常に $(1-\gamma_5)\psi_e$ を通して行なわれ，

$$
\begin{aligned}
(1-\gamma_5)v(p,\ +1)&=N\left(1+\frac{cp}{E+mc^2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\\
(1-\gamma_5)v(p,\ -1)&=-N\left(1-\frac{cp}{E+mc^2}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{12.28}
$$

より，

$$
h=+\frac{v}{c}\cdots(e^+)
\tag{12.29}
$$

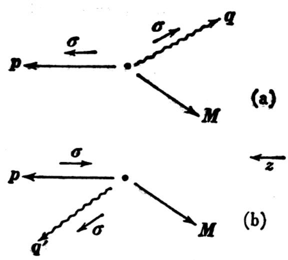
が導かれる．

(12.27)，(12.29) が成立するためには，すなわち $\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu$ の行列要素の２乗が $\sigma_z=\pm1$ に応じて $[1\mp cp/(E+mc^2)]^2$ に比例するためには，残りのスピノルの部分が $\sigma_z=\pm1$ によらず等しくなければならない．次の４成分スピノルを定義する．

$$
\chi_+=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\qquad \chi_-=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},
$$

$$
\bar{\chi}_+=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1,\ 0),\qquad \bar{\chi}_-=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ 0,\ 1)
$$

また核子の部分 $\psi_p(a+b\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n$ の行列要素を M_μ とし，運動量 $\boldsymbol{q}$，$h=1$，の $\bar{\nu}$ を表わす４成分スピノルを $\eta(\boldsymbol{q})$ と書こう．電子の進行方向 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{M}$ (M_μ の空間部分) を含む面に垂直な軸のまわりの 180° 回転を考える．これより $\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{q}'$ になるとする．そこで $h=+1$ の電子と運動量 $\boldsymbol{q}$ の $\bar{\nu}$ を放出する振幅 T_a (12-9 a 図) と，$h=-1$ の電子と運動量 $\boldsymbol{q}'$ の $\bar{\nu}$ を放出する振幅 T_b(12-9 b 図) とを比較する．



12-9 図　$n\to p+e^-+\bar{\nu}$ 崩壊

$$
T_a\propto\left(1-\frac{cp}{E+mc^2}\right)\bar{\chi}_+\gamma_\mu\eta(\boldsymbol{q})M_\mu,
$$

$$
T_b\propto\left(1+\frac{cp}{E+mc^2}\right)\bar{\chi}_-\gamma_\mu\eta(\boldsymbol{q}')M_\mu.
$$

反跳は無視できるので，核子の行列要素 M は両方で共通としてよい．上記の回転で $\bar{\chi}_+\to\bar{\chi}_-$，$\eta(\boldsymbol{q})\to\eta(\boldsymbol{q}')$，$\boldsymbol{M}\to-\boldsymbol{M}$ となる．振幅の回転に対する不変性から，

$$
\bar{\chi}_+\gamma_\mu\eta(\boldsymbol{q})M_\mu=\bar{\chi}_-\gamma_\mu\eta(\boldsymbol{q}')M_\mu'
$$

が得られる．M_μ' は（$-\boldsymbol{M}$, M_0）で．M_μ と空間部分の符号がちがっているいる．しかしこの２乗をつくり，核子のスピン方向について平均するならば $|M_0|^2$, $|\boldsymbol{M}|^2$ のみが残るので，M と M' の差は問題にならない．

ゆえに T_a と T_b は $1\pm cp/(E+mc^2)$ の因子を除いて等しいとしてよい．$\bar{\nu}$ の方向を問題にしないときは，ある方向に進む $h=\pm1$ の電子放出の確率は $\{1\pm cp/(E+mc^2)\}^2$ に比例するということができる．

以上のことから，e^- の偏りは $\sim -v/c$ であると考えてよい．しかし特殊な場合として，$\pi^-\to e^-+\bar{\nu}$ 崩壊を考える．これら２体崩壊では e^-, $\bar{\nu}$ の間には完全な角相関があり，e^- と $\bar{\nu}$ の放出方向は運動量保存則より常に正反対である．$\bar{\nu}$ のヘリシティは $+1$ で常に進行方向にスピンが向いているので，角運動量保存則より e^- も常に進行方向にスピンが向いており，

$$h=+1\,(\pi^-\to e^-+\bar{\nu}\text{ 崩壊の }e^-) \tag{12.30}$$

である．e^- のエネルギーは $\sim m_\pi c^2/2\sim 70\,\mathrm{MeV}$ で，その静止質量にくらべて非常に大きく e^- は光速度に近い速度を持つ．右巻きの e^- の放出の振幅は（12.27）より常に $1-cp/(E+mc^2)\approx mc^2/E$ に比例するので，$\pi\to e+\bar{\nu}$ 崩壊の確率は小さな因子 $(mc^2/E)^2$ に比例して極めて小さい．

$$(mc^2/E)^2\approx(0.51/70)^2\approx 0.53\times10^{-4} \tag{12.31}$$

であるから，$\pi\to e+\bar{\nu}$ に対しては弱い相互作用の結合定数が 10^{-4} 小さくなったと同じ結果になる．（§ 12.7 参照）

（12.24）の相互作用はベクトル型の相互作用といわれる．g, a, b の３個の定数は，ga, gb の二つの積のみが物理的な意味を持つので ga の代りに g_{F_1}, b/a の代りに λ と書き

$$H(x)=\frac{g_{F_1}}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_p(1+\lambda\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n\cdot\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu+(\text{エルミット共役量}). \tag{12.32}$$

この $H(x)$ を用いて中性子の β 崩壊の遷移確率を（9.138）を使って求めることができる（問題 12.2 参照）．計算は複雑なので答のみ記すと，偏りのない中性子が運動量 $\boldsymbol{p}$, エネルギー E の電子，運動量 $\boldsymbol{q}$ の $\bar{\nu}$ を放出する確率は，e^-, $\bar{\nu}$ および反跳陽子のスピンの偏りについて和をとると，

$$dw=\frac{g_{F_1}{}^2}{(2\pi)^5}c^{-5}\hbar^{-7}pE(E_0-E)^2dEd\Omega d\Omega_\nu(1+3|\lambda|^2)$$
$$\times\left\{1+\frac{1-|\lambda|^2}{1+3|\lambda|^2}\cdot\frac{c\boldsymbol{pq}}{Eq}\right\}. \tag{12.33}$$

ここで $d\Omega$, $d\Omega_\nu$ はそれぞれ電子，$\bar{\nu}$ の放出される小立体角，E_0 は電子の持ちうる最高

のエネルギーである．括弧内の第2項は，e^-，$\bar{\nu}$ の放出方向の相関を表わし，測定の結果は相関がほとんど認められなかった（$|\lambda|\approx 1$）．(12.33) は摂動論の結果であるが，作られた pe^- の間には Coulomb 力が働くので実際には(12.33)はこのための補正をうける．

(12.32) の H と minimal な電磁的相互作用とを比較してみよう．荷電がそれぞれ e_a，e_b のスピン 1/2 粒子 a, b を考えると，電磁的相互作用は，

$$H=(e_a\bar{\psi}_a\gamma_\mu\psi_a+e_b\bar{\psi}_b\gamma_\mu\psi_b)A_\mu. \tag{12.34}$$

これより a，b 粒子間の電磁的相互作用を求めると (9.128) のようにして，

$$H=\frac{e_ae_b}{4\pi}\iint\frac{\bar{\psi}_a\gamma_\mu\psi_a(\boldsymbol{r})\bar{\psi}_b\gamma_\mu\psi_b(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}' \tag{12.35}$$

となる．これは二つの4次元電流 $e_a\bar{\psi}_a\gamma_\mu\psi_a$，$e_b\bar{\psi}_b\gamma_\mu\psi_b$ の間の力を表わしている．

弱い相互作用 H(12.32) は核子の4次元的ベクトルの流れ $\bar{\psi}_p(1+\lambda\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n$ と軽粒子の4次元的ベクトルの流れ $\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu$ の間の同様な力を示している．e_ae_b に相当するものが $g_{F_1}/\sqrt{2}$ である．これらの流れはパリティ非保存のためベクトル型と疑ベクトル型の流れが共存しており，軽粒子の流れは $V-A$ 型，核子の流れは $V-\lambda A(\approx V-A)$ 型であり，(12.32) は $V-A$ 型の相互作用といわれる．また (12.35) に現われる4次元電流は粒子の転換を伴わないが，弱い相互作用に現われる流れは $n\to p$，$\nu\to e^-$ 等の粒子転換を伴いかつ荷電が $\pm e$ だけ変化する．

$\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu=\bar{\psi}_e\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_\nu$ を **$V-A$ 型の流れ** とよぶ．γ_5 を γ_μ の右側にもってきたときの1と γ_5 の係数をくらべて型の名称をつける．

§12.3 軽粒子を含む弱い相互作用の普遍性

核子の β 崩壊，μ 崩壊．μ の陽子捕獲を起こす Fermi 型の相互作用について §9.3 で調べた．その結果これらの結合定数はほとんど同じ大きさであることがわかった．しかし (9.113)〜(9.115) の H はパリティ非保存も考慮していないし，実験的に確かめられた $V-A$ 型の力でもない．この節ではよりくわしく Fermi 型の相互作用を調べ，そこにみられる普遍的性質を探そう．

[$V-A$ 型の結合]

β 崩壊，μ 崩壊，μ 捕獲にみられる共通の性質はいずれもニュートリノが関係しておりパリティ非保存であると同時に，弱い相互作用に関与する ν，e^-，μ^- は $-v/c$ の偏り，$\bar{\nu}$，e^+，μ^+ は $+v/c$ の偏りを示している．そこで相互作用の H は (9.113)〜(9.115) の代りに (12.32) にならって次のように書ける．

$$H_1=\frac{g_{F_1}}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_p(1+\lambda\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n\cdot\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu+\text{エルミット共役量},$$

$$H_2=\frac{g_{F_2}}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu\cdot\bar{\psi}_\nu(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\mu+\text{エルミット共役量},\qquad(12.36)$$

$$H_3=\frac{g_{F_3}}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_p(1+\lambda'\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n\cdot\bar{\psi}_\mu(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu+\text{エルミット共役量}.$$

λ, λ' の大きさはあとで述べるように,

$$\lambda=\lambda'\approx 1\qquad(12.37)$$

で, (12.36) は相互作用がどの場合にも $V-A$ 型であることを示している.

[Fermi 相互作用の強さ]

§ 9.3 および 12-3 表では相互作用の大たいの強さを知るために次元解析的な方法で計算したが, ここでは正しい相互作用の形 (12.36) に基づいてその結合の強さを調べる. 中性子の β 崩壊の Fermi 型相互作用 (12.32) の強さを知るには g_{F_1} および λ の大きさを知らねばならない. g_{F_1}, $g_{F_1}\lambda$ がそれぞれベクトル結合および疑ベクトル結合の強さになる. このため中性子 n, および O^{14} の β 崩壊の寿命の理論値を実験結果と比較する.

$n\to p+e^-+\bar{\nu}(E_0\approx 1.29\,\text{MeV})$, $O^{14}\to N^{14}+e^++\nu(E_0\approx 2.3\,\text{MeV})$ における主な相違は E_0 の値の相違の他に次の点にある. すなわち n, p のスピン・パリティは共に (1/2, +), O^{14}, N^{14} は共に (0, +) で, β 崩壊の際のスピン・パリティの変化を考えると次の通りである (O^{14} の β 崩壊の大部分 (~99.4%) は N^{14} の基底状態 (1, +) ではなく励起状態 (0, +) に移る).

$$n\to p\qquad \Delta J=0,\,1\qquad \text{パリティ変化なし},$$

$$O^{14}\to N^{14}\qquad \Delta J=0\qquad \text{パリティ変化なし}.$$

$n\to p$ の場合は $\Delta J=1$ の遷移も起こるが $O^{14}\to N^{14}$ では $\Delta J=0$ のみである.

一方, これら核子・原子核の転換は, (12.32) で表わされる崩壊の相互作用で起こるが, 核子についてベクトル型の部分 $\bar{\psi}_p\gamma_\mu\psi_n$ と疑ベクトル型の部分 $\lambda\bar{\psi}_p\gamma_5\gamma_\mu\psi_n$ とがある. これらは 153 ページの表より明らかなように核子に 12-5 表の変化を与える.

12-5 表

	ΔJ	パリティ変化
$\bar{\psi}_p\boldsymbol{\gamma}\psi_n$	1	あり
$\bar{\psi}_p\gamma_0\psi_n$	0	なし
$\bar{\psi}_p\gamma_5\boldsymbol{\gamma}\psi_n$	1	なし
$\bar{\psi}_p\gamma_5\gamma_0\psi_n$	0	あり

これより n の β 崩壊には $\bar{\psi}_p\gamma_0\psi_n$ と $\lambda\bar{\psi}_p\gamma_5\boldsymbol{\gamma}\psi_n$, O^{14} の β 崩壊には $\bar{\psi}_p\gamma_0\psi_n$ がきくことがわかる. すなわち前者にはベクトル・疑ベクトル型の両方がきくが, 後者にはベクト

ル型の相互作用のみきく．したがって O^{14} の β 崩壊の寿命から g_{F_1} の大きさを決定し，この値と n の寿命から λ の値を決めうる．nの寿命は (12.33) の dw から全確率を求めて得られ，O^{14} の寿命も同様にして計算できる．答のみ記すと (問題 12.3 参照)，

$$\frac{1}{\tau} = w = \begin{cases} \dfrac{m_e{}^5 c^4 g_{F_1}{}^2}{2\pi^3 \hbar^7} f(1, E_0)(1+3|\lambda|^2) & (n \to p + e^- + \bar{\nu}) \\ \dfrac{m_e{}^5 c^4 g_{F_1}{}^2}{2\pi^3 \hbar^7} f(7, E_0) & (O^{14} \to N^{14} + e^+ + \nu) \end{cases} \tag{12.38}$$

である．m_e は電子の質量，$f(z, E_0)$ は，

$$f(z, E_0) = \int_{m_e c^2}^{E_0} F(z, E) pE(E_0 - E)^2 dE / m_e{}^5 c^9 \tag{12.39}$$

で与えられ $F(z, E)$ は作られた電子と核の間の Coulomb 力による補正因子で，ほとんど 1 に等しい．z はそれぞれ二つの崩壊に対し $z=1$ および $z=7$ である．

通常，寿命 τ の代りに $f(z, E_0)\tau_{1/2}$ で測定値を表わす ($\tau_{1/2} = \log 2 \cdot \tau$ は秒単位)．

$$f\tau_{1/2} = \begin{cases} 1280 \pm 250 & (n \to p + e^- + \bar{\nu}) \\ 3125 \pm 10. & (O^{14} \to N^{14} + e^+ + \nu). \end{cases} \tag{12.40}$$

(12.40)，(12.38) を比較して g_{F_1}，λ の値を決めうる．

$$g_{F_1} = (1.4029 \pm 0.0022) \times 10^{-49}\ \mathrm{erg \cdot cm^3}, \tag{12.41}$$

$$\lambda = 1.19 \pm 0.04. \tag{12.42}$$

(g_{F_1}，λ が実数，かつ $\lambda > 0$ であることは § 12.5 参照)

$\mu \to e + \bar{\nu} + \nu$ 崩壊の確率を (12.36) の H_2 を用いて求めると，

$$w = \frac{g_{F_2}{}^2 m_\mu{}^5 c^4}{24(2\pi)^3 \hbar^7}. \tag{12.43}$$

m_μ は μ 中間子の質量である．この w と μ 中間子の寿命を比較して ($w = 1/\tau$)，

$$g_{F_2} = (1.4350 \pm 0.0011) \times 10^{-49}\ \mathrm{erg \cdot cm^3} \tag{12.44}$$

となる．

g_{F_1} と g_{F_2} は $\leqslant 2\%$ の精度で一致していることは極めていちじるしい事実である．また $\mu^- + p \to \nu + n$ の実験の精度はそれ程よくないが，

$$g_{F_3} \approx g_{F_1}, \quad \lambda' \approx \lambda \tag{12.45}$$

が確かめられている．このように Fermi 型相互作用の強さは極めてよい精度で普遍的な値を持っている．

g_{F_1}，g_{F_2} を (12.41)，(12.44) のような精度で求めるには (12.36) を用いた摂動論の計算では不充分である．特に放出される電子に働く Coulomb 場の補正等の電磁的補正，$\mu - e$ 崩壊における γ 線の放出・吸収による補正が必要であり，これら補正は g_{F_1}，g_{F_2}

の値をうるのにすでに考慮されている.

[弱い相互作用におけるベクトル流の保存]

弱い相互作用 (12.36) と minimal な電磁的相互作用を比較すると前に述べたようにいちじるしい類似性がある. 電流に対して弱い相互作用に現われる4次元的ベクトル流を,

$$\begin{aligned} J_\mu{}^{(N)} &= g_N\bar{\psi}_p(1+\lambda\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n, \\ J_\mu{}^{(e)} &= g_e\bar{\psi}_\nu(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_e, \\ J_\mu{}^{(\mu)} &= g_\mu\bar{\psi}_\nu(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\mu. \end{aligned} \tag{12.46}$$

と書くと, それぞれは $(n\to p)$, $(e^-\to\nu)$, $(\mu^-\to\nu)$ の流れを表わす. $H_{1,2,3}$ をこれら流れの間の相互作用と考えると,

$$\frac{g_{F_1}}{\sqrt{2}}=g_Ng_e,\ \frac{g_{F_2}}{\sqrt{2}}=g_eg_\mu,\ \frac{g_{F_3}}{\sqrt{2}}=g_\mu g_N \tag{12.47}$$

である. 電磁的相互作用では電流間の力は遠達力で (12.35) 異なる2点間の電流の間に力が働いたが, (12.36) では二つの流れが重なったときにのみ力が働く. (実際には力の到達距離が極めて短かい $\lesssim 10^{-14}$ cm ことのみ知られており, 必ずしも完全に重なる必要はない).

4次元的流れ J_μ を空間反転による性質で分け, ベクトル流と疑ベクトル流に分けるとベクトル流の荷電に相当する量は $J_\mu{}^{(N)}$, $J_\mu{}^{(e)}$, $J_\mu{}^{(\mu)}$ のそれぞれに対し g_N, g_e, g_μ, また疑ベクトル流のそれは $g_N\lambda$, g_e, g_μ である. $g_{F_1}\approx g_{F_2}\approx g_{F_3}$ という実験事実は (12.47) より,

$$g_N\approx g_e\approx g_\mu \tag{12.48}$$

が成立していることを示している. これは p, e, μ の荷電の大きさが同一であったと同様に極めていちじるしい性質である.

これに反し疑ベクトル流の荷電に相当する量の間には, このような関係はみたされていない.

$$\lambda g_N\neq g_e\approx g_\mu. \tag{12.49}$$

軽粒子と異なり核子は強い相互作用をすることが知られている. したがって $(n\to p)$ の流れ $J_\mu{}^{(N)}$ を考えるとき, 中性子 n・陽子 p が構造を持つために荷電等の分布を生じたと同様に弱い相互作用の強さ g_N の分布を生ずる. たとえば n は次のような状態の集まりであるから,

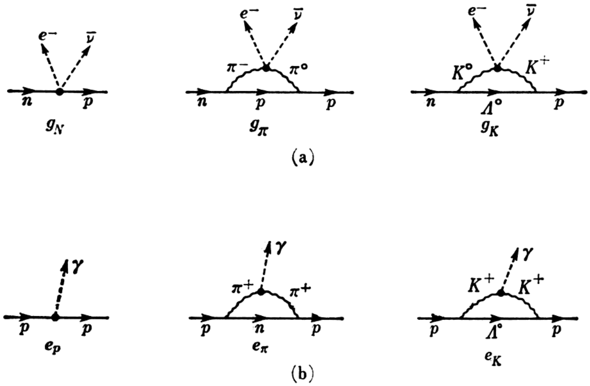
$$n;\ n,\ p+\pi^-,\ n+\pi^0,\ \Lambda^0+K^0,\ \cdots. \tag{12.50}$$

n はある確率で $p+\pi^-$, Λ^0+K^0 状態に存在している. このときに e^- を放出すること

ができないならば中性子の β 崩壊の能力が減少することになる．これに反し π^-, K^0 等も

$$\pi^- \to \pi^0 + e^- + \bar{\nu}, \quad K^0 \to K^+ + e^- + \bar{\nu}$$

の β 崩壊が可能であって，その強さ g_π, g_K が g_N と同じ大きさを持つならば，核子が (12.50) のような構造を持っていても全体としての β 崩壊の強さ g_N には変化がない．この事情は陽子が $p \to n + \pi^+$, $p \to \Lambda + K^+$ 等の遷移のため構造を持つが，π^+, K^+ 等が陽子と同じ荷電を持つので，陽子の全荷電は構造の有無にかかわらず変化しないことと同じである (12-10 図).



12-10 図　(a)　弱い相互作用のベクトル流の保存($g_N = g_\pi = g_K$)
　　　　　(b)　電流の保存 ($e_p = e_\pi = e_K$)

$$g_N = g_\pi = g_K = \cdots \tag{12.51}$$

が成立しているかどうかを調べるため，$\pi^- \to \pi^0 + e^- + \bar{\nu}$ 崩壊の寿命を (12.51) を仮定して計算し実験値と比較してみる．π^- は π^0 中間子より 4.6 MeV 重く，この崩壊の Q 値は 4.1 MeV である．

核子の流れ $J_\mu{}^{(N)}$ (12.46) に対し ($\pi^- \to \pi^0$) の流れ $J_\mu{}^{(\pi)}$ は，

$$J_\mu{}^{(\pi)} = g_\pi \frac{i}{c\hbar} \sqrt{2} (\partial_\mu \varphi_0 \varphi^\dagger - \varphi_0 \partial_\mu \varphi^\dagger) \tag{12.52}$$

と書ける．φ_0 は π^0 中間子の場，$\varphi^\dagger$ は荷電中間子の場である (問題 12.4).

$J_\mu{}^{(\pi)}$ の $\pi^- \to \pi^0$ 遷移に対する行列要素を，π が反跳をうけない場合 ($p_\mu{}^- = p_\mu{}^0$; $p_\mu{}^-$, $p_\mu{}^0$ はそれぞれ π^-, π^0 の運動量) に求めると，

$$g_\pi \left(\frac{i}{c\hbar}\right) \frac{(c\hbar)^2}{\sqrt{2EE_0}L^3} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)(p_\mu{}^- + p_\mu{}^0) = \sqrt{2} g_\pi c \frac{p_\mu}{EL^3}.$$

特に $\mu = 0$ の場合には $cp_\mu{}^{-,0} = E_{-,0}$ より $\sqrt{2}\, g_\pi / L^3$ に等しい．同様に核子が反跳を

うけない場合に $g_N\bar{\psi}_p\gamma_\mu\psi_n$ による $(n\to p)$ 遷移の行列要素は (7.53), (7.54) により，

$$g_N\bar{u}_p\gamma_\mu u_n/L^3.$$

特に $\mu=0$ のときは，

$$g_N\bar{u}_p\gamma_0 u_n=g_N u_p^\dagger u_n=g_N.$$

$g_\pi=g_N$ であれば中性子の β 崩壊の能力は一定であり，(12.52) はベクトル流が保存するときの π の流れを表わすことが示される（詳しくは問題 12.4 を見よ）.

$\pi^-\to\pi^0+e^-+\bar{\nu}$ 崩壊の Hamiltonian は，

$$H=J_\mu^{(e)\dagger}J_\mu^{(\pi)}+\text{エルミット共役量} \tag{12.53}$$

で，この相互作用の強さは，

$$g_\pi g_e=g_N g_e=\frac{g_{F_1}}{\sqrt{2}} \tag{12.54}$$

である．この崩壊確率 w は O^{14} の β 崩壊の確率と同様に計算できる．$\pi^+\to\pi^0$ の変化は $O^{14}\to N^{14}$ と同様に $\Delta J=0$，パリティ変化なしで，w は (12.38) と同様次式で与えられる．

$$\frac{1}{\tau}=w=\frac{m_e^5c^4g_{F_1}^2}{\pi^3\hbar^7}f(0,E_0).$$

$E_0\approx 4.6\,\mathrm{MeV}$ で E_0 が m_ec^2 にくらべて大きいので m_ec^2/E_0 の程度の項を省略する近似では，

$$f(0,E_0)=\frac{1}{m_e^5c^9}\int_{m_ec^2}^{E_0}pE(E_0-E)^2dE\approx\frac{1}{30}\left(\frac{E_0}{m_ec^2}\right)^5.$$

これより，

$$\frac{1}{\tau}\approx\frac{g_{F_1}^2E_0^5}{30\pi^3\hbar^7c^6}\approx 0.43\,\mathrm{sec}^{-1}. \tag{12.55}$$

ここで g_{F_1} の値として (12.41), $E_0=4.6\,\mathrm{MeV}$ を用いた．

$\pi^+\to\mu^++\nu$ 崩壊の寿命 $(2.55\pm0.03)\times10^{-8}\,\mathrm{sec}$ を用いると，

$$R=\frac{w(\pi^+\to\pi^0+e^++\nu)}{w(\pi^+\to\mu^++\nu)}=(1.07\pm0.02)\times10^{-8}. \tag{12.56}$$

一方，実験値は，

$$R=(1.15\pm0.22)\times10^{-8} \tag{12.57}$$

で，理論と実験の一致は極めてよい．

この他の実験事実等も考え合わせ弱い相互作用におけるベクトル流の保存はよい近似で成立していると考えられる．

[$S\neq0$ 粒子の β 崩壊]

ハイパロン，K 中間子等も β 崩壊を行なう．また崩壊の Q 値が大きいので $\mu^\pm$ を放

出する μ 崩壊も行なえる.

$$
\begin{aligned}
&\Lambda^0 \to p + e^- + \bar{\nu},\ p + \mu^- + \bar{\nu},\\
&\Sigma^+ \to n + e^+ + \nu,\ n + \mu^+ + \nu,\\
&\Sigma^- \to n + e^- + \bar{\nu},\ n + \mu^- + \bar{\nu},\\
&K^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu,\ \pi^0 + \mu^+ + \nu,\\
&K^- \to \pi^0 + e^- + \bar{\nu},\ \pi^0 + \mu^- + \bar{\nu},\\
&K^0{}_{1,2} \begin{cases} \nearrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu},\ \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu},\\ \searrow \pi^- + e^+ + \nu,\ \pi^- + \mu^+ + \nu. \end{cases}
\end{aligned} \tag{I}
$$

1) 崩壊の際に強い相互作用をする粒子（重粒子，π，K）の持つ荷電および S の変化に着目すると $\Delta S = \pm 1$ であると同時に，

$$\Delta S/\Delta Q = +1 \tag{12.58}$$

が確かめられている．これに対し $\Delta S/\Delta Q = -1$ の崩壊，

$$\Sigma^+ \to n + e^+ + \nu,\ n + \mu^+ + \nu$$

は禁止されているか，極めて小さい頻度でしか起こらない．このことは K^+ の4体崩壊

$$
\begin{aligned}
&K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + e^- + \bar{\nu},\ (\Delta S/\Delta Q = -1)\\
&K^+ \to \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu,\ (\Delta S/\Delta Q = +1)
\end{aligned} \tag{II}
$$

で，前者が後者にくらべて非常に少ないこと，あるいは前者が完全に禁止されていることと一致する．

2) ハイパロンの β 崩壊，μ 崩壊の相互作用の強さは g_N にくらべて小さい．また $K \to \mu + \nu$ 崩壊の強さも $\pi \to \mu + \nu$ 崩壊の強さにくらべて小さい．ハイパロンの主な崩壊が軽粒子を伴わない崩壊のために，ハイパロンの β，μ 崩壊の実験精度は充分良くはないが，$\Lambda \to p + e^- + \bar{\nu}$ の実験結果は次の通りである．

$\Lambda \to p + e^- + \bar{\nu}$ をベクトル型の Fermi 相互作用で表わすと，

a）（$\Lambda \to p$）の流れの強さ g_Λ は，

$$g_\Lambda \approx 0.2 g_N \tag{12.59}$$

で小さい．$g_N{}'_1 = \sqrt{g_N{}^2 + g_\Lambda{}^2}$ とすると（したがって $g_{F_1}{}' = \sqrt{1 + 0.2^2}\, g_{F_1}$ とすると）ほとんど $g_{F_1}{}' = g_{F_2}$ となり，Fermi 型相互作用の普遍性はさらによく成り立つ．

b）疑ベクトル結合とベクトル結合の強さの比 λ はよく調べられてはいないが，

$$\lambda \approx 1 \tag{12.60}$$

で $V-A$ 型としてもよい．また λ は実験誤差内で実数で時間反転に対し相互作用は不変のようにみえる．（§ 12.5 参照）

§ 12.4 軽粒子の関与しない弱い相互作用

§ 12.2 ～ 3 では軽粒子の関与する弱い相互作用を論じたが，ここでは軽粒子の関与しない相互作用を調べよう．この相互作用は，

$\Lambda \to p + \pi^-,\ n + \pi^0$　　$K^\pm \to \pi^\pm + \pi^0,\ \pi^\pm + \pi^\pm + \pi^\mp,\ \pi^\pm + 2\pi^0,$

$\Sigma^+ \to p + \pi^0,\ n + \pi^+$　　$K_1{}^0 \to \pi^+ + \pi^-,\ 2\pi^0,$

$\Sigma^- \to n + \pi^-$　　$K_2{}^0 \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0,\ \pi^0 + \pi^0 + \pi^0,$

$\Xi^- \to \Lambda^0 + \pi^-$

$\Xi^0 \to \Lambda^0 + \pi^0$

等の崩壊をひき起こす．

素粒子の崩壊には，この他に $\pi^0 \to 2\gamma$, $\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$ のようにその寿命が短かく γ 線を出して崩壊するものがあるが，これらは弱い相互作用とは関係なく電磁的相互作用による崩壊と考えられる．

π^0, Σ^0, Λ^0 は電気的に中性で，光子との間に minimal な相互作用はないが，強い相互作用により $\pi^0 \to p + \bar{p}$, $\Sigma^0 \to p + K^-$, $\Lambda^0 \to p + K^-$ 等の遷移が起こり，これらの粒子も電磁的性質（たとえば荷電分布，磁気能率等）を持ち，γ 線を放出することができる．

さてこれらの崩壊の特徴を調べてみよう．

1)　$\Delta S = \pm 1$ ($\Delta I_3 = \mp 1/2$).

崩壊前後における strangeness の変化を調べてみると常に $\Delta S = \pm 1$ である．強い相互作用，電磁的相互作用では常に S が保存されたので ($\Delta S = 0$)，この S の変化は弱い相互作用を特徴づけるものといってよい．$\Xi^- \to \pi^- + n$, $\Xi^0 \to \pi^- + p$ 等 $\Xi \to \Lambda + \pi$ にくらべて Q 値も大きく十分起こりそうな崩壊が見出されていないことは，$\Delta S = \pm 2$ の弱い相互作用が極めて小さいか存在しないことを示している．また $\Delta S = 0$ の弱い相互作用が存在していても強い相互作用の中に同じ転換を起こすものが存在し，その陰にかくれてその存在を確かめることは極めて難しい．$\Delta S = \pm 1$ は (11.18) の関係，および Q, n_B の保存則より $\Delta I_3 = \mp 1/2$ を同時に意味している．

2)　$\Delta I = 1/2$

Λ 崩壊の分岐比をみると（12－1 表），

$$R = \frac{(\Lambda \to p + \pi^-)}{(\Lambda \to p + \pi^-) + (\Lambda \to n + \pi^0)} \approx \frac{2}{3} \tag{12.61}$$

である．N, π の荷電スピンはそれぞれ 1/2, 1, したがって，崩壊後の荷電スピンの状態は 1/2 または 3/2 である．また荷電スピンの第 3 成分は －1/2. それぞれの状態を $\psi_{1/2}$, $\psi_{3/2}$ と書くと荷電部分については Clebsch-Gordan 係数を用い（付録 A 3 参照），

$$\psi_{1/2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}|p\pi^-\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}|n\pi^0\rangle,$$

$$\psi_{3/2}=\sqrt{\frac{1}{3}}|p\pi^-\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}|n\pi^0\rangle$$

となり，分岐比は，

$$R=\begin{cases}2/3 \ \cdots \ I=1/2\\ 1/3 \ \cdots \ I=3/2.\end{cases} \tag{12.62}$$

実験結果は主に終状態が $\psi_{1/2}$ であることを示しており，Λ が $I=0$ のことより，崩壊を起こす相互作用は $\Delta I=1/2$ をよい近似でみたしている．このことは K, Σ の崩壊の分岐比でも確かめられ軽粒子の関与しない弱い相互作用の特徴と考えられる．

Λ 崩壊で，もし終状態に $\psi_{1/2}$ と $\psi_{3/2}$ が共存するとき，その割合が適当であれば R の実験値を再現できる．この場合は $\Delta I=1/2$, $3/2$ の両方が存在する．しかし他の実験事実を考え合せると，$\Delta I=1/2$ であると考えられる．

荷電スピンは電磁的相互作用まで考えると，よい量子数ではない．したがって $\Delta I=1/2$ も電磁的補正を考えるとげんみつには成立しないと考えられる．これに対し $\Delta I_3=\pm 1/2$ は電磁的補正により影響をうけない．

3) パリティ非保存

軽粒子の関与する弱い相互作用ではパリティ保存が成立しないことが確かめられた．この相互作用には常にニュートリノが関与している．ニュートリノは2成分理論で記述され左巻きのニュートリノしか存在せず，これから空間反転して得られる右巻きニュートリノが存在しない．これは必然的にパリティ非保存を意味していた．パリティ非保存がニュートリノによるのか弱い相互作用の一般的特徴であるかは，軽粒子の関与しない弱い相互作用を調べればよい．

再び例として Λ 崩壊をとる．Λ 粒子は，たとえば，

$$\pi^-+p\to\Lambda+K^0 \tag{I}$$

反応で作られ，こうして作られた Λ の，

$$\Lambda\to p+\pi^- \tag{II}$$

崩壊を調べる．

44 ページで述べたように，一般にこのようにして作られた Λ は衝突面に垂直な方向に偏りを持っている．偏りの方向を z 軸にとり，この Λ が崩壊するようすを Λ が静止している Lorentz座標系で考える．Λ の角運動量 $J=1/2$, その z 成分は $\pm 1/2$ のいずれかである．角運動量の保存則から崩壊後の $p\pi^-$ の間の軌道角運動量は0または 1, それぞれの状態を ψ_0, ψ_1 と書く．ψ_0, ψ_1 はパリティの異なる状態であり，もし Λ 崩壊

がパリティ非保存であれば終状態 ψ はこれらを共に含む. $J_z = \pm 1/2$ を示すために右肩に $\pm$ の符号をつけると,

$$\psi^{\pm} = c_0\psi_0{}^{\pm} + c_1\psi_1{}^{\pm}, \quad |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1. \tag{12.63}$$

Λ のスピンが $\sigma_z = \pm 1$ のそれぞれの場合に対し（付録 A 3 参照),

$$\psi_0{}^+ = Y_0(\theta,\ \varphi)u_+,\ \ \psi_1{}^+ = \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1{}^1(\theta,\ \varphi)u_- - \sqrt{\frac{1}{3}}Y_1{}^0(\theta,\ \varphi)u_+,\ (\sigma_z = +1),$$

$$\psi_0{}^- = Y_0(\theta,\ \varphi)u_-,\ \ \psi_1{}^- = -\sqrt{\frac{2}{3}}Y_1{}^{-1}(\theta,\ \varphi)u_+ + \sqrt{\frac{1}{3}}Y_1{}^0(\theta,\varphi)u_-.\ (\sigma_z = -1).$$

(12.64)

$Y_l{}^m$ は Legendre の球関数 (3.21)（付録 A 4 参照）で, π^-p の軌道運動状態を示し, $u_\pm$ が $\sigma_z = \pm 1$ の陽子のスピン状態を示す. $\theta,\ \varphi$ は p の放出方向の角度である.

$$Y_0(\theta,\ \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}},$$

$$Y_1{}^1(\theta,\ \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi},$$

$$Y_1{}^0(\theta,\ \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,$$

$$Y_1{}^{-1}(\theta,\ \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}.$$

y 軸のまわりに系を π だけ回転すると,

$$e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_y} = i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

より,

$$u_- \to u_+,\ \ u_+ \to -u_-,$$
$$\psi^- \to \psi^+,\ \ \psi^+ \to -\psi^-$$

となる. 同じ回転で $\theta \to \pi - \theta,\ \varphi \to \pi - \varphi$ になるから,

$$Y_0(\theta,\ \varphi) \to Y_0(\theta,\varphi),$$
$$Y_1{}^{\pm 1}(\theta,\ \varphi) \to Y_1{}^{\mp 1}(\theta,\ \varphi),\ \ Y_1{}^0(\theta,\ \varphi) \to -Y_1{}^0(\theta,\ \varphi).$$

したがって, (12.64) より,

$$\psi_0{}^+ \to -\psi_0{}^-,\ \psi_0{}^- \to \psi_0{}^+,\ \psi_1{}^+ \to -\psi_1{}^-,\ \psi_1{}^- \to \psi_1{}^+.$$

(12.63) の $\psi^+,\ \psi_0{}^+,\ \psi_1{}^+$ は y 軸のまわりの π だけの回転で, いずれも $-\psi^-$, $-\psi_0{}^-$, $-\psi_1{}^-$ に移る. このことより $c_0,\ c_1$ は $\psi^{\pm}$ に対し共通のことがわかる.

Λ 粒子の崩壊の角分布は崩壊後の陽子のスピン方向につき和をとると,

$$\psi^+ : \frac{1}{4\pi}\{|c_0 - c_1\cos\theta|^2 + |c_1|^2\sin^2\theta\} = \frac{1}{4\pi}\{1 - 2\mathrm{Re}(c_0{}^*c_1)\cos\theta\},$$

$$\psi^- : \frac{1}{4\pi}\{|c_0 + c_1\cos\theta|^2 + |c_1|^2\sin^2\theta\} = \frac{1}{4\pi}\{1 + 2\mathrm{Re}(c_0{}^*c_1)\cos\theta\} \tag{12.65}$$

となる．$\mathrm{Re}(c_0{}^*c_1)$ は $c_0{}^*c_1$ の実数部分を意味する．θ は z 軸と p の放出方向のなす角度である．$\cos\theta$ に比例する項は ψ_0 と ψ_1 の干渉による部分で，この項が存在すれば Λ 崩壊の相互作用はパリティ非保存である．

Λ が偏りを持ってないときは ψ^+ で表わされる Λ と ψ^- で表わされる Λ が同数存在し，これらにつき平均すると，この $\cos\theta$ の項は消えて角分布は等方的になる．しかし（I）で作られた Λ は通常 z 方向に偏りを持つので，その偏りの大きさを P とすると（(3.31) 参照），Λ の崩壊の角分布は，

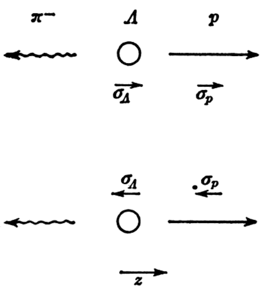
$$dw(\theta)\propto 1-\alpha P\cos\theta,\quad \alpha\equiv 2\mathrm{Re}(c_0{}^*c_1) \tag{12.66}$$

である．角分布を測定し，かつ P の大きさがわかっていれば α が求まる．実験値は，

$$\alpha=-0.62\pm0.05 \tag{12.67}$$

で，$\Lambda\to p+\pi^-$ のパリティ非保存が確かめられた．$\Sigma^+\to p+\pi^0$, $n+\pi^+$; $\Sigma^-\to n+\pi^-$; $\Lambda^0\to n+\pi^0$; $\Xi^-\to\Lambda^0+\pi^-$ 崩壊に対する α もはかられており，$\Sigma^\pm\to n+\pi^\pm\,(\alpha\approx0)$ を除き $\alpha\neq0$ であり，パリティ非保存は弱い相互作用の一般的性質と考えられる．

$\Lambda\to p+\pi^-$ 崩壊で放出される p は，始めの Λ が偏りを持たなくても一般に p の進行方向に偏りを持つ．この事情は偏りを持たぬ素粒子・原子核の β 崩壊ででてくる電子がその進行方向に $-v/c$ の偏りを持つのと似ている．p の放出方向を z 軸にとろう．Λ が偏りを持たぬことは $\sigma_z=\pm1$ の Λ が同数含まれていることを意味する．z 軸方向の角運動量の保存則から Λ が $\sigma_z=\pm1$ を持てば放出される p も $\sigma_z=\pm1$ を持つ．(π^--p 間の軌道角運動量の z 成分は常に 0)．12-11 図に示すような崩壊の確率は (12.65) の2式にそれぞれ $\cos\theta=1$ とおいて得られる．進行方向にスピン成分を持つ p の数を n_+，反対方向にスピンを持つ p の数を n_- とすると，



12-11 図　$\Lambda\to p+\pi^-$ 崩壊における p の偏り．

$$n_\pm\propto 1\mp\alpha. \tag{12.68}$$

したがって，p の進行方向の偏り P は，

$$P=\frac{n_+-n_-}{n_++n_-}=-\alpha \tag{12.69}$$

で，ちょうど $-\alpha$ に等しいことがわかる．α の符号，大きさはいろいろな崩壊で異なり，$\Lambda\to p+\pi^-$ では $\alpha<0$, $\Sigma^+\to p+\pi^0$, $\Xi^-\to\Lambda+\pi^-$ 等では $\alpha>0$ で，P の符号も $\alpha\gtrless0$ に応じて $P\lessgtr0$ である．また崩壊後の粒子の進行方向の偏りの存在は崩壊におけるパリティ非保存の証拠である．

4) $K^+\to 2\pi$, 3π 崩壊におけるパリティ非保存

K^+ 中間子は 12-6 表に見られる種々な崩壊をする．ここでは $K\to 2\pi$, 3π 崩壊を考える．$K\to 2\pi$ では π 中間子のスピン 0 であるから，2π 間の軌道角運動量を L とすると，角運動量保存より K のスピンは L である．また π のパリティは負なので，もしパリティが保存すれば K は $(-1)^2(-1)^L=(-1)^L$ のパリティを持つ．

次に $K\to 3\pi$ を考えよう．

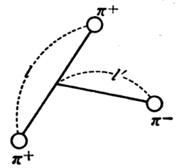
$$K^+\to\pi^++\pi^++\pi^-\ (\tau),$$

$$K^+\to\pi^++\pi^0+\pi^0\ (\tau')$$

の 2 崩壊があり，それぞれ τ, τ' 崩壊といわれる．

12-6 表　K^+ 崩壊の Q 値と崩壊確率 w

	Q(MeV)	w(sec^{-1})
$K^+\to\pi^++\pi^0$	219	17.5×10^6
$\to\mu^++\nu$	388	51.3×10^6
$\to\pi^++\pi^++\pi^-$	75	4.5×10^6
$\to\pi^++\pi^0+\pi^0$	84	1.4×10^6
$\to\pi^0+e^++\nu$	358	3.9×10^6
$\to\pi^0+\mu^++\nu$	253	2.8×10^6



12-12 図　$K^+\to\pi^++\pi^++\pi^-$ 崩壊

$\tau(\tau')$ の同一荷電の π の間の角運動量を l，異荷電の第 3 の π が前の 2 個の π の重心の周りの角運動量を l' としよう (12-12 図)．全角運動量 J は $J=l+l'$, $l+l'-1$, $\cdots$, $|l-l'|$ の値のいずれかをとり，パリティは $(-1)^3(-1)^l(-1)^{l'}=-(-1)^{l+l'}$ となる．(2 個の π^+ 中間子の重心のまわりの全角運動量 J は重心系で K 中間子のスピンに等しい．[問題] 3.6 参照)．12-7 表は K 中間子のいろいろなスピン J, パリティ P の値に対し $K\to 2\pi$, 3π における L, l, l' のとり得る値を示してある．× はもしパリティが保存されれば崩壊が禁止されることを示している．l は同種の π の間の角運動量であり，Bose 統計 (5.21) のため偶数でなければならない．

12-7 表　$\tau(\tau')$ 崩壊，$K\to 2\pi$ 崩壊と K のスピン J, パリティ P. ((0,0), (1,1), 等は (l, l') の値であり，$l, l'\leq 2$ の場合のみ記した)

J, P	2π	3π
(0, +)	$L=0$	×
(0, −)	×	(0,0), (2,2), $\cdots$
(1, +)	×	(0,1), (2,1), $\cdots$
(1, −)	$L=1$	(2,2), $\cdots$
(2, +)	$L=2$	(2,1), $\cdots$
(2, −)	×	(0,2), (2,0), (2,2), $\cdots$

τ 崩壊の Q 値 ~ 75 MeV から予期される放出 π 中間子の運動エネルギーは一個の π 当り平均 ~ 25 MeV で比較的低エネルギーである．$K\to 3\pi$ 崩壊の力の到達距離 R にくらべて放出 π 中間子の波長が長いと考えられるので 232 ページ

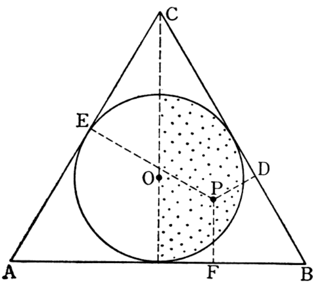
の考察により，角運動量 (l, l') の π 中間子を放出する振幅 M は，

$$M \propto k^l q^{l'}. \tag{12.70}$$

k, q は l, l' に対応する運動の運動量である．したがって，K 中間子のスピン J が与えられたとき 12-7 表の l, l' のできるだけ小さい状態の 3π に崩壊すると考えられる．

(12.70) より $l \neq 0$ のときはエネルギーの高い（k の大きい）π^+ 中間子ほど放出されやすく，$l' \neq 0$ のときは高エネルギーの π^- が放出されやすい．多くの τ 崩壊を調べた結果，$\pi^\pm$ 中間子は低エネルギーから高エネルギーまで一様な頻度で放出され，特に非常に低エネルギー（$\lesssim 1/2$ MeV）の $\pi^\pm$ も観測されており $l = l' = 0$ のことを示している．

τ 崩壊の π^+, π^+, π^- の運動エネルギーを T_1, T_2, T_3 とする．$\Sigma_i T_i = Q$ であるから個々の τ 崩壊で $T_i (i = 1, 2, 3)$ の値は異なってもそれらの和は一定である．正三角形の内の任意の点から三辺への垂線の長さの和は一定で，点の位置によらないので，12-13 図のように正三角形 ABC を作り，τ 崩壊のそれぞれに対し ABC 内の一点 P を対応させることができる．点 P は垂線 PD, PE, PF の長さが T_1, T_2, T_3 に比例するようにえらぶ．運動量保存則より簡単に示しうるように正三角形に内接する円内の点（円周を含む）のみが許される点になる．（ただし，$T_i \ll \mu c^2$ の近似をする．正確には少し歪んだ円となる）．実験結果は円内に一つ一つの τ 崩壊を表わす点が一様に分布しており，$l = l' = 0$ であることを示している．このような図表示を **Dalitz-plot** という．（2個の π^+ は区別できないので2個の π^+ のエネルギーの中で大きなものを T_2 にとり，全円の代りに半円内に plot した．）



12-13 図　$K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ 崩壊の Dalitz-plot
PD の長さ $= T_1/Q$
PE の長さ $= T_2/Q$
PF の長さ $= T_3/Q$
三角形の垂線の長さ $= 1$

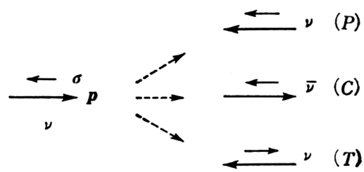
$K^+ \to 3\pi$ 崩壊で $l = l' = 0$ であることは K^+ のスピン $J = 0$ を示している．また $K^+ \to 2\pi$, 3π が共存することは 12-7 表より，K^+ がパリティの異なる2状態に崩壊することを示し，K^+ 崩壊の相互作用はパリティ非保存である．

§ 12.5　時間反転に対する不変性

弱い相互作用では空間反転に対する不変性が破れている．そこで粒子・反粒子反転，時間反転に対する不変性を調べよう．

まず2成分理論で記述される自由なニュートリノを考える．運動量 $\boldsymbol{p}$ の ν は $h = -1$

で $\bar{\nu}$ は $h=+1$ であり (7.81) をみたしている．運動量 $\boldsymbol{p}$ の ν に空間反転 P, 粒子・反粒子反転 C, 時間反転 T を行なうと 12-14 図のようになる．P, C の結果はそれぞれ $h=+1$ の ν, $h=-1$ の $\bar{\nu}$ になり 2成分理論では存在しない状態になる．これに反しTの結果は $h=-1$ の ν で，運動量の向きだけが逆転する．したがって ν が関与する現象では P, C 反転に対する不変性は成立してないが，T反転に対する不変性は成立する可能性がある．



12-14 図 ν に対する P, C, T 反転

この点をさらに調べるために β 崩壊を起こす H(12.32) を調べよう．時間反転により ((7.87) 参照) 種々な演算子は，

$$\psi_n(\boldsymbol{r},t)\to\eta_n U_T\gamma_0\bar{\psi}^T(\boldsymbol{r},-t),\ \bar{\psi}_p(\boldsymbol{r},t)\to-\eta_p{}^*\psi^T(\boldsymbol{r},-t)\gamma_0 U_T$$

のように変換し，さらにいろいろな演算子の順序が逆転する．したがって (153 ページの表参照),

$$\begin{aligned}\psi_p(1+\lambda\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n&\to\varepsilon_\mu\eta_p{}^*\eta_n\bar{\psi}_n(1+\lambda\gamma_5)\gamma_\mu\psi_p,\\ \bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu&\to\varepsilon_\mu\eta_e{}^*\eta_\nu\bar{\psi}_\nu(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_e.\end{aligned}\tag{12.71}$$

(153 ページの表では同一の粒子の $\bar{\psi}$, ψ の積を問題にしているので $\eta^*\eta=1$ の場合にあたる)．これより，

$$\begin{aligned}&\frac{g_{F1}}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_p(1+\lambda\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n\cdot\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu\\ &\qquad\to\frac{g_{F1}}{\sqrt{2}}(\eta_p{}^*\eta_n\eta_e{}^*\eta_\nu)\bar{\psi}_n(1+\lambda\gamma_5)\gamma_\mu\psi_p\cdot\bar{\psi}_\nu(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_e\end{aligned}\tag{12.72}$$

となる．またこのエルミット共役量は，

$$\begin{aligned}&\frac{g_{F1}{}^*}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_n(1+\lambda^*\gamma_5)\gamma_\mu\psi_p\bar{\psi}_\nu(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_e\\ &\qquad\to\frac{g_{F1}{}^*}{\sqrt{2}}(\eta_p\eta_n{}^*\eta_e\eta_\nu{}^*)\bar{\psi}_p(1+\lambda^*\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n\cdot\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu\end{aligned}\tag{12.73}$$

となる．η_n, η_p, $\cdots$ は時間反転の際に ψ_p, ψ_n, $\cdots$ の変換に現われる位相 (η_T) である．もし H が時間反転に対し不変ならば，

$$g_{F1}=g_{F1}{}^*\eta_p\eta_n{}^*\eta_e\eta_\nu{}^*,\quad\lambda=\lambda^*$$

でなければならない．

ところで，たとえば $e^-+p\to\nu+n$ とその時間反転でえられる $\nu+n\to e^-+p$ 過程は異なる過程で相互に干渉することがない．したがって時間反転で現われる位相 $\eta_p{}^*\eta_n\eta_e{}^*\eta_\nu$

は測定できない量で物理的に意味を持たないから，

$$\eta_p{}^*\eta_n\eta_e{}^*\eta_\nu=1 \tag{12.74}$$

ととってもかまわない．このようにとると，時間反転に対する不変性は，

$$g_{F1}=g_{F1}{}^*,\ \ \lambda^*=\lambda. \tag{12.75}$$

すなわち，g_{F1}, λ が実数のことを要求する．

g_{F1} の位相は（位相が $n\pi$, $n=0, \pm 1, \cdots$ ならば g_{F1} は実数）振幅が g_{F1} に比例するある遷移（(12.72) により起こる）と振幅が $g_{F1}{}^*$ に比例する遷移（(12.73) により起こる）との間の干渉を調べればよいが，上に述べたように干渉しうるこのような遷移が存在しないので確かめることができない．しかし λ の位相は $n\to p+e^-+\bar{\nu}$ で核子につきベクトル型の結合で起こる振幅（$\propto g_{F1}$）と疑ベクトル型で起こる振幅（$\propto g_{F1}\lambda$）との干渉をはかって調べることができる．$n\to p+e^-+\bar{\nu}$ の崩壊確率 dw に対して，このような干渉項はパリティ非保存の結果として現われる．

(12.33) は偏りのない中性子が運動量 $\boldsymbol{p}$ の e^-, $\boldsymbol{q}$ の $\bar{\nu}$ を放出する dw であったが，もし中性子が偏りを持つときは，

$$dw=\frac{g_{F1}{}^2}{(2\pi)^5}c^{-5}\hbar^{-7}pE(E_0-E)^2dEd\Omega d\Omega_\nu(1+3|\lambda|^2)$$
$$\times\left\{1+\frac{1-|\lambda|^2}{1+3|\lambda|^2}\frac{c\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{Eq}+A\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E}+B\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}}{q}+C\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}}{Eq}\right\} \tag{12.76}$$

となる．$\boldsymbol{\sigma}$ は中性子の偏りの平均値である．空間反転に対し $\boldsymbol{\sigma}\to\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}\to-\boldsymbol{q}$ で A, B 項はパリティ非保存の部分である．また時間反転に対し $\boldsymbol{\sigma}\to-\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}\to-\boldsymbol{q}$ であるから，C 項は時間反転に対し変る部分で $C\neq 0$ ならば時間反転に対する不変性が破れる．A, B, C は λ の関数で次式で与えられる．

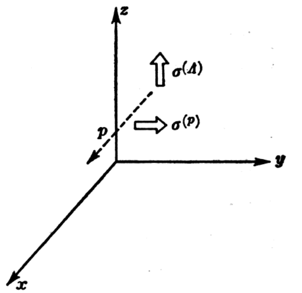
$$A=-\frac{2|\lambda|^2-(\lambda+\lambda^*)}{1+3|\lambda|^2}\quad(=-0.09\pm 0.03),$$
$$B=\frac{2|\lambda|^2+(\lambda+\lambda^*)}{1+3|\lambda|^2}\quad(=0.88\pm 0.15), \tag{12.77}$$
$$C=-\frac{\lambda-\lambda^*}{1+3|\lambda|^2}\quad(=-0.04\pm 0.07).$$

括孤内は測定値である．$C\approx 0$ のことは λ が実数のことを示している．すなわち時間反転に対する不変性が成立しているようにみえる．（$A\approx 0$ は $\lambda\approx 1$ を示している）

次に Λ 崩壊を考えよう．Λ 崩壊の相互作用の T 反転に対する不変性を調べるには偏りを持った Λ の崩壊を調べねばならない．Λ のスピン $\boldsymbol{\sigma}^{(\Lambda)}$, 崩壊後の p のスピン $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}$,

p の運動量 $\boldsymbol{p}$ とすると，崩壊確率で $(\boldsymbol{\sigma}^{(\Lambda)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(p)}\times\boldsymbol{p})$ に比例する項の係数を測定すればよい．この項は時間反転に対し符号を変える項で，もし係数が0でなければ時間反転に対する不変性が破れている．

z 方向に偏った Λ が崩壊し x 方向に p を放出するときの y 方向の p のスピンを測定しよう（12-15図）．(12.63)，(12.64) で $\theta=\pi/2$, $\varphi=0$ とおき $\psi^{\pm}$ 状態での $\sigma_y{}^{(p)}$ の平均値を求めると，



12-15 図　$\Lambda\to p+\pi^-$ 崩壊における時間反転の不変性

$$Y_0(\pi/2,\,0)=\sqrt{\frac{1}{4\pi}},\quad Y_1{}^0(\pi/2,\,0)=0,$$

$$Y_1{}^1(\pi/2,0)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}},\quad Y_1{}^{-1}(\pi/2,0)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}$$

を用い，

$$\langle\sigma_y{}^{(p)}\rangle_\pm=-c_0{}^*c_1\langle u_\pm,\,\sigma_y u_\mp\rangle-c_1{}^*c_0\langle u_\mp,\,\sigma_y u_\pm\rangle$$
$$=\pm i(c_0{}^*c_1-c_1{}^*c_0)=\pm 2\,\mathrm{Im}\,(c_1{}^*c_0)$$

となる．$\mathrm{Im}(c_1{}^*c_0)$ は $c^*{}_1c_0$ の虚数部分である．したがって Λ が z 方向に偏りの大きさ P を持てば，

$$\langle\sigma_y{}^{(p)}\rangle=P\beta,\quad \beta\equiv 2\,\mathrm{Im}(c_1{}^*c_0). \tag{12.78}$$

実験値は，

$$\beta=0.19\pm0.19 \tag{12.79}$$

で，時間反転に対する不変性が成立しているようにみえる．

$\Lambda\to p+\pi^-$ で作られる p, π^- の間には強い相互作用が働く．放出される $p\pi^-$ は中心から遠去かる球面波であるが，この力のために位相の変化をうける．$\Lambda\to p+\pi^-$ と同一のエネルギーの $p\pi^-\to p\pi^-$ 散乱を行なったときの $S_{1/2}$, $P_{1/2}$ 波の phase shift を δ_0, δ_1 とすると，内向き球面波と外向き球面波の間には $2\delta_0$, $2\delta_1$ の位相差を生ずる (9.43)．このうち δ_0, δ_1 は内向き球面波が中心に到達するまでの位相変化，残りの δ_0, δ_1 は外向き球面波が無限遠にいくまでにうける位相変化である．$\Lambda\to p+\pi^-$ では入射（内向き）球面波は存在しないから，外向き球面波の位相 δ_0, δ_1 のみ存在する．この位相を明示すると (12.63) の c_0, c_1 は，

$$c_0\to c_0e^{i\delta_0},\quad c_1\to c_1e^{i\delta_1} \tag{12.80}$$

と書きかえねばならない（問題 9.2 参照)．時間反転では外向き球面波は内向き球面波に変るから（151 ページ参照)，時間反転に対し，

$$p \to -p,\ \sigma^{(\Lambda)} \to -\sigma^{(\Lambda)},\ \sigma^{(p)} \to -\sigma^{(p)},\ \delta_0 \to -\delta_0,\ \delta_1 \to -\delta_1 \qquad (12.81)$$

である．

(12.78) の $\langle \sigma_y{}^{(p)} \rangle$ は (12.80) により，

$$\langle \sigma_y{}^{(p)} \rangle = 2P\mathrm{Im}(c_1{}^* c_0 e^{i(\delta_0-\delta_1)})$$

で，$\langle \sigma_y{}^{(p)} \rangle \approx 0$ より $\mathrm{Im}(c_1{}^* c_0)=0$ は必ずしも結論できない．しかし $\pi^- - p$ 散乱より求めた δ_0, δ_1 の実験値は $\delta_0 \approx \delta_1 \approx 0$ なので，$\Lambda \to p+\pi^-$ 崩壊の場合は $\mathrm{Im}(c_1{}^* c_0) \approx 0$ になる．

§7.5 で相互作用 H がエルミット量であり，かつ Lorentz 変換に対し不変のときは CPT 変換に対し不変であることを示した．素粒子の崩壊を引き起す弱い相互作用は，次に述べる中性K中間子の崩壊の場合を除き T 変換に対し不変のように見える．したがって CPT 不変性より CP 変換（C と P の積の変換）に対して不変のことが結論される．

§ 12.6 中性K中間子

中性 K 中間子 K^0 は電気的には中性であるが strangeness を持ち $S=1$ の素粒子なので，その反粒子 $\bar{K}^0$ は K^0 と異なる粒子で $S=-1$ を持つ（§11.3 参照）．K^0, $\bar{K}^0$ が物質中を通過して物質中の核子と相互作用するようすは S の相違により非常に異なっている．すなわち，

$$\bar{K}^0+p \to \bar{K}^0+p,\ \pi^+ + \Lambda,\ \pi^{+,0}+\Sigma^{0,+},\ K^+ + \Xi^0,\ \cdots$$

等，$\bar{K}^0$ に対しては弾性散乱の他にハイパロンの発生が起こるが，K^0 に対しては，

$$K^0+p \to K^0+p,\ K^+ + n,\ \cdots$$

等の弾性散乱または荷電交換の散乱は起こるが，S の保存則のため $K^0+p \to \pi^{+,0}+\Sigma^{0,+}$ 等は禁止される．

しかし自由な K^0 中間子の質量・スピン等は自由な $\bar{K}^0$ 中間子とまったく同じで S の相異を除いては二つの縮退した状態である．強い相互作用，または電磁的相互作用により K^0, $\bar{K}^0$ は次のような遷移を起こし（エネルギーが保存されないので仮想的遷移である），

$$K^0 \to n+\bar{\Lambda},\ p+\Sigma^+,\ K^0+\pi^+ + \pi^-,\ \cdots$$

$$\bar{K}^0 \to \bar{n}+\Lambda,\ \bar{p}+\Sigma^+,\ \bar{K}^0+\pi^- + \pi^+,\ \cdots.$$

このため K^0, $\bar{K}^0$ は構造を持ってくるが，これらを起こす相互作用が C 不変のために，このように構造を持った K^0, $\bar{K}^0$ も相互に粒子・反粒子の関係にあり C 反転で互に移り変る．したがって K^0, $\bar{K}^0$ の質量をはじめその構造は等しいと考えられる．

中性 K 中間子は弱い相互作用により崩壊し，

中性K中間子 $\to \pi^+ + \pi^-,\ 2\pi^0,\ \pi^+ + \pi^- + \pi^0,\ 3\pi^0,\ \pi^\pm + \mu^\mp + \nu_\mu,\ \pi^\pm + e^\mp + \nu_e,\ \cdots$

:の崩壊を起こす.

この弱い相互作用は C 不変でなく，むしろ C，P 反転は定義されないで CP 反転 $=T$ 反転）のみが意味を持ちうる．この事情がいかに中性 K 中間子の問題にはねかえ かをしらべよう.

自由な中性 K 中間子に働く力は強い相互作用 H_S，電磁的相互作用 H_e，弱い相互作用 $_W$ であるが，H_W まで考えると保存量は荷電 Q・重粒子数・軽粒子数等で S は保存 れない．また C，P それぞれの不変性は成立していない．もし H_W が CP 変換に対 不変とすると，

$$H = H_S + H_e + H_W \tag{12.82}$$

$$[H, S] \neq 0, \ (CP)^{-1}H(CP) = H \quad \text{すなわち} \quad [H, CP] = 0 \tag{12.83}$$

:なっている.

$\bar{K}^0$ を K^0 に C 反転をしてえられる粒子と考える代りに CP 反転して得られる粒子と ;えよう.

$$|\bar{K}^0\rangle = CP|K^0\rangle. \tag{12.84}$$

CP 反転に対する固有状態は，Q が一定（$=0$）で S が一定でない状態，

$$\begin{aligned} |K_1{}^0\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \\ |K_2{}^0\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \end{aligned} \tag{12.85}$$

，(12.84) より明らかなように，

$$CP|K_1{}^0\rangle = |K_1{}^0\rangle, \ CP|K_2{}^0\rangle = -|K_2{}^0\rangle. \tag{12.86}$$

なわち $K_1{}^0$，$K_2{}^0$ は CP に対し ± 1 の固有値を持つ固有状態である.

$K_1{}^0$，$K_2{}^0$ における K^0，$\bar{K}^0$ の混り方の位相（0および π）は K^0 部分と $\bar{K}^0$ 部分の 渉の効果が存在するときのみ物理的な意味を持ってくる．H_S，H_e は S を保存し，^{0}，$\bar{K}^0$ は S の値が異なるので H_S，H_e は $K_1{}^0$，$K_2{}^0$ 状態を区別することができない． かし H_W まで考えると S の保存が破れ次のような崩壊が起こり，

$$K^0 \to \pi^+ + \pi^-, \ \pi^+ + e^- + \bar{\nu}, \ \pi^- + e^+ + \nu, \ \cdots \ (\Delta S = -1) \qquad \text{a)}$$

$$\bar{K}^0 \to \pi^+ + \pi^-, \ \pi^+ + e^- + \bar{\nu}, \ \pi^- + e^+ + \nu, \ \cdots \ (\Delta S = +1), \qquad \text{b)}$$

^{0}，$\bar{K}^0$ は同一状態に崩壊しうるので，K^0，$\bar{K}^0$ の間の位相が物理的意味を持ち $K_1{}^0$，$K_2{}^0$ 区別できる.

a)，b) の崩壊は相互にエルミット共役な相互作用でひき起こされる（H がエルミット

であるから). したがって崩壊の振幅は次のように書ける.

$K^0 \to \pi^+ + \pi^-$	$f_{2\pi} e^{i\delta}$	$\bar{K}^0 \to \pi^+ + \pi^-$	$f_{2\pi}^* e^{i\delta}$
$\pi^+ + e^- + \bar{\nu}$	f_e	$\pi^- + e^+ + \nu$	f_e^*
$\pi^- + e^+ + \nu$	g_e	$\pi^+ + e^- + \bar{\nu}$	g_e^*
$\cdots\cdot$		$\cdots\cdot$	

$K^0 \to 2\pi$ では $\pi^+\pi^-$ 間に強い相互作用が働くので，この相互作用による位相 δ をとりして書いた. δ は K^0 に相当する全エネルギーで $\pi^+\pi^-$ 散乱を行なったときの $l=0$ の phase shift である. もし時間反転に対する不変性が成立すれば (12.75) と同様 $f_{2\pi}$, f_e, g_e 等は実数になる.

$$f_{2\pi} = f_{2\pi}^*, \quad f_e = f_e^*, \quad g_e = g_e^*, \quad \cdots\cdot \tag{12.87}$$

(12.85), (12.87) より $K_1{}^0$, $K_2{}^0$ 崩壊の振幅は,

$K_1{}^0 \to \pi^+ + \pi^-$	$\sqrt{2} f_{2\pi} e^{i\delta}$	$K_2{}^0 \to \pi^+ + \pi^-$	0
$\to \pi^+ + e^- + \bar{\nu}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(f_e + g_e)$	$\to \pi^+ + e^- + \bar{\nu}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(f_e - g_e)$
$\to \pi^- + e^+ + \nu$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(f_e + g_e)$	$\to \pi^- + e^+ + \nu$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(g_e - f_e)$

となる. したがって CP 不変性の仮定から得られる結論は,

1) $K_2{}^0 \to 2\pi$ の禁止

2) $w(K_1{}^0 \to \pi^+ + e^- + \bar{\nu}) = w(K_1{}^0 \to \pi^- + e^+ + \nu)$,

$w(K_2{}^0 \to \pi^+ + e^- + \bar{\nu}) = w(K_2{}^0 \to \pi^- + e^+ + \nu)$

である. これらの関係は大体成立しているが，最近になって僅かな破れが実験的に確められた.

$$\frac{\omega(K_2{}^0 \to \pi^+ + \pi^-)}{\omega(K_1{}^0 \to \pi^+ + \pi^-)} = |\eta_{+-}|^2, \qquad |\eta_{+-}| = (1.92 \pm 0.04) \times 10^{-3}$$

$$\frac{\omega(K_2{}^0 \to \pi^- + e^+ + \nu) - \omega(K_2{}^0 \to \pi^+ + e^- + \bar{\nu})}{\omega(K_2{}^6 \to \pi^- + e^+ + \nu) + \omega(K_2{}^0 \to \pi^+ + e^- + \bar{\nu})} = (2.16 \pm 0.4) \times 10^{-3}$$

このことは, (12.85) 式が成立しない ($K^0_{1,2}$ が CP 反転の固有状態でない) こと及(又は) (12.87) 式の成立しないことを意味しており, CP 不変性が僅かながら破れてる. CPT 不変性より T 不変性もしたがって破れている.

$K_1{}^0$, $K_2{}^0$ の主な崩壊の種類，それぞれの確率は $K_1{}^0$ と $K_2{}^0$ で異なるのでしたがっ寿命も異なる.

$$\begin{aligned} \tau_{K_1{}^0} &= 0.86 \times 10^{-10}\text{sec}, \\ \tau_{K_2{}^0} &= 5.3 \times 10^{-8}\text{sec}. \end{aligned} \tag{12.88}$$

また K_1^0, K_2^0 は強い相互作用のため構造を持つと同時に，弱い相互作用による構造を持つ．すなわち，

$$K_1^0 \to 2\pi,\ \ \pi e\nu,\ \ \pi\mu\nu,\ \ \cdots \to K_1^0,$$
$$K_2^0 \to 3\pi,\ \ \pi e\nu,\ \ \pi\mu\nu,\ \ \cdots \to K_2^0$$

等の仮想的遷移を起こす．電子・陽子等が光子の仮想的放出・吸収により電磁的質量を持ったように，弱い相互作用によるこのような K 中間子の遷移は K 中間子の質量を変える．K_1, K_2 でこのようすが異なるので小さな質量差を生ずる．遷移の振幅は弱い相互作用の平方に比例するので，質量差 Δmc^2 は次元解析より次の程度と考えられる．

$$|\Delta mc^2| \approx m_K c^2 \frac{g^2}{4\pi} \approx 500\ \mathrm{MeV} \times 10^{-14} \approx 5 \times 10^{-6}\ \mathrm{eV}. \tag{12.89}$$

強い相互作用による同様な変化は K_1^0, K_2^0 に共通で質量差を与えない．実験値は，

$$|\Delta mc^2| \equiv |(m_{K_1} - m_{K_2})c^2| \approx \frac{\hbar}{\tau_1} = 6.6 \times 10^{-6}\ \mathrm{eV} \tag{12.90}$$

で，g^2 に比例する小さな質量差の存在が確められている．

K_1^0, K_2^0 の寿命の相違，質量差の存在は極めて興味ある現象をひき起こす．CP 不変性の破れは小さいので以下（12.85）が近似的に成立するとして話を進める．たとえば $\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0$ で作られた K^0 が自由に運動していく場合を考える．S の保存より作られた中性中間子は $K^0(S=+1)$ で，（12.85）より，

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle). \tag{12.91}$$

K_1^0, K_2^0 の重なった状態である．いま運動量 $\boldsymbol{p}$ の K^0 が原点（$t=0$, $\boldsymbol{r}=0$）で作られたとすると，時間がたつにつれて（12.91）の状態は次のように変化する．

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{pr} \left\{ \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_1 - \frac{1}{2\gamma\tau_1} \right)t |K_1^0\rangle + \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_2 - \frac{1}{2\gamma\tau_2} \right)t |K_2^0\rangle \right\}. \tag{12.92}$$

γ は寿命の延びを表わす Lorentz 因子，E_1, E_2 は K_1^0, K_2^0 のエネルギーで，

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \sqrt{c^2p^2 + m_1^2c^4} - \sqrt{c^2p^2 + m_2^2c^4} \approx \frac{m_1^2 - m_2^2}{2E} c^4 \tag{12.93}$$

であり，時間がたつにつれ $\Delta E \neq 0$ のため K_1^0, K_2^0 の間の位相が変化する．また K_1^0, K_2^0 の寿命が異なるため，初めは K_1^0, K_2^0 が同じ割合で含まれているが，t が増すと共に K_1^0 の方が急激に減少し $\tau_1 \ll t \ll \tau_2$ の時刻 t ではほとんど K_2^0 のみになり，さらに時間がたち $t \gg \tau_2$ になると K はすべて崩壊する．

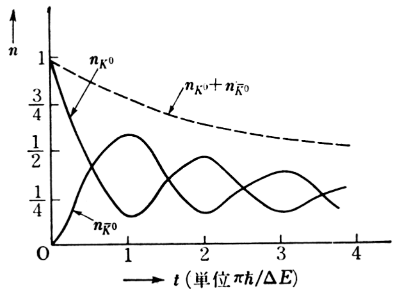
この K_1^0, K_2^0 の間の位相変化，数の変化は $K^0 \to \bar{K}^0(\Delta S = -2)$ 遷移が起こったと

も解釈される．すなわち (12.92) に (12.85) を代入すると，

$$\psi=\exp\frac{i}{\hbar}pr\left[\frac{1}{2}\left\{\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_1-\frac{1}{2\gamma\tau_1}\right)t+\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_2-\frac{1}{2\gamma\tau_2}\right)t\right\}|K^0\rangle\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left\{\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_1-\frac{1}{2\gamma\tau_1}\right)t-\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_2-\frac{1}{2\gamma\tau_2}\right)t\right\}|\bar{K}^0\rangle\right]$$

となり，K^0, $\bar{K}^0$ の数は，

$$n_{K^0}=\frac{1}{4}\left[e^{-\frac{t}{\gamma\tau_1}}+e^{-\frac{t}{\gamma\tau_2}}+2\cos\left(\frac{\Delta E}{\hbar}t\right)e^{-\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)\frac{t}{2\gamma}}\right],$$
$$n_{\bar{K}^0}=\frac{1}{4}\left[e^{-\frac{t}{\gamma\tau_1}}+e^{-\frac{t}{\gamma\tau_2}}-2\cos\left(\frac{\Delta E}{\hbar}t\right)e^{-\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)\frac{t}{2\gamma}}\right] \tag{12.94}$$



12-16 図　K^0, $\bar{K}^0$ 粒子数の時間変化

となる (12-16 図)．したがって初めに K^0 が作られても時間がたつにつれ $\bar{K}^0$ の数がふえ $\cos(\Delta Et/\hbar)\approx-1$ では $\bar{K}^0$ の数が非常に多くなる．K^0 中間子が物質中を走るとき，上の事情で $K^0\to\bar{K}^0$ 変換が起こり $\bar{K}^0+p\to\pi^++\Lambda^0$ 等によるハイパロンの発生がみられる．

§ 12.7　μ 中間子とニュートリノ (ν_μ)

μ 中間子はスピン 1/2，質量 $\approx$ 106 MeV の Fermi 粒子である．電子・ニュートリノと同様に他の粒子との間に強い相互作用は持たないので軽粒子にぞくする．荷電は $\pm e$ ($\mu^\pm$) で μ^- と μ^+ は相互に反粒子の関係にある．ここでは μ^- を粒子と考え μ^+ を反粒子とよぶ (156 ページ参照)．

μ 中間子は次のように極めて電子と類似の性質を持っている．

1)　スピン 1/2 の Fermi 粒子．

2)　荷電は実験誤差内で電子と同一の値を持つ．

$$e_\mu/e_e=1.00002\pm0.00004. \tag{12.95}$$

μ^- の荷電は $\mu^-\to e^-+\bar{\nu}_e+\nu_\mu$ 崩壊に荷電の保存則を適用し，ν_e, ν_μ が電気的に中性のことを用いると e^- の荷電と等しくなければならない．しかしこれは § 8.1で論じた第一種の荷電量についてであり，光子との相互作用の強さを示す e_μ (第2種の荷電) が電子の $e(e_e)$ に等しいことは，陽子の荷電 e_p に対し $e_p=-e_e$ が成立したと同様に極め

ていちじるしい実験事実である．

3）　磁気能率が電子と同様に $-e\hbar/2m_\mu c$ である．これは μ 中間子と光子との相互作用が minimal な相互作用として記述されることを示している．

より精密な実験結果は電子も μ 中間子もその磁気能率は Bohr 磁子単位より僅かのずれがあり，

$$\mu_\mu = -\frac{e\hbar}{2m_\mu c}(1.001162 \pm 0.00005),$$
$$\mu_e = -\frac{e\hbar}{2m_e c}(1.0011596 \pm 0.00001). \tag{12.96}$$

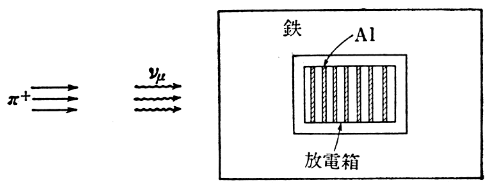
1からのずれは異常磁気能率で，これは (8.21) の Pauli 近似をよりよい近似に高め，e, μ と光子との相互作用により $e \to e + \gamma$, $\mu \to \mu + \gamma$ 等が起こり e, μ が構造を持つことを考慮すると得られる．

4）　μ 中間子は電子と異なり不安定で $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ 崩壊を行なう．その寿命は

$$\tau = (2.1983 \pm 0.0008) \times 10^{-6}\,\mathrm{sec} \tag{12.97}$$

である．しかしこの崩壊を起こす相互作用は β 崩壊 ($n \to p + e^- + \bar{\nu}$) の相互作用と極めて類似しており (12.36) に見られる普偏性がある．すなわち，いずれの相互作用も $V-A$ 型で，その $\mu \to \nu$, $e \to \nu$ の流れの強さも同一である (12.48).

以上でみたように，μ 中間子と電子はその質量がいちじるしく異なるにもかかわらず，あらゆる点で共通の性質を持っている．次に，これまで電子と対になるニュートリノを ν_e, μ 中間子と対になるニュートリノを ν_μ と書いて区別してきたが，ν_e, ν_μ が同一の粒子であるかあるいは異なる粒子であるかを調べる．ニュートリノはいずれにしても強い相互作用・電磁的相互作用を持たず物質中を自由に通過し，ごくまれに弱い相互作用を通じてのみ物質と相互作用するので，ν_e, ν_μ の区別をつけるのは極めて困難なことであった．



12－17 図　$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$, $\nu_\mu + $"$n$"$ \to \mu^- + p$, $e^- + p$,

12－17 図で示すように多数の高エネルギー π^+ 中間子を用意し，π^+ の崩壊 $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ で作られた ν_μ を物質（たとえば Al）にあててみる．Al は放電箱の中に入れてあり，ν_μ の起こす種々の反応を目で見ることができる．また放電箱は非常に厚い鉄の壁で外部から遮蔽し，外からニュートリノ以外の粒子が入りこまぬようにしてある．

$$\nu_\mu + \text{“}n\text{”} \to e^- + p,\ e^- + n + \pi^+,\ \cdots \tag{A}$$

$$\to \mu^- + p,\ \mu^- + n + \pi^+, \cdots \tag{B}$$

等の転換が実際に起こるかどうかを調べた結果（“n”は Al の原子核を作る中性子）（B）の諸反応は存在が認められたが（A）の諸反応の存在は認められなかった．

さて中性子の β 崩壊（$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$）を起こす相互作用 (12.32) は § 12.1 で述べたように同時に $\nu_e + n \to p + e^-$ 衝突をひき起こす．また μ^- の陽子による捕獲（$\mu^- + p \to n + \nu_\mu$）を起こす相互作用はその逆過程 $\nu_\mu + n \to \mu + p$ をひき起こす．もし ν_e と ν_μ とが同一の粒子であれば n の β 崩壊，μ^- の p 捕獲の存在より（A），（B）反応の両方がおこらねばならない．$\nu_\mu + n \to \mu^- + p$, $e^- + p$ はその Q 値が異なるが，ν_μ のエネルギーが μ 中間子の質量にくらべて大きければ，$g_{F_1} = g_{F_3}$ より（12.45 参照）これら二つの反応は大体同じ頻度で起こる．したがって実験結果は ν_e と ν_μ が異種のニュートリノで $\nu_\mu \to e^-$ の変換は起こらないかまたは $\nu_\mu \to \mu^-$ 変換にくらべて小さいことを示している．ν_e を**電子ニュートリノ**，ν_μ を **μ ニュートリノ**とよぼう．

ν_μ は ν_e と異なることがわかったので，ν_μ の質量・スピン等は ν_e のそれとは別にきめなければならない．

1）ν_μ の質量

$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ で作られる μ^+ の運動量と π^+, μ^* の質量から ν_μ の質量の上限は，

$$m\nu \lesssim 1.6\ \text{MeV} \tag{12.98}$$

で，ν_e の質量にくらべてその上限ははるかに大きい．しかし $m_\nu \neq 0$ である実験的根拠は一つもないので，その質量は ν_e と同じく 0 と考えられている．

2）ν_μ のスピン・偏り

ν_μ の質量が 0 であると，ν_μ のスピンの値（1/2, 3/2, $\cdots$）にかかわらず 2 成分理論が成立しうる．145 ページで論じたように，質量 0 の粒子のヘリシティは回転，Lorentz 変換に対して不変なので，スピン S の ν_μ は $S_z = +S$ または $-S$ の状態にのみ存在し，$\bar{\nu}_\mu$ は $S_z = -S$ または $+S$ の状態にのみ存在しうる（z は ν_μ の進行方向）．静止した $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ 崩壊で放出された μ^+ のスピンは測定の結果左巻きで（$h = -1$），角運動量の保存則より ν_μ も左巻き，$S_z = -1/2$ でなければならない．したがって ν_μ が 2 成分理論で記述されるなら $S = 1/2$，左巻きの粒子であることがわかる．

$\pi \to \mu + \nu$ 崩壊と $\pi \to e + \nu$ 崩壊とを比較すると，後者の Q 値が大きいにもかかわらず $\pi \to e + \nu$ 崩壊はほとんど観測されず，

$$\frac{w(\pi^+ \to e^+ + \nu_e)}{w(\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)} = (1.23 \pm 0.02) \times 10^{-4} \tag{12.99}$$

である．

ν_e, ν_μ が共に左巻きのスピン 1/2 粒子であるから，$V-A$ 理論によれば $\pi\to\mu+\nu$, $\pi\to e+\nu$ 崩壊の相互作用は，

$$H=g\partial_\mu\phi\{\bar{\psi}_\nu(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_e+\bar{\psi}_\nu(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\mu\}+\text{エルミット共役量} \tag{12.100}$$

と書ける．g は結合定数で（12.48）より二つの崩壊に対し共通と考えられる．$\pi\to\mu+\nu$, $e+\nu$ における終状態の状態密度は，

$$\rho\propto\int p^2dp\delta(W-\mu c^2). \tag{12.101}$$

p は μ, ν（または e, ν）の運動量の大きさ，W は全エネルギー，

$$W=\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}+cp \tag{12.102}$$

である．μ は π 中間子の質量，m は μ 中間子（または 電子）の質量．(12.102),(12.101) より，

$$\rho\propto\left(p^2\frac{dp}{dW}\right)_{W=\mu c^2}=\frac{(\mu^2-m^2)^2(\mu^2+m^2)c}{8\mu^4}$$

である．また遷移行列の平方は μ 中間子（または電子）のエネルギーを E とすると（12.2 参照)，

$$N^2\left(1-\frac{cp}{E+mc^2}\right)^2=\frac{(\mu+m)^2}{\mu^2+m^2}\cdot\left(\frac{2m}{\mu+m}\right)^2=\frac{4m^2}{\mu^2+m^2}$$

に比例する．したがって，

$$\frac{w(\pi^+\to e^++\nu)}{w(\pi^+\to\mu^++\nu')}=\frac{[(\mu^2-m^2)^2m^2]_e}{[(\mu^2-m^2)^2m^2]_\mu}\approx\frac{1}{8000} \tag{12.103}$$

となり，実験値（12.99）と一致している．これは（$\mu\to\nu_\mu$)，（$e_\mu\to\nu_e$）の流れの強さが等しいことを示している．

3）荷　電

12－17 図の実験では多数の ν_μ が放電箱の中を走っている．これらがもし荷電を持てば $\nu_\mu+$“n”$\to\mu^-+p$ 等により荷電粒子を作らなくても ν_μ 自身の荷電によるイオン化が認められるはずである．このようにして決めた ν_μ の荷電の上限は，

$$|e_\nu|\lesssim10^{-5}e \tag{12.104}$$

であり，通常 $\nu_\mu(\nu_e)$ は荷電を持たないと考えられる．

[軽粒子数の保存則と μ 粒子数，e 粒子数]

ν_e, ν_μ は荷電・strangeness 等を持たないので，それらの反粒子 $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$ とは極めて類似している．ただこれらは 2 成分理論で記述されるので，一方が左巻きならば他方は右巻

きでそのヘリシティの符号が異なる.

一方, § 8.1 で論じたように軽粒子の定義には任意性があり, 通常 e^- の軽粒子数を $+1$ と定義する. 軽粒子数の保存則を $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ に適用すると, 作られた $\bar{\nu}_e$ の軽粒子数は -1 でこれを**反ニュートリノ** ($\bar{\nu}_e$) とよぶことにする. したがって ν_e は $+1$ の軽粒子数を持つ. Eu^{152} の β 崩壊で作られる ν_e は $h = -1$ であることから, 上のように決めた ν_e は -1, $\bar{\nu}_e$ は $+1$ のヘリシティを持ち, ヘリシティによりニュートリノと反ニュートリノを区別しうる.

e^- と同様に弱い相互作用で放出される軽粒子の内で, その速度が光速度に近いとき $h = -1$ のものを $n_L = +1$ の粒子と一応考えると μ^-, ν_μ は $n_L = +1$, それらの反粒子 μ^+, $\bar{\nu}_\mu$ は $n_L = -1$ となる. $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$, $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ 等の諸反応で軽粒子数は保存している.

(e^-, ν_e) と (μ^-, ν_μ) は極めて類似の性質を示すが, 高エネルギー ν の実験からわかったように $\nu_\mu \to e^-$ の遷移は $\nu_\mu \to \mu^-$ にくらべて小さいか禁止されているようにみえる. また ν_μ の源である π^+ の中には K^+ が混っており, $K^+ \to \mu^+ + \nu$ で作られる ν も $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ で作られる ν_μ に混っている. もし K^+ 崩壊でできる ν が実際には ν_e であったり, または ν_e と ν_μ の混ったものとすると, $\nu +$ "n" $\to e^- + p$ による e^- 生成が起こる. したがって e^- が作られることが観測されれば, i) $\mu^- \to \nu_e (K^+ \to \mu^+ + \nu_e)$ 転移がおきているか ii) $\nu_\mu \to e^-$ 転移がおきていることになる. $e^- \leftrightarrow \nu_e$, $\mu^- \leftrightarrow \nu_\mu$ 転移の強さ g_e, $g_\mu (g_e \approx g_\mu)$ に対してこれらの転移の強さの上限は約 g_e の $\sim 1/10$ 程度と考えられる.

もし $e^- \leftrightarrow \nu_\mu$, $\mu^- \leftrightarrow \nu_e$ 転移が弱い相互作用でもおきなければ, 単に軽粒子数が保存されるのみでなく, (e^-, ν_e) の数, (μ^-, ν_μ) の数が別々に保存される. これらはそれぞれ e 粒子数, μ 粒子数ともよぶべきものである (12-8 表).

12-8 表 e, μ 粒子数

	e 粒子数	μ 粒子数
e^-	$+1$	0
ν_e	$+1$	0
μ^-	0	$+1$
ν_μ	0	$+1$

弱い相互作用に現われる軽粒子の流れは $e^- \leftrightarrow \nu$, $\mu^- \leftrightarrow \nu$ 等つねに荷電の変化が $\Delta Q = \pm 1$ である. $\Delta Q = 0$ の電気的に中性の流れ, $e^- \leftrightarrow e^-$, $\mu^- \leftrightarrow \mu^-$, $\nu_e \leftrightarrow \nu_e$, $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\mu$ 等は, K^0 が $\mu^- + \mu^+$, $\nu + \bar{\nu}$ にはこわれないことから, 存在しないと考えられる. $J_\mu^{(e)+} J_\mu^{(e)}$ の形の相互作用の存在は $\nu + e^- \to \nu + e^-$ 散乱等を調べればわかる. $\nu + e^-$ 散乱, $\nu + n \to$

$e^- + p$ 等の散乱の断面積は E_c^2 に比例する．E_c は重心系での ν のエネルギーで実験室系での ν エネルギー E_L と E_c の関係は，

$$E_c = \sqrt{E_L mc^2/2} \tag{12.105}$$

である．m は $\nu + e^-$ 散乱では電子の質量，$\nu + n$ 散乱では核子の質量である．したがって同一の E_L の ν による実験で，($J_\mu{}^{(e)\dagger}J_\mu{}^{(e)}$ 相互作用の強さを g_0 とする)

$$\frac{\sigma(\nu + e^- \to \nu + e^-)}{\sigma(\nu + n \to e^- + p)} \approx \left(\frac{m_e}{m_N}\right)\frac{g_0{}^2}{g_{F_1}{}^2} \approx \frac{1}{2000}\frac{g_0{}^2}{g_{F_1}{}^2} \tag{12.106}$$

で，結合の強さが同じでも実験的に $\nu + e$ 散乱を測定することは極めて困難であり，その存在についてははっきりわかっていない．

μ 粒子数，e 粒子数の保存の成り立つ例として，$\mu^\pm \to e^\pm + \gamma$ の崩壊は起こらないか，極めて小さい崩壊確率を持つことが知られている．

$$\frac{w(\mu \to e + \gamma)}{w(\mu \to e + \nu + \bar{\nu})} \lesssim 10^{-8}. \tag{12.107}$$

§ 12.8 W 中間子

Fermi 型の弱い相互作用は，結合の大きさの普遍性を考えると，

$$H = J_\mu{}^\dagger J_\mu \tag{12.108}$$

という形に書くことができる，J_μ は弱い相互作用のベクトル流で，

$$J_\mu = J_\mu{}^{(e)} + J_\mu{}^{(\mu)} + J_\mu{}^{(0)} + J_\mu{}^{(+)}$$

と書ける．$J^{(e)}$ は電子が ν_e に，$J^{(\mu)}$ は μ 中間子が ν_μ にかわる流れであり，$J^{(0)}$ は強い相互作用をする粒子の流れで $\Delta S = 0$ のもの，$J^{(+)}$ は同じく $\Delta S = 1$ のものである．

荷電粒子間の力は光子が粒子間で交換されることにより媒介され，核力すなわち重粒子間の強い相互作用は π，K 中間子等の交換により生ずる．この考えをおし進めると，(12.36) の力もある粒子が流れの間を交換することにより生ずるのではないかと思われる．この粒子を **W 中間子** という．これがもし存在すれば，それはスピン 1 のベクトル粒子で，種々の粒子の J_μ と湯川型の相互作用をしていると考えられる．これは光子の場 A_μ と電流との相互作用 (9.91) と似ているが，W 中間子の場合はパリティが保存されない点が違っている．J_μ (12.43) が $\Delta Q = +1$ であることから W 中間子は荷電粒子であり，荷電 $\pm e$ を持つ $W^\pm$ がなければならない．中性の W^0 は (12.36) には必要ではなく，存在すべきかどうかは $W^\pm$ の存在にくらべればあいまいであるが，いろいろの理論的考察から存在することも予想され，その反粒子 $\overline{W^0}$ は中性 K 中間子の場合と同様に W^0 とは異なるものと考えられる．

このような W 中間子を探す努力が続けられているが現在のところ発見されていない．存在するにしてもその質量が重く（$\gtrsim 2\,\mathrm{GeV}$）て作り難く，また Λ, K 粒子等にくらべれば非常に短い寿命（$\lesssim 10^{-17}\,\mathrm{sec}$）で崩壊するので検出し難いと思われる，重い W 中間子によって媒介される粒子間の弱い相互作用はその到達距離が短かく，これから導かれる Fermi 型の相互作用は (12.36) とほとんど変らない．すなわち (12.36) は二つのベクトル流が時空の同一点に重なるときにのみ値を持つが，W 中間子を媒介にするときは，これが $\lesssim \hbar/m_W c$（m_W は W 中間子の質量）の程度離れていても力をおよぼし合うことになる．現在のところ W は存在しても非常に重いので，この拡りの影響は今まで考えてきた諸問題では省略できると考えられる．

〔問題 12.1〕 Eu^{152} の準安定状態 (0, −) の K 電子捕獲により作られた反跳 Sm^{152} (1, −) は γ 線を放出して Sm^{152}(0, +) になる．この γ 線を Sm^{152}(0, +) 中を通過させるとき，γ 線が Sm^{152}(1, −) の反跳方向に放出されるときに最も強く共鳴散乱をうけることを示せ．

〔問題 12.2〕 偏りのない中性子が β 崩壊（$n \to p + e^- + \bar{\nu}$）して運動量 p・エネルギー E の電子と運動量 q の $\bar{\nu}$ を放出する確率は (12.33) で与えられることを示せ．β 崩壊の相互作用は (9.138) で与えられるとせよ．

〔問題 12.3〕 偏りのない中性子の β 崩壊の全確率を (12.33) を用いて求めよ．

$$\frac{1}{\tau} = \frac{m_e{}^5 c^4 g_{F_1}{}^2}{2\pi^3 \hbar^7}(1 + 3|\lambda|^2) f(1,\ E_0).$$

〔問題 12.4〕 ベクトル流の保存則から要求される $\Delta Q = +1$ の核子流・π 中間子流は荷電スピン演算子を使うと次のように書けることを示せ．

$$J_\mu = g\left\{\bar{\psi}\tau_+\gamma_\mu\psi - \frac{2}{c\hbar}[\boldsymbol{\phi} \times \partial_\mu \boldsymbol{\phi}]_+\right\}.$$

$\boldsymbol{\phi}$ は π 中間子場で荷電スピン 1 に対応する荷電空間のベクトルである．同様に核子・π 中間子の作る通常の電流は，

$$J_\mu = ec\left\{\bar{\psi}\frac{1+\tau_3}{2}\gamma_\mu\psi - \frac{1}{c\hbar}[\boldsymbol{\phi} \times \partial_\mu \boldsymbol{\phi}]_3\right\}$$

となることを示せ．

〔問題 12.5〕 Σ 崩壊に $\Delta I = 1/2$ 法則を適用すると，$\Sigma^+ \to n + \pi^+$, $\Sigma^+ \to p + \pi^0$, $\Sigma^- \to n + \pi^-$ の振幅をそれぞれ f_+, f_0, f_- と書くと次の関係があることを示せ．

$$-\sqrt{2} f_0 + f_+ = f_-.$$

〔問題 12.6〕 完全に偏った Λ 粒子が崩壊して偏りの方向に対し角度 θ の方向に陽子を放出するとき，Λ のスピンと陽子の運動量の作る面に垂直な方向の陽子のスピンの偏り $\langle\sigma_\perp\rangle$ は次式で与えられることを示せ．

$$\langle\sigma_\perp\rangle = -\beta\frac{\sin\theta}{1 - \alpha\cos\theta}.$$

α, β はそれぞれ (12.65), (12.78) で与えられる.

〔問 題 12.7〕 K^0 中間子がある物質の中を l cm 通過した後に, 初めの K^0 と同方向に同じ運動量で進む $K_1{}^0$, $K_2{}^0$ 中間子の数, および K^0, $\bar{K}^0$ 中間子の数を求めよ. ただし $K_1{}^0$, $K_2{}^0$ の寿命を τ_1; τ_2; K^0, $\bar{K}^0$ と原子との前方散乱振幅を f, $\bar{f}$, 物質の密度 ρ, 原子番号 A とせよ.

〔問 題 12.8〕 $\nu+e^-\rightarrow\nu+e^-$ 散乱の全断面積 σ を求め, σ が E^2 に比例することを示せ. E は重心系での ν エネルギー. 相互作用の Hamiltonian は,

$$H=\frac{g_F}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu\bar{\psi}_\nu(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_e$$

で与えられるとせよ.

第13章　古典物理学から素粒子物理学まで

多数の素粒子の発見と素粒子相互間の衝突・転換等の実験の蓄積の結果，素粒子の性質もしだいに明らかになり，またその運動を支配する運動法則や素粒子世界に存在する種々の対称性もだんだんにわかってきた．この章では古典物理学の諸概念・運動法則がどのように変化して素粒子世界に持ちこまれたかをふりかえり，今後の問題点を論じよう．

Newton 力学では対象とすべき物体が与えられ，これがいろいろな力の下で運動する運動法則が論ぜられた．素粒子物理学でも素粒子の存在と，それらのしたがう運動法則の追求がわれわれの当面の問題であり，素粒子が古典的物体の構成要素であることから当然予想されるように，そこには古典物理学における小物体の運動と多くの類似性が認められる．反面，素粒子は量子力学，相対性理論の法則にしたがい，素粒子物理学で明らかにされてきたいろいろの新しい事実を考えると，古典的なアトムという概念とは非常に異なる面もみられた．

素粒子が相互作用をうけないときには（自由粒子），その状態は質量・運動量・スピンおよび荷電・strangeness 等を与えることにより指定される．古典的小物体ではその質量の他に位置・運動量・回転の角運動量等を与えて運動状態が指定されたが，量子力学では位置と運動量を同時に与えられない．また運動量・角運動量等は任意の値をとることができず量子化の条件が課せられる．

（1）運動量

素粒子が一辺 L の立方体にとじこめられていると考えると自由粒子の運動量は (2.42) で与えられる不連続的な値の一つをとり，他の値をとることは許されない．われわれの世界はそれが有限の大きさを持つにしろ，あるいは無限の大きさを持つにしろ素粒子の大きさ等にくらべてはるかに大きく，$L\to\infty$ と考えてよいので，実際問題として運動量 $\boldsymbol{p}$ は古典力学におけると同様に連続的な値をとると考えてよい．

（2）角運動量

古典力学における回転物体の角運動量は，その回転の方向または逆方向にトルクを加えることにより連続的に増加または減小させることができ，このようにして原理的にはいかなる値の角運動量をも回転体にもたせることができる．これに反し量子力学の法則により素粒子のスピンは $\hbar$ を単位にして 0, 1, 2, ･･･ (Bose粒子)，または 1/2, 3/2, ･･･ (Fermi粒子) の値しかとれない．また任意の 2 個の素粒子の相対的な回転運動に伴う角運動量

も，同様な制限のため，$\hbar$ の整数倍で与えられる不連続的な値の一つしかとれない．

巨視的物体ももちろん量子力学の法則にしたがうのであるから，それらの回転の角運動量は $\hbar$ を単位にして整数または半整数倍になっているはずである．しかし古典的な巨視的物体の角運動量 J は $\hbar$ にくらべて極めて大きく，また J を測定するときの誤差もはるかに $\hbar$ にくらべて大きい．一例として長さ 1 cm の糸の端に 1 g の小物体をつけて 10 cycle の角速度で回転させたときの角運動量の大きさは，

$$J = pr = mvr = m\omega r^2 = 1\times 2\pi\times 10\times 1^2\ \mathrm{g\cdot cm^2/sec} \approx 62.8\ \mathrm{erg\cdot sec}$$
$$\approx 3.92\times 10^{13}\ \mathrm{eV\cdot sec}. \tag{13.1}$$

m, v, ω はそれぞれ小物体の質量・速度・角速度，r は糸の長さである．もし 10^{-3} の精度で角運動量を測定したとしても，その誤差 ΔJ は $\hbar(=6.58\times 10^{-16}\ \mathrm{eV\cdot sec})$ にくらべて 10^{26} けたも大きく実際問題として量子化の影響は無視できる．

古典力学における回転体の運動状態は外からトルクを加えることにより連続的に運動状態を変えうるが，素粒子の回転角運動量は $\hbar$ の整数倍または半整数倍であるので，外から γ 線や π 中間子をあてて素粒子の回転状態を変えるとその角運動量は $\hbar$ の整数倍変化する．たとえば陽子 p に γ 線をあてて，次のような反応を起こすと，

$$\gamma + p \to p + \pi^0, \qquad \text{a)}$$

$$\gamma + p \to p^* + \pi^0. \qquad \text{b)}$$

a）では p の角運動量の大きさ J は変化しないが（$\Delta J=0$), b）では $\Delta J=1$ で p はその励起状態 p^*(3－3 共鳴）にかわる．p^* はもはや陽子ではないが重粒子数 1 の Fermi 粒子で p の回転状態の変化したものといってもよい．古典力学では一定の慣性能率を持つ剛体の回転エネルギーはその角運動量の平方に比例して増大する．素粒子の場合は剛体でないので慣性能率も励起状態により異なり，その他事情はいろいろと複雑であるが，一般に同じ量子数を持ち J のみ異なる粒子について比較すると J が大きくなる程質量が増大し不安定になる．このため安定な（または寿命の長い）素粒子は $J=0$, 1/2 という小さな J の値を持つと考えられる．(光子のみ $J=1$ である).

古典物理における巨視的物体の運動法則は Newton の運動方程式で記述されたが，素粒子の運動法則において Newton の運動法則がどのように変形をうけたかをふりかえってみよう．

［慣性の法則（Newton の第一法則)］

a） 物体に力の働かないときは等速運動をする．この慣性の法則は素粒子に対してもあてはまり，素粒子が他から力をうけていないときは（自由粒子)，一定の速度（運動量）

を持ちつづける．他に粒子の存在しない空間（直空状態）に1個の素粒子が存在するときその素粒子がある点Aにいる場合とAと異なる任意の点Bにいるときとで，素粒子と外界（真空状態）との関係は変らない．すなわち真空状態における空間は一様で，その空間のどの点に素粒子がいる場合も同等と考えられる．点AからBに素粒子を動かす演算子は（4.17）より，

$$\exp - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{pR} \tag{13.2}$$

で表わされる．$\boldsymbol{p}$ は運動量の演算子 $\boldsymbol{R}$ は AB 間の距離ベクトルである．**空間の一様性**を認識すれは，素粒子の状態はこの移動により変化しないはずで，たとえば系の Hamiltonian H はこの演算子と可換でなければならない．したがって，

$$[H, \boldsymbol{p}] = 0. \tag{13.3}$$

これより運動量が変化しないこと，Newton の第一法則が得られる．

b）特殊相対性理論によれば時間と空間とは同等に扱われる．空間の一様性と同様に時間の一様性を認めれば，これよりエネルギー保存則がえられる．

c）次に回転している素粒子を考えよう．もし他に素粒子がない真空状態の中で，この素粒子が回転しているときは，空間は等方的で回転体（素粒子）が空間に対しどのような向きにあっても素粒子と外界との関係は同等と考えられる．座標系を回転する演算子は角運動量 $\boldsymbol{M}$ を用いて，

$$\exp - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{M\theta} \tag{13.4}$$

と書ける（3.5）．$\boldsymbol{\theta}$ の大きさは回転角，方向は回転軸の方向を示す．空間の等方性より素粒子の回転状態はこの変換で変らないから，

$$[H, \boldsymbol{M}] = 0. \tag{13.5}$$

角運動量の保存則が得られる．

このように1個の素粒子しか存在しない系では，真空状態の空間の一様性，時間についての一様性，空間の等方性から自由粒子がそれぞれ一定の運動量，エネルギー，角運動量を持ちつづけることが結論される．素粒子が構造を持つ場合，あるいは何個かの素粒子の集りからなる系でも同様である．この系の構造を変えないで（系を構成している粒子の相対的位置を一定に保って）系全体を時間，空間方向に移動させ，あるいは重心のまわりに回転させても時空の一様性，等方性から何の変化も起こらない．これから系の全運動量・全エネルギー・全角運動量の保存則が導かれる．

古典物理学と異なる点は，これらの保存量の全部が同時に確定した値をとれないことで

ある．たとえば角運動量のあいだには，

$$[M_x,\ M_y]=i\hbar M_z$$

の関係があるので，不確定性関係により M_x, M_y には，

$$\Delta M_x\cdot\Delta M_y\geq\frac{\hbar}{2}|M_z|$$

で与えられる誤差がどうしても避けられない．しかし巨視的な物体で角運動量の大きさが(13.1) の程度のときは，誤差 ΔM は，

$$\Delta M\approx\sqrt{62.8\ \mathrm{erg\cdot sec}\times 3.29\times 10^{-16}\ \mathrm{erg\cdot sec}}=1.4\times 10^{-7}\mathrm{erg\cdot sec}$$

の程度であり，M 自身（$\approx 63\ \mathrm{erg\cdot sec}$）にくらべれば無視することができる．したがって古典力学では運動量，角運動量のすべてが確定した値を持っているとしてよい．

〔作用・反作用の法則（Newton の第三法則）〕

2個の物体 A, B が相互に力をおよぼし合うときに，A が B におよぼす力と B が A におよぼす力は大きさが等しく向きが正反対である．この作用・反作用の法則がどのように素粒子物理学で変革をうけたかを調べよう．2個の素粒子 a,b 間に働く力は，§9.3 で論じたように a,b 間に別の素粒子 c が交換されることにより媒介される．時空の各点にはいろいろの素粒子の場が存在し，荷電・重粒子数等々の保存則がみたされる限り素粒子間の転換・素粒子の生成吸収が行なわれている．その点に外から充分エネルギーが与えられれば転換の結果作られた素粒子は無限の遠方まで伝播したり，また途中で再び転換をうけて吸収されたりする．エネルギーが足りないときは仮想的な粒子であり(244 ページ)そのエネルギーは自由粒子のエネルギーとは異なる．したがって不確定性関係から許される時間間隔 $\Delta t\lesssim\hbar/|\Delta E|$ （ΔE：仮想粒子の運ぶエネルギーとそれと同じ運動量持つ自由粒子のエネルギーとの差）の間走りつづける．伝播の間は粒子は自由粒子と同様一定の運動量・スピン・荷電等を持つ．素粒子 a が転換していろいろな種類（個数も1個でなくてよい），いろいろな運動量・スピン・荷電…の素粒子を放出し，これら素粒子が仮想粒子として伝播し相手の素粒子 b で吸収されると a, b 間に力が働いたことになる．あるいは b が放出した粒子を a が吸収してもよい．

この粒子の交換により粒子 a, b は力をうける．この力の強さは粒子 a, b がうける運動状態の変化ではかられる．Newton の運動方程式では，

$$m\frac{dv}{dt}=\boldsymbol{F}. \tag{13.6}$$

これを運動量 $\boldsymbol{p}$ で書き直すと，

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}. \tag{13.7}$$

すなわち，運動量の変化で F が与えられる．特殊相対性理論では (13.6) の m は静止質量ではなく速度 v によるが，(13.7) はそのまま成立する．

さて a, b の間に交換される粒子は伝播の間一定の運動量 q を持つので，a が粒子を放出するとき a は $-q$ の運動量変化をうけ，b はその粒子を吸収するとき $+q$ の運動量変化をうける．(13.7) によると運動量変化は力積で与えられるが，a が b におよぼす力の働く時間と b が a におよぼす力の働く時間は等しいとすれば，a, b の運動量変化がそれぞれ $\mp q$ のことは a に働く力と b に働く力が大きさ等しく向きが反対のことを意味する．

〔因　果　律〕

Newton の運動方程式では物体が運動状態を変えるときには常に力が働き，力が働く以前に物体が運動状態を変えることはない．すなわち常に原因が結果に先行する．

この因果律は素粒子物理学では次のようにいい表わされる：場に与えた小さな乱れあるいは信号は光速度より速くは伝わらない．素粒子間の力は素粒子自身を媒介として起こり，一つの素粒子がある素粒子により放出され他の素粒子に吸収されて力が働く．この交換される仮想的粒子の伝播の速度は光速度を越えないので，力は未来光円錐内の時間的に離れた点にのみ到達する．

この点を調べるために原点 ($r=0,\ t=0$) で作られた質量 μ，スピン 0 の粒子の伝播のようすを調べよう．運動量空間で与えられている伝播関係 Δ_F(9.121) を用いると，原点から点 $x_\mu(=r,\ ct)$ への伝播は，

$$\Delta_F(x_\mu)=-\frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\int dk_\mu\,\frac{\hbar^2}{k_\mu{}^2+\mu^2c^2}e^{ikx/\hbar} \tag{13.8}$$

で表わされる，しかしこの式では Δ_F はまだ完全に定義されていない．それは k_0 で積分するとき，被積分関数は k_0 が，

$$k_0=\pm\sqrt{k^2+\mu^2c^2} \tag{13.9}$$

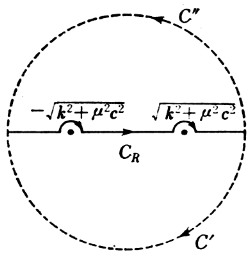
のとき無限大となる．すなわち (13.9) に極 (pole) を持ち，この極の近くでの積分をどのようにするかを決めなければ (13.8) の積分は確定したものとならない．このことは，Δ_F は (9.122) で源 ρ を $\delta^4(x^\mu)$ にした方程式，

$$\left(\Box-\frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\right)\Delta_F(x^\mu)=\delta^4(x_\mu)$$

の解として与えられたのであるが，これには，

$$\left(\Box-\frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\right)\Delta_F(x_\mu)=0$$

の解をつけ加えてもよいという不定性に対応する．たとえば，k_0 につての積分を 13－1 図の C_R のように極を避けて積分するとしよう．このときの伝播関数を Δ_R と書く．被積分関数の指数部分は $\exp(-ik_0x_0/\hbar)$ を含むから $x_0>0$ のときは $\mathrm{Im}\,k_0<0$ の領域で $|k_0|\to\infty$ にすると急速に0に近づく．また $x_0<0$ ならば $\mathrm{Im}\,k_0>0$, $|k_0|\to\infty$ で0になる．したがって積分路を，



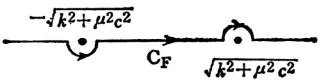
13－1 図　Δ_R の k_0 積分路

$$
\begin{aligned}
&C_R+C' \qquad t>0,\\
&C_R+C'' \qquad t<0
\end{aligned}
$$

ととれる．$t<0$ で C_R+C'' のときは積分路のなかに極がないので積分は0となる．C_R+C' のときは2個の極 $k_0=\pm\sqrt{k^2+c^2\mu^2}$ のまわりの積分で，その留数 (residue) を求めて答が得られる．

$$
\begin{aligned}
\Delta_R(x_\mu)&=\frac{-i}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{\hbar c}{2E}e^{i(kr-Et)/\hbar}dk+\frac{i}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{\hbar c}{2E}e^{i(kr+Et)/\hbar}dk\\
&=-U(r,t)+U(r,-t)=-\Delta(x_\mu), \qquad t>0\\
\Delta_R(x_\mu)&=0. \qquad t<0
\end{aligned}
\tag{13.10}
$$

ただし，Δ, U は 112 ページで計算されたものである．



13－2 図　Δ_F の k_0 積分路

もう一つの例として 13－2 図の C_F に沿って積分したものを Δ_F とする．このときも $x_0>0$ なら C', $x_0<0$ なら C'' をつけ加えて積分路を閉じさせることができ，$x_0>0$ ならば右の極，$x_0<0$ ならば左の極が寄与をする．こうして，

$$
\Delta_F(x_\mu)=\begin{cases}\dfrac{i}{(2\pi\hbar)^3}\displaystyle\int\frac{\hbar c}{2E}e^{i(kr-Et)/\hbar}dk=U(r,t), & t>0\\[2ex] \dfrac{i}{(2\pi\hbar)^3}\displaystyle\int\frac{\hbar c}{2E}e^{i(kr+Et)/\hbar}dk=U(r,-t). & t<0\end{cases}
\tag{13.11}
$$

この他にも極を避けて積分する方法にはいろいろの可能性があり，それらはいずれも伝播関数の資格がある．

これらの伝播関数のうち，どれをとるべきだろうか，まず考えられるのは Δ_R である．Δ 関数は光円錐の外では0であるので，(13.10) でみられるように Δ_R は未来の光円錐の内だけで値を持つ，したがって，原点から出た粒子は $r<ct$ の領域内にのみ伝播し，

光速度より速くは伝らない．Δ_R は古典電磁気学の**遅延ポテンシャル**（retarded potential）に相当する．

しかし，素粒子論ではこの Δ_R は適当でない．伝播関数は 9－13, 9－15 あるいは9－18図の（a),（b）のように点0から x_μ への粒子の伝播と同時に，x_μ から0への反粒子の伝播も含まなければならない．(13.10)には負の振動数だけでなく正の振動数も含まれ，これは負のエネルギーを持つ粒子（反粒子でなく）も0から x_μ に伝わることに相当する．$t>0$ のときは正エネルギーの粒子が0から x_μ に，$t<0$ のときは正エネルギーの反粒子が x_μ から0に伝わるためには（13.11）の Δ_F をとらなければならない．Δ_F を **Feynman の伝播関数** という．

13－2 図のように積分路をとるかわりに，極 $\sqrt{k^2+\mu^2c^2}$ が実軸の少し下，極 $-\sqrt{k^2+\mu^2c^2}$ が実軸の少し上にあるとして k_0 は実数として積分し，あとで極限をとってもよい．すなわち，

$$\Delta_F(x_\mu)=-\frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\int dk_\mu\,\frac{\hbar^2}{k_\mu{}^2+\mu^2c^2-i\varepsilon}e^{ikx/\hbar},\quad \varepsilon\to 0 \tag{13.12}$$

とすることができる．

$\Delta_F(x_\mu)$ は光円錐の外でも0にならない．112 ページの計算から，

$$\Delta_F(x_\mu)=U(r,\ \pm t)=\frac{1}{8\pi}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,H_0{}^{(1)}\left\{i\frac{\mu c}{\hbar}\sqrt{r^2-c^2t^2}\right\},\quad r>c|t|$$

で，r の大きいところでは，

$$\Delta_F(x_\mu)\propto\frac{e^{-\frac{\mu c}{\hbar}r}}{r^{3/2}}\quad r\gg ct$$

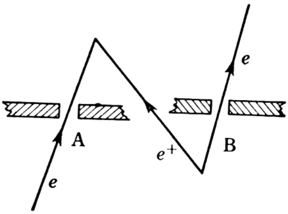
となり，指数関数的に減少はするが0ではない．このことは，粒子が光円錐外にも伝播し，信号が光速度より速く伝わるようにみえるが，そうではない．外から刺激があり，そこから波が伝わるようすは，

$$\int\Delta_F(x-y)\rho(y)dy \tag{13.13}$$

で与えられる．ρ は源である．そこで Δ_F と $-\Delta_R$ との差をとると，それは $U(r,-t)$ で正の振動数 $\exp iEt/\hbar$ $(t=t_x-t_y)$ のみを含んでいる．ところで信号とは正のエネルギーの粒子が入射することであるが，$\rho(y)$ として $\exp(-iE't_y)$, $E'>0$ をとるならば $\exp -i(E+E')t_y$ の部分は t_y についての積分が0となるため（13.13）には寄与しない．したがって，入射エネルギーが正と確定しているときは Δ_F は実際上は $-\Delta_R$ に等しく，信号は未来の光円錐の内にしか伝わらない．一般に粒子が物体に衝突して出ていく

とき，相互作用が局所的であって粒子が消滅した点と同じ所から他の粒子がつくられるならば，正のエネルギーを持つ粒子の伝播は因果的に行なわれるので，全体として粒子は光速度より速く伝わって出てくることはない．

これに反して，ごく短時間内の測定で，不確定性関係によりエネルギーが確定しないときには空間的に離れた点に粒子が伝わるようにみえることがある．たとえばスリットを使って電子の位置を測るとしよう．同時刻に離れた2点 A, B で電子が存在するかどうかを測った場合，両方に電子が見出される確率は0ではない．それは測定の際に電子，陽電子の対が作られ，陽電子がもとの電子と消滅するという13-3図のような過程が起こるからである．しかし，これは両方のスリットに，たまたま電子が見出されただけであって，片方の測定の結果他方でも見つかったという相関があるわけではない．したがって，光速度より速く信号が伝わったことにはならない，



13-3 図

〔ユニタリー性（確率の保存則）〕

古典力学である物体の運動を論ずるときに，その物体が消滅したり新たに物体が生ずることはなく，すべての時刻でその物体の存在確率は1で，時刻に応じてきまった一つの状態に物体が見出される．量子力学でも物体の消滅発生は起こらないが，ある時刻の状態は波動関数で表わされ，一般に同時にいろいろの運動量スピン等の状態に存在しうる．しかしどれかの状態に存在する全確率は時間によらず1で，このことは系の変化を与える Hamiltonian がエルミットであることにより保証される．素粒子物理学では粒子の発生・消滅・転換が起こり，ある特定な粒子の存在する確率は時間と共に変化し，確率は保存されない．量子力学において，ある時刻に粒子の位置を測定すると $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots$ 等異なる位置に見出されるように，素粒子物理学においては一時刻に系が素粒子 a であることもあれば b であることもあり，また $c+d$ であることもあるように粒子数の保存・種類の不変性は成立しない．しかし系が異なる粒子数・いろいろな種類の粒子・各粒子のいろいろな運動状態のどれかに見出される確率は時間によらず常に1であり，この拡張された意味での確率の保存則は成立している．

2粒子 a, b が衝突して弾性散乱 $(a+b \to a+b)$，非弾性散乱等が起こるとき，衝突の S 行列はユニタリー性（(9.31) 式）をみたしており，これが確率の保存則を与える．すなわち衝突前の状態を n，衝突後の状態を m，$n \to m$ 遷移の S 行列要素を $\langle m|S|n\rangle$

と書くと，いろいろな衝突後の状態 m に見出される全確率は (9.31) より，

$$\sum_m |\langle m|S|n\rangle|^2 = \sum_m \langle n|S^\dagger|m\rangle\langle m|S|n\rangle = 1 \tag{13.14}$$

で，衝突が起こっても全確率が保存されている．S 行列のユニタリー性は系の相互作用の Hamiltonian のエルミット性より保証される．

〔素粒子の生成·消滅と反粒子〕

素粒子物理学におけるいちじるしい特徴は素粒子の生成·消滅·転換の起こることで，いろいろな保存則（荷電・重粒子数等の保存則）がみたされるかぎり時空のどの時間，どの場所でもこのような変化が起こりうる（6-2 図参照)．そこで時空の各点に各素粒子の場が存在すると考え，場がその素粒子の生成·消滅の演算子で書けると考えた（§ 6.2 参照)．点 $x_\mu(=\boldsymbol{r},\ ct)$ におけるスピン 1/2 粒子の場 $\psi(x)$ を考えよう．これは Dirac 方程式 (7.18) をみたし，したがって，その行列要素 $\chi(x)=\langle n|\psi(x)|m\rangle$ も Dirac 方程式をみたす．いま重粒子数等ある保存される量 N があり，(8.3) あるいは (8.4) のような第一種のゲージ変換に対して不変であるとしょう．このときは ψ は N を一つだけ減らす働きをし，$\chi(x)$ が 0 でないのは，

$$N_m - N_n = 1$$

のときである．また $\chi(x)$ の時間的変化が $\exp(-iEt/\hbar)$ のとき，

$$\frac{d}{dt}\chi(x) = \left\langle n\left|\frac{d}{dt}\psi(x)\right|m\right\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle n|[H,\psi(x)]|m\rangle = \frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)\chi(x)$$

であるから，

$$E_m - E_n = E$$

となる．これらのことから $\psi(x)$ はエネルギー E の粒子を一つだけ減らすということができる．しかし Dirac 方程式の解には E が負のものも存在する．もしすべての自由粒子は正のエネルギーを持つとすれば，負のエネルギーの粒子をへらすということは考えられない．したがって $E>0$ のときは，n は m よりもエネルギーが $|E|$ の反粒子（N が -1 の粒子）が一個多い状態と解釈する必要がある．すなわち ψ は反粒子を 1 個ふやすと考える．このようにして，Dirac 方程式に正，負エネルギーの解があることから，反粒子の存在が要求される．

Dirac 粒子に限らず一般に，ある保存量に一定の 0 でない変化を与える場があり，その方程式の解に正，負の振動数の状態が存在するときは，粒子と反粒子が存在することになる．もし理論が時間反転に対し不変ならば負の振動数の解があれば正振動数のもなければならない．そうでないもっと一般の場合でも，両方のエネルギーの解がある波動場は量子

化すれば反粒子の存在が要求される。

[Lorentz 変換に対する不変性]

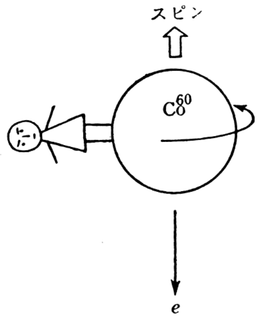
Newton 力学は Galilei 変換 (4.1) に対し不変であったが，相対論の要求から素粒子の運動は Lorentz 変換に対し不変である．自由粒子の運動方程式は相対論的要求により組立てられ，その結果，自由粒子の運動量・エネルギーの間には (4.7) の関係が存在する．粒子間に力が働く場合にも，力を伝達する仮想粒子も Lorentz 変換に対し不変な形で伝播するので，これら粒子を作り出す変換の相互作用が Lorentz 変換に対し不変ならば系全体の Lorentz 不変性が保証される．いろいろな素粒子間の相互作用は Hamiltonian が Lorentz 不変のように構成してきた．

[時間反転・空間反転]

古典力学では物体に働く力が時間によらず，粒子の場所のみの関数であれば，時間反転した世界と元の世界の間には区別がない．同様に素粒子物理学では相互作用の Hamiltonian が時間反転に対し不変ならば，二つの世界の間に区別はない．時間反転に対する不変性は古典物理学におけると同様に素粒子物理学でもよい近似で確かめられており，現在のところ物理学における一つの根本原理と考えられる．

一方，空間反転をした場合，Newton の運動法則は力のポテンシャルが粒子間の距離の関数で，その方向によらなければ元の世界と空間反転した世界で同一になる．素粒子物理学では自由粒子の方程式と相互作用の Hamiltonian が空間反転に対し不変であれば，二つの世界で素粒子の運動法則は同一で区別できない．素粒子物理学における大部分の現象では空間反転に対する不変性が成立しており，それがそのまま古典物理学の巨視的現象にうけつがれている．しかし素粒子の崩壊等の弱い相互作用の関係する現象では，ほとんど例外なく空間反転に対する不変性が破れている．

空間反転に対する不変性が具体的に問題になる例として次のことを考えてみよう．どこか遠くの星に生物が住んでいて，その人達と電話で連絡ができたとする．この際，彼らに電話だけで“右”という向きを教えることができるだろうか．電磁気学で磁場の方向と電流の方向と電流の受ける力の方向がどうなるか等を考えても，磁場の向きをどうして彼らに教えるかという点で問題があり，“右”を教えることは不可能にみえる．このとき理論は空間反転に対し不



13-4 図　絵のように向いたとき電子は右の方に多く出る．

変である．しかし崩壊の現象を用いればこれは可能となる．たとえば Co^{60} の β 線はスピンと反対の方向に多く出ることから，Co^{60} 核の赤道に立って回転の方向に向き（正しくいえば，Co^{60} のスピンを整列させるための電磁石のコイルを流れる電流方向に向き），電子の多くでてくる方向を右とすればよい．

ニュートリノは質量0のために空間回転，Lorentz 変換に対する不変性からはヘリシティ ±1 の状能のうち，一方のみが存在すれば充分であり，空間反転に対する不変性を要求して始めて両方の状態が必要になる．これまでの実験事実は右巻きのニュートリノが存在しないか，あるいは存在しても他の粒子と相互作用せず観測されないことを示している．これに反して質量のある自由粒子に対しては，Lorentz 変換－空間回転に対する不変性からスピン S の粒子に対し $S_z=S,\ S-1,\ \cdots,\ -S$ の $2S+1$ 個のスピン状態が同等に存在することが要求され，空間反転に対し不変な方程式をみたす．このようなことを考えると空間反転に対する不変性は他の原理から場合々々によって導かれる原理とも考えられる．

空間反転に対する不変性は，このように一般には成立しないが，§7.5 で調べたように Hamiltonian のエルミット性と Lorentz 不変性から CPT 不変性が導かれる．これと T 不変性から CP 不変性が結論され，弱い相互作用まで含めた素粒子物理学で CP 不変性が成立しているようにみえる．したがって右手座標系における素粒子の運動法則と左手座標系における反粒子の運動法則はまったく同一である．再び他の星の住人に左右を教えることを考えてみよう．彼らの世界がわれわれと違って反粒子の集りでできているかもしれない．もし C 変換で不変ならば Co^{60} でも，その反粒子 $\overline{Co}^{60}$ でも β 線（反 β 線）はスピンと逆の方向に多く出るので，左右の区別は教えることができる（しかし彼らの世界がわれわれと同じ物質でできているか，反物質かは電話では区別できない）．これに反し C 変換に対しては不変でなく CP 不変なときは，彼らがわれわれと同じ物質で左右を正しく理解した場合と彼らが反物質で左右を逆にとった場合とを区別する方法がない．CP 不変ならば，このように変更された意味で左・右，物質・反物質の対称性は保たれているといえる．

〔素粒子の運動の決定〕

Newton 力学においては，物体の存在とそれに働く力が与えられたときに，その物体が時間と共にどういう運動をするかを調べた．その運動は確率の保存・因果律・Galilei 変換に対する不変性，エネルギー・運動量の保存則等もろもろの一般原理にしたがうものではあるが，その詳細は力を場所・時間の関数として知って初めて決定された．素粒子物理

学では同じく素粒子の運動はいろいろな一般原理にしたがうが，力自身も素粒子により媒介されるので力と素粒子の存在との間には密接な関係がある．そこでどれだけのことが与えられたときに素粒子の運動が決定されるかを考えてみよう．

素粒子 $a, b, c, \cdots$ が存在するとき，素粒子の転換 $a \to b + c$ 等が起こり，この遷移の強さは相互作用の Hamiltonian H の結合定数で表わされる．素粒子の場が局所的であり，相互作用も局所的で H が時空の同一点でのいろいろな場の積としてかけているときは，素粒子 a が消滅した点から素粒子 b，c が発生する．もしエネルギー・運動量の保存則をみたしうるときは b，c は自由粒子として無限の遠方にとび去るが，保存則がみたされないときは b，c の一方または両方が仮想的粒子で不確定性関係で許される距離まで運動しうる．もしこの間に b，c のいずれかまたは両方が別の素粒子 d と衝突し $b(c) + d \to e$ のような転換を行なったとしょう．全体として $a + d \to c(b) + e$ という転換になり，もし全体としてエネルギー・運動量が保存されれば，すべての粒子は自由粒子として無限遠まで伝播していく．もし保存則がなおみたされなければ粒子 $c(b)$ および e の一方または両方が仮想的粒子でまた別の粒子と衝突して次の転換を起こす．

このようにして起こる素粒子間の力は各転換の起こる強さがわかれば決定され，これは H の結合定数できまる．しかし場および相互作用がげんみつに局所的で (9.94) の形をしているという実験的証拠はなく，実際に実験できるのはある小領域にいくつかの粒子が入射して，その小領域から何個かの素粒子が出てくる振幅の測定である．そこで局所的な相互作用を必ずしも仮定しないで一般的原理と少数の振幅の値から素粒子の運動を導き出すことを考えよう．一例として粒子 a，b の弾性散乱を考える．静止した粒子 b に一方向に進む粒子 a の波束を入射させるとき，2 粒子が力をおよぼし合う程近づくと，その小領域から散乱波が放出される．

a，b 2粒子が近づいたとき $a + b \to c$ という素粒子の転換が起こると考えよう．この転換の結果作られる c は仮想粒子であるが，a のエネルギーを変えていくとエネルギー・運動量の保存則がみたされるエネルギーがあり，この場合は c は自由粒子として無限遠まで伝播する．したがって最初の状態 $a + b$ に存在する確率は確率の保存則により減少し，この転換は $a + b$ 状態が吸収されたと考えられる．吸収の起こるエネルギーは a，b，c の質量により決まり，$m_c > m_a + m_b$ ならば a 粒子の運動エネルギーは正であるが，$m_c < m_a + m_b$ ならば負である．

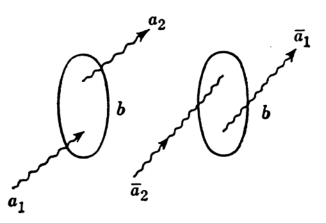
§ 10.5 で論じたように，あるエネルギーで $a + b \to c$ の吸収が起これば，因果律から他のエネルギーの波の位相が変化する．位相の変化により散乱が起こって波は進行方向と

異なる向きに進む．この散乱のために確率の保存（ユニタリー性）から前方に進む波は少くなり，吸収されたことになる．したがって再び各エネルギーの波が分散式による位相の変化をうける．このようなことを無限にくりかえすと，結局各エネルギーの波がどれだけ散乱されるかが，出発点の $a+b\to c$ 吸収の強さを与えることにより決まることが予想される．

§10.5 では，一方向に進む波だけを考えたが，a, b 粒子間の散乱では2個の独立変数が存在し，たとえばエネルギーと散乱角が変数である．あるいは部分波に分解して，エネルギーと角運動量をとってもよい．$a+b$ の重心系で考えると $a+b\to c$ の吸収はある特定のエネルギー，特定の角運動量で起こる．たとえば a を π^-, b を p, c を n とすれば，$\pi^-+p\to n$ 吸収の起こるのは π の全エネルギーが $E_0=\mu^2c^2/2M$, 全角運動量が $J_0=1/2$ のときである．

さてこの特定な E_0, J_0 の値で吸収が起こると，確率の保存則より入射波束の中のこの E, J の波の振幅は減少する．その結果が，因果律を破らぬためには $E\neq E_0$, $J\neq J_0$ の波が位相の変化をうけ，波が光速度以上の速さで進むのをさまたげなくてはならない．したがって $E\neq E_0$, $J\neq J_0$ の波も散乱をうける．このようにして一方向に進む波束の場合と同様な議論をくりかえすと，$a+b\to c$ 吸収の強さから，すべてのエネルギー・角運動量での弾性散乱が決定される．

さて $a+b\to c$ 転換の存在は同時に $\bar{a}+c\to b$, $\bar{b}+c\to a$ 等の転換が起こり，$a+b\to c$ の振幅の大きさを与えることは同時にこれらの振幅の強さを与えることになる．したがって $a+b\to a+b$ 散乱と同時に $\bar{a}+c\to\bar{a}+c$, $\bar{b}+c\to\bar{b}+c$ 散乱も決定される．



13-5 図

$a+b\to a+b$ 散乱で入射粒子 a を表わす波束を考えるとき，振動数正の波だけでなく一般には負の振動数の波束も入ってくる．負エネルギーの a の吸収は正エネルギーの $\bar{a}$ の放出と考えられるから，$a_1+b_1\to a_2+b_2$ 散乱（1, 2 は粒子の運動量スピン等を与える指標）は $\bar{a}_2+b_1\to\bar{a}_1+b_2$ 散乱でエネルギーの符号を変えたものと考えられる（13-5 図．なお 11-19 図，(10.129) も見よ）．したがって負エネルギーの粒子 a の b による散乱は正エネルギーの反粒子 $\bar{a}$ の b による散乱と考えられる．このようにして $\bar{a}+b\to\bar{a}+b$ 散乱も同時に決定される．

以上の議論から推論されるように $a+b\to c$ 吸収の強さを与えると，力が局所的であ

るかどうかには無関係にユニタリー性と因果律という一般原理から a, b, c およびその反粒子間の任意の組の間の散乱が決定される可能性がある．

〔基本的素粒子〕

素粒子は安定なもの・不安定なものをあわせて極めて多数存在する．また共鳴状態まで含めればその数はさらに多くなり今後もまた多数みつかると予想される．素粒子間には $a+b\leftrightarrow c$ のような転換が起こるので，a, b, c 全部を素粒子と考えることも，c を a, b 2粒子から作られる素粒子と考えることもできる．またこの転換の存在は，

$$a\leftrightarrow \bar{b}+c,\quad b\leftrightarrow \bar{a}+c$$

の転換も存在することを示しており，a を $\bar{b}$ と c, b を $\bar{a}$ と c から作られた粒子と考えることもできる．

素粒子 a の構造を考えると，上のような力の存在より a は次のような状態の重ね合わせと考えられる．

$$a,\ \bar{b}+c,\quad a+\bar{c}+c,\quad a+\bar{b}+b,\ \cdots.$$

a が $\bar{b}+c$, $a+\bar{c}+c$, $a+\bar{b}+b$ $\cdots$ 状態に見出される確率 $P_{\bar{b}+c}$, $P_{a+\bar{c}+c}$, $P_{a+\bar{b}+b}$, $\cdots$ は $a+b\rightarrow c$ 転換の強さを与えれば決定されることが予想され，特に転換の強さがこれら状態に見出される全確率を1にする場合も考えられる．このときは素粒子 a が a という状態に見出される確率 P_a は0で素粒子 a はもともとは存在せず素粒子 b, c の結合状態と考えられる．このようにして，今日ある素粒子のあるものは他のより基本的な素粒子の結合状態と考えることもできる．たとえば p, n, Λ を基本的な重粒子と考えて軽粒子を除く他の素粒子をこれらの結合状態と考えることもできる（坂田模型）．あるいは現在みつかっていないが，いくつかの基本的素粒子があり，すべての素粒子はこれらの結合状態であるかもしれない．

また極端な場合には a, b, c, $\cdots$ の構造を考えたときに $a+b\rightarrow c$ 転換の強さがちょうどどの粒子に対しても $P_a=0$, $P_b=0$, $P_c=0$, $\cdots$ となることも考えられる．このときはそれぞれの粒子が他の粒子の結合状態で，すべてが同等であり，あるものが特に基本的な粒子であるという区別がない．もしそうであるならば $a+b\rightarrow c$ の強さは勝手な値をとるわけにいかず，ある定まった値しか許されない．したがって，すべての粒子が他の粒子の結合状態であるという要求から，結合の強さ，さらには粒子の質量の比 m_b/m_a m_c/m_a, $\cdots$ 等も計算により求まる可能性もある．このような考えが正しいか，あるいは基本的素粒子が存在するかは，これからの実験，理論の発展を待たなければならないが，現在のところ特に基本的と思われる素粒子は見つかっていない．

§11.6 で論じたように現実の素粒子の間には極めていちじるしい類似性があり，強い相互作用をする粒子の間には $SU(3)$ 対称性が比較的よく成立している．このことは，たとえば p, n, Λ, $\Sigma^{\pm,0}$, $\Xi^{0,-}$ が同等に基本的な素粒子であると考えられる．同じようにいろいろな励起状態も Bose 粒子も同等に基本的ないくつかの組に分れている．

古典力学における剛体を考えると，いろいろな回転角運動量の状態が考えられる．量子力学ではその角運動動量は $\hbar$ の整数倍（または半整数倍）であるが，いま与えられた角運動量 J の状態を考えると $2J+1$ 個の異なる回転状態があり，これらは同等な状態でただ回転軸の向きが異なるだけである．同様に8個の重粒子は，その内部構造が同一な一つの素粒子で，ある回転軸の向きの異なる8個の状態と考えられる．この軸は空間回転に関する軸ではないが $SU(3)$ の変換により相互に移り変る軸になっている．

古典力学における剛体にいろいろ異なる大きさの回転状態があるように，構造を持った素粒子はその内部構造の違いにより異なる状態をとるであろう．8個の重粒子（p, n, Λ, $\Sigma^{\pm,0}$, $\Xi^{0,-}$）と 10 個のスピン 3/2 の素粒子（N^*, Y^*, Ξ^*, Ω^-）の違いは，このような内部構造の違いに帰することができそうである．回転状態の異なる剛体は，量子力学ではその角運動量の大きさ J に応じて $2J+1$ 個の同等な状態を持つように，8, 10 という数は内部状態の縮退の度合いを表わしている．また剛体は $J^2/2I$（I は慣性能率）という J に関係するエネルギーを持つが，8 重項，10 重項にもエネルギーの差がある．このように考えると8個の素粒子の組と 10 個の素粒子の組はどちらが基本的粒子ということはなく，同一の基本的粒子の異なる状態のようにみえる．このように素粒子の構造を調べ，いままで別々のものと考えられていた多くの素粒子を統一的に扱うことが今後の問題である．

軽粒子は強い相互作用をしないので，軽粒子を他の粒子の結合状態として理解するのに必要な充分強い力の存在は今のところ知られていない．また e, μ, ν_e, ν_μ の間には質量・荷電の違いを除いてはいちじるしい類似性があるが $SU(3)$ に相当する対称性は今のところ知られていない．

以上の考察は古典物理学の諸概念が素粒子物理学でどのように変更され，また変更されつつあるかを示しているが，素粒子のふるまいは極めて多種多様であり，われわれの知識と理解は僅かに自然の一面にふれたにすぎぬように思われる．私共の筆が自然の怒りにふれぬことを祈りながら筆をおくことにしよう．

付　　録

A 1. 基本的物理量の値

c	2.99793×10^{10} cm/sec（光速度）
h	6.6256×10^{-27} erg·sec $=4.1356\times10^{-15}$ eV·sec（Planck 定数）
$\hbar\left(=\dfrac{h}{2\pi}\right)$	1.0545×10^{-27} erg·sec $=6.5817\times10^{-16}$ eV·sec
e	4.80298×10^{-10} esu（非有理化単位）$=1.70268\times10^{-9}$ esu（有理化単位）$=1.6021\times10^{-19}$ coulomb（陽子の荷電）
$\alpha\left(=\dfrac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)$	1/137.0388（微細構造定数）
N_0	6.02252×10^{23} molecules/gram-mol（Avogadro 定数）
k	1.38054×10^{-16} erg (度)$^{-1}=8.6171\times10^{-5}$ eV (度)$^{-1}$（Boltzmann 定数）
G	6.67×10^{-8} dyn·cm^2·g^{-2}（重力定数）

エネルギー

$mc^2=0.511006$ MeV（電子）

$Mc^2=938.256$ MeV（陽子）

$R\left(=\dfrac{me^4}{32\pi^2\hbar^2}\right)=13.605$ eV（Rydberg エネルギー）

長さ

$\dfrac{\hbar}{mc}=3.86144\times10^{-11}$ cm（電子の Compton 波長）

$\dfrac{\hbar}{\mu c}=1.4135\times10^{-13}$ cm（$\pi^\pm$ 中間子の Compton 波長）

$\dfrac{\hbar}{Mc}=2.10307\times10^{-14}$ cm（陽子の Compton 波長）

$a_0=\dfrac{4\pi\hbar^2}{me^2}=0.52967\times10^{-8}$ cm（Bohr 半径）

$r_0=\dfrac{e^2}{4\pi mc^2}=2.81777\times10^{-13}$ cm（古典電子半径）

その他

$\mu=\dfrac{e\hbar}{2mc}=0.57883\times10^{-8}$ eV/gauss（Bohr 磁子）

$\mu=\dfrac{e\hbar}{2Mc}=3.1524\times10^{-12}$ eV/gauss（核磁子）

$\sigma_T=\dfrac{8\pi}{3}r_0{}^2=\dfrac{8\pi}{3}\left(\dfrac{e^2}{4\pi mc^2}\right)^2=0.6652\times10^{-24}$ cm^2（Thomson 散乱の断面積）

A 2. 単位系

長さ

1 km = 10^5 cm

1 m = 10^2 cm

1 cm

1 mm = 10^{-1} cm

1 μ = 10^{-4} cm

1 mμ = 10^{-7} cm

1 Å = 10^{-8} cm (オングストローム)

1 fm = 10^{-13} cm

面積

1 b (barn) = 10^{-24} cm^2

1 mb = 10^{-27} cm^2

1 μb = 10^{-30} cm^2

時間

1 year = 3.1536×10^7 sec

1 day = 8.64×10^4 sec

1 hr = 3.6×10^3sec

1 min = 60 sec

1 sec

1 ms = 10^{-3} sec

1 μs = 10^{-6}sce

1 ns = 10^{-9} sec

エネルギーの単位

1 GeV (または BeV) = 10^9 eV

1 MeV = 10^6 eV

1 keV = 10^3 eV

1 eV

1 meV = 10^{-3} eV

諸エネルギー・質量単位の換算

amu	eV	g	erg	cal
1	9.31×10^8	1.66×10^{-24}	1.49×10^{-3}	3.56×10^{-11}
1.07×10^{-9}	1	1.78×10^{-33}	1.60×10^{-12}	3.80×10^{-20}
6.03×10^{23}	5.61×10^{32}	1	8.99×10^{20}	2.14×10^{13}
6.70×10^2	6.24×10^{11}	1.11×10^{-21}	1	2.39×10^{-8}
2.81×10^{10}	2.62×10^{19}	4.67×10^{-14}	4.19×10^7	1

(amu は atomic mass unit)

その他

1 c (キューリー) = 3.70×10^{10} 崩壊/sec

1 R (レントゲン) = 87.8 erg/g·air = 5.49×10^{13} eV/g·air

1 rad = 100 erg/g·air = 6.25×10^{13} eV/g·air

1 radian = 57.29578 度

1 気圧 = 1033.2 g/cm^2

1 g (重力加速度) = 980.67 cm/sec^2

e (自然対数の底) = 2.71828, log10 = 2.30259

電磁気の単位

1) 有理化単位と非有理化単位

本書では有理化された CGS Gauss 単位系を用いた (82 ページ). Maxwell の方程式は (6.6) で与えられ, また荷電 e, e' を持つ2粒子間の Coulomb エルネギーは,

$$E_c = \frac{ee'}{4\pi\varepsilon r} \tag{A.1}$$

で与えられる．これに対し非有理化系では Coulomb エネルギーは，

$$E_c = \frac{ee'}{\varepsilon r} \tag{A.2}$$

で，したがって Maxwell の方程式は (6.6) の代りに次式で与えられる．

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J},$$
$$\varepsilon\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 4\pi\rho,\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0. \tag{A.3}$$

有理化単位で電子の荷電 e は $e^2/4\pi\hbar c \approx 1/137$ であったが，非有理化単位では $e^2/\hbar c \approx 1/137$ となる．有理化系での電磁場のエネルギー密度は $1/2(\varepsilon\boldsymbol{E}^2 + \mu\boldsymbol{H}^2)$ で与えられる．(Gauss 単位系をとると真空中では $\varepsilon = \mu = 1$ で (6.47) になる)．これに対し非有理化系では $\frac{1}{8\pi}(\varepsilon\boldsymbol{E}^2 + \mu\boldsymbol{H}^2)$ である．

また物質の性質に関する関係式と電磁場と電流・荷電密度との間の力（の密度）$\boldsymbol{F}$ は有理化系・非有理化系にかかわらず，

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}, \tag{A.4}$$

$$\boldsymbol{F} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} \tag{A.5}$$

となる．

有理化された３元単位系でいろいろな力の大きさは，

1）静電力　$qq'/4\pi\varepsilon r^2$　(q, q' は２物体の荷電量，ε は透電率，r は２荷電間の距離）

2）静磁力　$q_m q_m'/4\pi\mu r^2$　(q_m, q_m' は２物体の磁力の強さ，μ は透磁率，r は２磁極間の距離）

3）電磁力　$\dfrac{q_m I}{4\pi c}\dfrac{|\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{s}|}{r^3}$　(q_m は磁極の強さ，I は電流の強さ，$\boldsymbol{r}$ は導線と磁極間の距離ベクトル，$d\boldsymbol{s}$ は導線の微小単位のベクトル，c は比例定数）

である．電流 I は電流密度 $\boldsymbol{J}$ を面積分したものである．

静電単位系

同じ大きさ ($q = q'$) の荷電の間に真空中 ($\varepsilon = 1$) で $r = 1\,\mathrm{cm}$ で $1/4\pi$ dyne の力が働くときが単位荷電で，その次元は ε を次元のない量と考えるので $[q] = [L]^{3/2}[M]^{1/2}[T]^{-1}$ である．次に電流 I が流れている導線（微少の長さ ds）の作る磁場と磁極 q_m の間の電磁力 3）で比例定数$1/c$ を次元のない量と考えその数値を１とおく．q_m の次元は，

$$[力] = [q_m][I][L]^{-1},$$
$$[力] = [M][L][T]^{-2},\ [I] = [q][T]^{-1} = [L]^{3/2}[M]^{1/2}[T]^{-2},$$

より次のようになる．

$$[q_m] = [M]^{1/2}[L]^{1/2}.$$

2）より μ は次元のある量で，

$$[\mu] = [L]^{-2}[T]^2.$$

電磁単位

電磁単位では 2)，3) 式の μ, c が次元のない量で $c = 1$, $\mu = 1$（真空中）とおく．

$$[q_m]=[M]^{1/2}[L]^{3/2}[T]^{-1}.$$

電荷 q は 3) により電流 I を通じて定義され，その次元は，

$$[q]=[M]^{1/2}[L]^{1/2}$$

である．したがって，1) 式より ε は次元のある量になる．

$$[\varepsilon]=[L]^{-2}[T]^{2}.$$

Gauss 単位

Gauss 単位とは電気的諸量に関しては静電単位，磁気的諸量に関しては電磁単位を用いたもので，したがって（1），（2）式で ε, μ を次元のない量として考え真空中で $\mu=\varepsilon=1$ とおく．これより，

$$[q]=[q_m]=[M]^{1/2}[L]^{3/2}[T]^{-1}$$

となる．（3）式の c の次元は速度の次元の量となり，その値は光速度に等しい．

$$c=2.99793\times10^{10}\ \mathrm{cm/sec}\approx3\times10^{10}\ \mathrm{cm/sec}.$$

MKSA 単位系

電流の単位を長さ・質量・時間の単位と一応独立な単位と考える．また 3) の c は次元のない量として 1 にとる．電流の次元を $[A]$ と書き，その単位をアンペア (Ampere) とよぶ．荷電 q の次元は，

$$[q]=[A][T],$$

でその単位をクーロン (Coulomb) (＝1A·sec) とよぶ．

1)～3) を用いて q_m, ε, μ の次元が決まる．

$[q_m]=[M][L]^2[T]^{-2}[A]^{-1}$ (単位を Wb (weber) とよぶ)

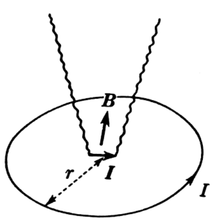
$[\mu]=[M][L][T]^{-2}[A]^{-2}$ (インダクタンスの単位を H (henry) とよび，μ の単位は H/m になる)

$[\varepsilon]=[M]^{-1}[L]^{-3}[T]^{4}[A]^{2}$ (静電容量の単位を F (farad) とよび，これを用いると ε の単位は F/m になる)

1 A の大きさは次のようにして決める．磁束密度 $B(=\mu H)$ の点で $\boldsymbol{B}$ に垂直においてある導線の長さ ds に働く力は (A.5) より，

$$F=BIds. \tag{A.6}$$

$I=1A$, $ds=1m$, のとき $F=1\,\mathrm{newton}$ になる B の大きさは $B=1\,\mathrm{newton/A\cdot m}$ である．さて B は定常電流によっても作りうる．(6.6) の第 2 式と (A.4) より，



A-1 図

$$\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\boldsymbol{J}, \tag{A.7}$$

(定常電流のため $\partial\boldsymbol{E}/\partial t=0$)．円電流が円の中心で作る B の大きさは Stokes の定理を用いると，

$$B=\frac{\mu}{2\pi c}\frac{I}{r} \tag{A.8}$$

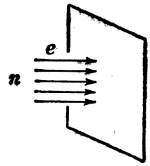
で与えられる．r は円の半径である．測定の結果，$I=1\,\mathrm{A}$, $r=1\,\mathrm{m}$ のとき $B=2\pi$

$\times 10^{-7}$ newton/A·m であった．これが 1A の定義と考えられ (A.8) で $c=1$ にとれば $\mu = 4\pi^2 \times 10^{-7}$ kg·m·s^{-2}A^{-2} ととることに相当する．

荷電粒子（陽子・電子等）が1秒間に n 個ある断面を通過するときに流れる電流の強さは，各粒子の荷電が $e = 1.60 \times 10^{-19}$ coulomb であるから，

$$I = ne = 1.60n \times 10^{-19}\mathrm{A} \qquad \text{(A.9)}$$

で 1A の電流は 6.25×10^{18} 個の荷電粒子が断面を通過することに相当する．



A-2 図

通常，電磁気学においては MKSA 有理化単位系（実用単位），原子物理学では CGS Gauss 単位系（有理化または非有理化）がよく使われる．共に有理化単位系をとったときの MKSA 単位系と CGS 単位系の換算表を次にしるす．

1) 電気的諸量

	MKSA 有理化単位系	CGS 有理化単位（$c = 3\times10^{10}$ cm sec^{-1} とする） 電磁単位	静電単位（Gauss 単位）
荷電	1 As(=1C)	$\sqrt{4\pi}10^{-1}$ cm$^{1/2}$g$^{1/2}$	$\sqrt{4\pi}3\times10^{9}$ cm$^{3/2}$g$^{1/2}$s^{-1}
電流	1 A	$\sqrt{4\pi}10^{-1}$ cm$^{1/2}$g$^{1/2}$s^{-1}	$\sqrt{4\pi}3\times10^{9}$ cm$^{3/2}$g$^{1/2}$s^{-2}
電位	1m^{2}kgs^{-3}A^{-1}(=1V)	$10^8/\sqrt{4\pi}$ cm$^{3/2}$g$^{1/2}$s^{-2}	$1/(\sqrt{4\pi}300)$ cm$^{1/2}$g$^{1/2}$s^{-1}
電場の強さ	1mkgs^{-3}A^{-1}(=1V·m^{-1})	$10^6/\sqrt{4\pi}$ cm$^{1/2}$g$^{1/2}$s^{-2}	$1/(\sqrt{4\pi}3\times10^4)$ cm$^{-1/2}$g$^{1/2}$s^{-1}
抵抗	1m^{2}kgs^{-3}A^{-2}(=1Ω)	$10^9/4\pi$ cm s^{-1}	$1/(36\pi\times10^{11})$ cm^{-1}s
誘電率	1m^{-3}kg^{-1}s^{4}A^2(1F·m^{-1})	$4\pi10^{-11}$ cm^{-2}s^2	$36\pi\times10^9$
静電容量	1m^{-2}kg^{-1}s^{4}A^2(=1F)	$4\pi10^{-9}$ cm^{-1}s^2	$36\pi\times10^{11}$ cm

(V(=volt), Ω(=ohm))

2) 磁気的諸量

	MKSA 有理化単位系	CGS 有理化単位系 電磁単位（Gauss 単位）	静電単位
磁極の強さ	1m^{2}kgs^{-2}A^{-1}=(1Wb)	$10^8/\sqrt{4\pi}$ cm$^{3/2}$g$^{1/2}$s^{-1}	$1/(\sqrt{4\pi}300)$ cm$^{1/2}$g$^{1/2}$
磁場の強さ	1A·m^{-1}	$\sqrt{4\pi}10^{-3}$ cm$^{-1/2}$g$^{1/2}$s^{-1}	$\sqrt{4\pi}3\times10^7$ cm$^{1/2}$g$^{1/2}$s^{-2}
磁位	1AT (ampere turn)	$\sqrt{4\pi}10^{-1}$ cm$^{1/2}$g$^{1/2}$s^{-1}	$\sqrt{4\pi}3\times10^9$ cm$^{3/2}$g$^{1/2}$s^{-2}
磁束	1m^{2}kgs^{-2}A^{-1}(=1Wb)	$10^8/\sqrt{4\pi}$ cm$^{3/2}$g$^{1/2}$s^{-1}	$1/(\sqrt{4\pi}300)$ cm$^{1/2}$g$^{1/2}$
磁束密度	1kgs^{-2}A^{-1}(=Wb·m^{-2})	$10^4/\sqrt{4\pi}$ cm$^{-1/2}$g$^{1/2}$s^{-1}	$1/(\sqrt{4\pi}3\times10^6)$ cm$^{-2/3}$g$^{1/2}$
インダクタンス	1m^{2}kgs^{-2}A^{-2}(=1H)	$10^9/4\pi$ cm	$1/(36\pi\times10^{11})$ cm^{-1}s^2
透磁率	1mkgs^{-2}A^{-2}(=1Hm^{-1})	$10^7/4\pi$	$1/(36\pi\times10^{13})$ cm^{-2}s^2

(Wb(=weber), H(=henry))

CGS, MKSA 単位系の他に素粒子物理学・原子物理学では自然単位がよく用いられる．

これは $\hbar$（または h），c，およびある素粒子（たとえば電子）の質量を1ととる単位である．本書でもしばしばスピン 1/2，1 等ということばを使ったが，これは $\hbar=1$ とした自然単位を使ったことになる．$\hbar$，c，電子質量 m を単位にとることは長さ・時間・質量の単位として次の量をとったことにあたる．

長さ　$\dfrac{\hbar}{mc}=3.8612\times10^{-11}\,\text{cm}.$

時間　$\dfrac{\hbar}{mc^2}=1.2880\times10^{-21}\,\text{sec}.$

質量　$m=9.1066\times10^{-28}\,\text{g}.$

A 3. Clebsch-Gordan 係数 $\langle j_a, m_a, j_b, m_b \mid J, m, j_a, j_b\rangle$ の表

1）$j_a=j_b=\dfrac{1}{2}$

m_a	m_b	J / m	1 / 1	1 / 0	0 / 0	1 / -1
$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$		1			
$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$					1

2）$j_a=1,\ j_b=\dfrac{1}{2}$

m_a	m_b	J / m	$\frac{3}{2}$ / $+\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ / $+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ / $+\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$ / $-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ / $-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$ / $-\frac{3}{2}$
$+1$	$+\frac{1}{2}$		1					
$+1$	$-\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$			
0	$+\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$			
0	$-\frac{1}{2}$					$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	
-1	$+\frac{1}{2}$					$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	
-1	$-\frac{1}{2}$							1

3）$j_a=j_b=1$

m_a	m_b	J	2	2	1	2	1	0	2	1	2
		m	+2	+1	+1	0	0	0	−1	−1	2
+1	+1		1								
+1	0			$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$						
0	+1			$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$						
+1	−1					$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$			
0	0					$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$			
−1	+1					$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$			
0	−1								$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	
−1	0								$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	
−1	−1										1

4）$j_a=\frac{3}{2}$, $j_b=\frac{1}{2}$

m_a	m_b	J	2	2	1	2	1	2	1	2
		m	+2	+1	+1	0	0	−1	−1	−2
$+\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$		1							
$+\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$					
$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$					
$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$					$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$			
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$					$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$			
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$							$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	
$-\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$							$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{3}{4}}$	
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$									1

5) $j_a=\frac{3}{2},\ j_b=1$

m_a	m_b	J / m	$\frac{5}{2}$ / $+\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$ / $+\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ / $+\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$ / $+\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$ / $+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ / $+\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$ / $-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$ / $-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ / $-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$ / $-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ / $-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$ / $-\frac{5}{2}$
$+\frac{3}{2}$	$+1$		1											
$+\frac{3}{2}$	0			$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$									
$+\frac{1}{2}$	$+1$			$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$									
$+\frac{3}{2}$	-1					$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$						
$+\frac{1}{2}$	0					$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$						
$-\frac{1}{2}$	$+1$					$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{8}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$						
$+\frac{1}{2}$	-1								$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{8}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$			
$-\frac{1}{2}$	0								$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$			
$-\frac{3}{2}$	$+1$								$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$			
$-\frac{1}{2}$	-1											$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	
$-\frac{3}{2}$	0											$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	
$-\frac{3}{2}$	-1													1

A 4. 種々の関数

1) Legendre の球関数 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ の表.

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}},$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \qquad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi},$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right), \quad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}, \quad Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{2i\varphi},$$

$$Y_3^0 = \sqrt{\frac{7}{4\pi}}\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right), \qquad Y_3^1 = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{4\pi}}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)e^{i\varphi},$$

$$Y_3^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\sin^2\theta\cos\theta e^{2i\varphi}, \qquad Y_3^3 = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{4\pi}}\sin^3\theta\, e^{3i\varphi}.$$

$$(Y_l^m)^* = (-1)^m Y_l^{-m}.$$

2) Legendre 関数 $P_l(z)$

$$P_0(z) = 1, \qquad P_1(z) = z, \qquad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \qquad P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z),$$

$$P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3), \qquad P_5(z) = \frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z),$$

$$P_l(z) = \frac{1}{l!2^l}\frac{d^l}{dz^l}(z^2 - 1)^l,$$

$$P_l(1) = 1, \qquad P_l(z) = (-1)^l P_l(-z), \qquad \int_{-1}^{1} P_l(z)P_{l'}(z)dz = \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}.$$

3) 球面 Bessel 関数 $j_l(z)$

$$j_l(z) = (-z)^l\left(\frac{d}{zdz}\right)^l j_0(z),$$

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad j_1(z) = \frac{\sin z - z\cos z}{z^2}, \quad j_2(z) = \frac{3(\sin z - z\cos z) - z^2\sin z}{z^3}.$$

通常の n 次の Bessel 函数を $J_n(z)$ と書くと次の関係がある.

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}j_n(z).$$

A 5. 粒子のエネルギー, 運動量, 速度, 波長, 振動数

粒子の全エネルギー E, 運動量 p, 速度 v の間には次の関係がある.

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

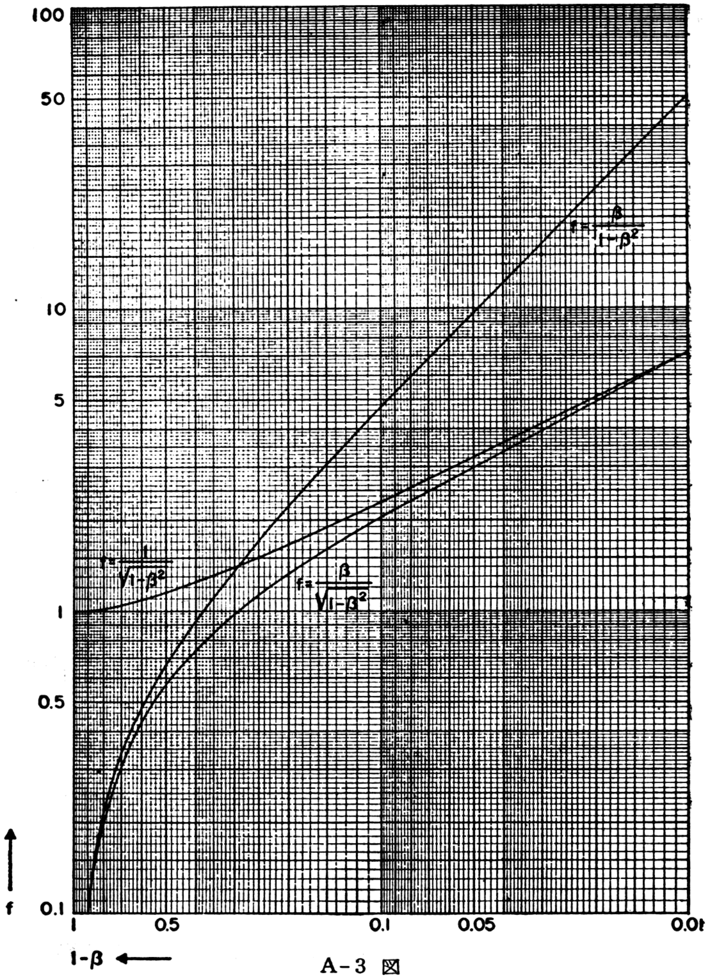
$$p = \frac{mc\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

mは粒子の質量, c は光速度である.

E/mc^2, p/mc はそれぞれ β のみの関数で A－3 図に示されている.

波長 λ, 振動数 ν と粒子のエネルギー E, 運動量 p の関係は次式で与えられる.

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad \nu = \frac{h}{E}.$$



A-3 図

cp	$\bar{\lambda}\left(=\frac{\lambda}{2\pi}\right)$	λ	E	ν
10^{-9} eV	2.0×10^{4} cm	1.2×10^{5} cm	10^{-9} eV	2.4×10^{5} cycle
10^{-6}	2.0×10	1.2×10^{2}	10^{-6}	2.4×10^{8}
10^{-3}	2.0×10^{-2}	1.2×10^{-1}	10^{-3}	2.4×10^{11}
1	2.0×10^{-5}	1.2×10^{-4}	1	2.4×10^{14}
10^{3}	2.0×10^{-8}	1.2×10^{-7}	10^{3}	2.4×10^{17}
10^{6}	2.0×10^{-11}	1.2×10^{-10}	10^{6}	2.4×10^{20}
10^{9}	2.0×10^{-14}	1.2×10^{-13}	10^{9}	2.4×10^{23}

A 6. Lorentz 座標系の変換

A） 4 次元ベクトル a_μ (a_1, a_2, a_3, a_0) の Lorentz 変換

1） 変換速度 v が z 軸（第3軸）に平行のとき，

$$a_1' = a_1,\quad a_2' = a_2,\quad a_3' = \frac{a_3 - \beta a_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad a_0' = \frac{a_0 - \beta a_3}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\beta = \frac{v}{c}\right).$$

2） 任意の方向への **Lorentz** 変換.

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\frac{\boldsymbol{\beta a}}{1+\sqrt{1-\beta^2}} - a_0\right],$$

$$a_0' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(a_0 - \boldsymbol{\beta a}),\ \left(\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c},\ \beta = \frac{v}{c}\right).$$

B） 粒子速度の変換

1） 粒子速度 $\boldsymbol{u}$ と変換速度 $\boldsymbol{v}$ が同方向のとき，

$$u' = \frac{u+v}{1+\dfrac{u}{c}\cdot\dfrac{v}{c}}.$$

2） $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の方向が任意のとき，

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u}\sqrt{1-\beta^2} + \boldsymbol{\beta}\left[\dfrac{\boldsymbol{\beta u}}{1+\sqrt{1-\beta^2}} - c\right]}{1 - \dfrac{\boldsymbol{\beta u}}{c}}.$$

C） 任意の Lorentz 座標系における 2 粒子間の相対速度

任意の Lorentz 座標系で4次元運動量 $p_\mu^{(1)}$, $p_\mu^{(2)}$ の2粒子があるとき，この2粒子間の相対速度 v の大きさを求める.

v は粒子2が静止している Lorentz 座標系からながめたときの粒子1の速度である. 二つの4次元運動量の内積 $p^{(1)}\cdot p^{(2)}$ は Lorentz 不変量でどの Lorentz 座標系で計算しても同じ値を持つ. 特に粒子2が静止している系で求めると，

$$p^{(1)}\cdot p^{(2)} = -E_{21}m_2,\quad E_{21} = -\frac{p^{(1)}\cdot p^{(2)}}{m_2}.$$

E_{21} は粒子1の，粒子2の静止系でのエネルギー，m_1, m_2 は粒子 1, 2 の質量である. 粒子1の運動量 p_{21} は同じ Lorentz 系で，

$$p_{21}^2 = \frac{E_{21}^2}{c^2} - m_1^2c^2 = \frac{(p^{(1)}\cdot p^{(2)})^2}{m_2^2c^2} - m_1^2c^2.$$

したがって v は，

$$v^2 = \frac{c^4p_{21}^2}{E_{21}^2} = \frac{c^2(p^{(1)}\cdot p^{(2)})^2 - m_1^2m_2^2c^6}{(p^{(1)}\cdot p^{(2)})^2}$$

となる.

D） 2 粒子間の衝突の不変量

2粒子 1, 2 が衝突して 3, 4 になる衝突を考える. それぞれの粒子の4次元運動量を $p_\mu^{(i)} (i = 1, 2, 3, 4)$, 質量を m_i とする. エネルギー・運動量の保存則より，

$$p_\mu^{(1)}+p_\mu^{(2)}=p_\mu^{(3)}+p_\mu^{(4)}$$

の関係がある．

4個のベクトル $p_\mu^{(i)}$ の任意の組の内積 $p^{(i)}\cdot p^{(j)}(\equiv p_\mu^{(i)}\cdot p_\mu^{(j)})$ は Lorentz 変換しても変らない不変量である．

a） 同一のベクトルの内積

$$(p^{(i)})^2=-m_i^2c^2.$$

b） 異なるベクトルの内積

4個の $p_\mu^{(i)}$ のうちエネルギー・運動量の保存則より3個が独立である．これより ${}_3C_2=3$ 組の内積が作られるが，実際に独立なのは2組である．すなわち 3 組の内積の代りに，

$$s=-(p^{(1)}+p^{(2)})^2,\quad t=-(p^{(1)}-p^{(3)})^2,\quad u=-(p^{(1)}-p^{(4)})^2$$

の3個の不変量を作ると，

$$s+t+u=(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2)c^2$$

の関係があり，s, t, u のうち2個が独立である．この2個の自由度は衝突のエネルギー・散乱角の二つの自由度に対応する．実験質系（$\boldsymbol{p}^{(2)}=0$），重心系（$\boldsymbol{p}^{(1)}+\boldsymbol{p}^{(2)}=0$）では s は系のエネルギーのみに関係し，t, u はエネルギー・散乱角の両方に関係する．

A 7. 元　素

周 期 律

週期	元素と原子番号
1	H 1　He 2
2	Li 3　Be 4　B 5　C 6　N 7　O 8　F 9　Ne 10
3	Na 11　Mg 12　Al 13　Si 14　P 15　S 16　Cl 17　A 18
4	K 19　Ca 20　（遷移金属）Sc 21　Ti 22　V 23　Cr 24　Mn 25　Fe 26　Co 27　Ni 28　Cu 29　Zn 30
	Ga 31　Ge 32　As 33　Se 34　Br 35　Kr 36
5	Rb 37　Sr 38　Y 39　Zr 40　Nb 41　Mo 42　Tc 43　Ru 44　Rh 45　Pd 46　Ag 47　Cd 48
	In 49　Sn 50　Sb 51　Te 52　I 53　Xe 54
6	Cs 55　Ba 56　（稀土類元素）La 57　Ce 58　Pr 59　Nd 60　Pm 61　Sm 62　Eu 63　Gd 64　Tb 65　Dy 66　Ho 67　Er 68　Tm 69　Yb 70
	Lu 71　Hf 72　Ta 73　W 74　Re 75　Os 76　Ir 77　Pt 78　Au 79　Hg 80
	Tl 81　Pb 82　Bi 83　Po 84　At 85　Rn 86
7	Fr 87　Ra 88　Ac 89　Th 90　Pa 91　U 92　Np 93　Pu 94　Am 95　Cm 96　Bk 97　Cf 98　E 99　Fm 100　Mv 101　Nl 102

問 題 解 答

第 2 章

[2.1] 部分積分してみると，$-\hbar^2\partial^2/\partial\varphi^2$ はエルミット量であるが，$-\hbar^2\partial^2/\partial r^2$，$-\hbar^2\partial^2/\partial\theta^2$ はそうでない．

$$-\hbar^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\,r^2\frac{\partial}{\partial r}=-\hbar^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r,\quad -\hbar^2\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

が適当な境界条件の下でエルミットである．

[2.2] (2.52) をつぎつぎに解いていけばよい．

$$\begin{aligned}W=H_{00}'&+\sum{}'\frac{H_{0n}'H_{n0}'}{E_0-E_n}+\sum{}''\frac{H_{0n}'H_{nm}'H_{m0}'}{(E_0-E_n)(E_0-E_m)}-\sum{}'\frac{H_{0n}'H_{n0}'H_{00}'}{(E_0-E_n)^2}\\&+\sum{}'''\frac{H_{0n}'H_{nm}'H_{ml}'H_{l0}'}{(E_0-E_n)(E_0-E_m)(E_0-E_l)}-\sum{}''\frac{H_{0n}'H_{nm}'H_{m0}'H_{00}'}{(E_0-E_n)(E_0-E_m)^2}\\&-\sum{}''\frac{H_{0n}'H_{nm}'H_{m0}'H_{00}'}{(E_0-E_n)^2(E_0-E_m)}-\sum{}''\frac{H_{0n}'H_{n0}'H_{0m}'H_{m0}'}{(E_0-E_n)^2(E_0-E_m)}\\&+\sum{}'\frac{H_{0n}'H_{n0}'H_{00}'^2}{(E_0-E_n)^3}+\cdots.\end{aligned}$$

ただし，$H_{nm}'=\langle n|H'|m\rangle$ で和記号の $'$ は l, m, n について 1 からの和（0 は除く）を意味する．上の式は，

$$\begin{aligned}W=H_{00}'&+\sum{}'\frac{H_{0n}'H_{n0}'}{E_0+\Delta E_0-E_n}+\sum{}''\frac{H_{0n}'H_{nm}'H_{m0}'}{(E_0+\Delta E_0-E_n)(E_0+\Delta E_0-E_m)}\\&+\sum{}'''\frac{H_{0n}'H_{nm}'H_{ml}'H_{l0}'}{(E_0+\Delta E_0-E_n)(E_0+\Delta E_0-E_m)(E_0+\Delta E_0-E_m)}+\cdots,\end{aligned}$$

$$\Delta E_0=H_{00}'+\sum{}'\frac{H_{0n}'H_{n0}'}{E_0-E_n}$$

の分母の ΔE_0 をべき展開したものと等しい．

[2.3] 運動量 $\boldsymbol{k}$ の陽子が散乱されて運動量 $\boldsymbol{p}$ になる微分断面積は，

$$d\sigma=\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)^2\frac{4M^2}{\{\mu^2c^2+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})^2\}^2}.$$

$\mu\to0$ のとき，これは Rutherford 散乱 (2.76) となる．

第 3 章

[3.1] 本文参照

[3.2] 本文参照

[3.3] $u_\pm$ が σ_z の固有値 ±1 の固有状態のことから σ_z は (3.28) で与えられる．σ_x, σ_y から作った $\sigma_\pm=(\sigma_x\pm i\sigma_y)/2$ は (3.29) の交換関係より，

$$\sigma_z\sigma_\pm=\pm\sigma_\pm,\quad \sigma_+\sigma_-=\frac{1+\sigma_z}{2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

をみたす．第一式より $\sigma_\pm$ は，

$$\sigma_+=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_-=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

の形を持つ．σ_x, σ_y がエルミット量のことより，$\sigma_\pm$ は相互にエルミット共役量である．したがって $a=d=0$, $b=c^*$. さらに $\sigma_+\sigma_-=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $b^*b=1$. したがって，$b=e^{i\varphi}$ (φ は実数)．

$$\sigma_x=\begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix} 0 & -ie^{i\varphi} \\ ie^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\sigma_z=\pm 1$ の固有状態 $u_\pm$ の位相は不定であるから，(3.22) の代りに，

$$u_+'=\begin{pmatrix} e^{i\varphi_+} \\ 0 \end{pmatrix},\quad u_-'=\begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\varphi_-} \end{pmatrix}$$

ととりうる．このような位相変化により $\sigma_\pm$ の期待値は $e^{\pm i(\varphi_- -\varphi_+)}$ だけ変化する．$\varphi=\varphi_- -\varphi_+$ とおけば，これは (3.28) の $\boldsymbol{\sigma}$ をここで求めた $\boldsymbol{\sigma}$ の表示に直すことに相当する．

[3.4] 任意の軸方向を z 方向にとり，粒子のスピン角運動量をその z 成分が対角行列になるようにとっておく．

$$S_z=\frac{\hbar}{2}\sigma_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

z 軸のまわりの角度 2π の回転で，

$$\psi\to e^{i\frac{2\pi}{\hbar}S_z}\psi=e^{i\pi\sigma_z}\psi=e^{\pm i\pi}\psi=-\psi.$$

[3.5] 2個の角運動量演算子を $\boldsymbol{M}^{(1)}$, $\boldsymbol{M}^{(2)}$, それらの大きさが $j_1\hbar$, $1/2\hbar$ の状態を考える．$M_z^{(1)}$ が $m_1\hbar$ の固有状態を $\psi^{(1)}{}_{j_1,m_1}$, $M_z^{(2)}$ が $m_2\hbar$ の固有状態を $\psi^{(2)}{}_{1/2,m_2}$ と書く．合成系の角運動量 $\boldsymbol{M}$ の z 成分 M_z $(=M_z^{(1)}+M_z^{(2)})$ が最大の状態は $\psi^{(1)}{}_{j_1,j_1}\psi^{(2)}{}_{1/2,1/2}$ で，このときの M_z の固有値 m は $m=j_1+1/2$ である．したがって合成系の角運動量の大きさ J は $J=j_1+1/2$ である．

合成系の角運動量の大きさ J, M_z の大きさ m の固有状態を $\psi_{J,m}$ と書くと，

$$\psi_{j_1+1/2,j_1+1/2}=\psi^{(1)}{}_{j_1,j_1}\psi^{(2)}{}_{1/2,1/2}.$$

この状態に $M_-(=M_-^{(1)}+M_-^{(2)})$ を n 回くり返して演算すると $J=j_1+1/2, m=j_1+1/2-n$ の固有状態が得られる．(3.15)～(3.17) により，

$$(M_-)^n\psi_{j_1+1/2,j_1+1/2}$$

$$=\hbar^n\prod_{\lambda=0}^{n-1}\sqrt{\left(j_1+\frac{3}{2}\right)\left(j_1+\frac{1}{2}\right)-\left(j_1+\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(j_1-\frac{1}{2}-\lambda\right)}\psi_{j_1+1/2,j_1+1/2-n}$$

$$=\hbar^n\prod_{\lambda=0}^{n-1}\sqrt{(1+\lambda)(2j_1+1-\lambda)}\ \psi_{j_1+1/2,j_1+1/2-n}. \qquad (1)$$

一方において，

$$(M_-)^n\psi^{(1)}{}_{j_1,j_1}\psi^{(2)}{}_{1/2,1/2}=(M_-^{(1)}+M_-^{(2)})^n\psi^{(1)}{}_{j_1,j_1}\psi^{(2)}{}_{1/2,1/2}$$
$$=(M_-^{(1)})^n\psi^{(1)}{}_{j_1,j_1}\psi^{(2)}{}_{1/2,1/2}+n(M_-^{(1)})^{n-1}\psi^{(1)}{}_{j_1,j_1}M_-^{(2)}\psi^{(2)}{}_{1/2,1/2}.$$

ここで $(M_-^{(2)})^\lambda\psi^{(2)}{}_{1/2,1/2}=0$ $(\lambda\geqq 2)$ を用いた．(3.15)～(3.17) を用いると，

$$(M_-)^n\psi^{(1)}{}_{j_1,j_1}\psi^{(2)}{}_{1/2,1/2}=\hbar^n\prod_{\lambda=0}^{n-1}\sqrt{(j_1+1)j_1-(j_1-\lambda)(j_1-\lambda-1)}\,\psi^{(1)}{}_{j_1,j_1-n}\psi^{(2)}{}_{1/2,1/2}$$

$$+n\hbar^n\prod_{\lambda=0}^{n-2}\sqrt{(j_1+1)j_1-(j_1-\lambda)(j_1-\lambda-1)}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}\,\psi^{(1)}{}_{j_1,j_1+1-n}\psi^{(2)}{}_{1/2,-1/2}$$

$$=\hbar^n\prod_{\lambda=0}^{n-1}\sqrt{(1+\lambda)(2j_1-\lambda)}\,\psi^{(1)}{}_{j_1,j_1-n}\psi^{(2)}{}_{1/2,1/2}$$

$$+n\hbar^n\prod_{\lambda=0}^{n-2}\sqrt{(1+\lambda)(2j_1-\lambda)}\,\psi^{(1)}{}_{j_1,j_1+1-n}\psi^{(2)}{}_{1/2,-1/2} \quad (2)$$

が得られる．(1)，(2) をくらべると $m=j_1+1/2-n$ とおいて，

$$\left\langle j_1,m-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,\middle|\,j_1+\frac{1}{2},m,j_1,\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2j_1-(n-1)}{2j_1+1}}=\sqrt{\frac{j_1+m+1/2}{2j_1+1}},$$

$$\left\langle j_1,m+\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\,\middle|\,j_1+\frac{1}{2},m,j_1,\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{n}{2j_1+1}}=\sqrt{\frac{j_1-m+1/2}{2j_1+1}} \quad (3)$$

が得られる．

M_z の固有値 m の状態は $\psi^{(1)}{}_{j_1,m-1/2}\psi^{(2)}{}_{1/2,1/2}$ と $\psi^{(1)}{}_{j_1,m+1/2}\psi^{(2)}{}_{1/2,-1/2}$ の2個がある．ただし $m\pm 1/2$ が j_1 をこえないためには m の最大値は $j_1-1/2$ であり，$m=j_1+1/2$ のときはただ一つの状態 $\psi_{j_1+1/2,j_1+1/2}$ しか存在しない．このことより，$J=j_1+1/2$ の状態の他に $J=j_1-1/2$ の状態が存在することがわかる．$\psi_{j_1-1/2,m}$ と $\psi_{j_1+1/2,m}$ の直交関係より，

$$\left\langle j_1,m-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,\middle|\,j_1-\frac{1}{2},m,j_1,\frac{1}{2}\right\rangle=-\sqrt{\frac{j_1-m+1/2}{2j_1+1}},$$

$$\left\langle j_1,m+\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\,\middle|\,j_1-\frac{1}{2},m,j_1,\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{j_1+m+1/2}{2j_1+1}}.$$

[3.6] 質点 A, B, C の座標を $\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$, $\boldsymbol{r}_C$, 運動量を $\boldsymbol{p}_A$, $\boldsymbol{p}_B$, $\boldsymbol{p}_C$ とする．重心 O の座標 $\boldsymbol{R}$, 質点間の相対座標 $\boldsymbol{r}_{AB}$, $\boldsymbol{r}_{BC}$, $\boldsymbol{r}_{CA}$ は，

$$\boldsymbol{R}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}_B+\boldsymbol{r}_C),\quad \boldsymbol{r}_{AB}=\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B,\quad \boldsymbol{r}_{BC}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_C,\quad \boldsymbol{r}_{CA}=\boldsymbol{r}_C-\boldsymbol{r}_A.$$

これらに対応する運動量（全運動量 $\boldsymbol{P}$, 相対運動の運動量 $\boldsymbol{p}_{AB}$, $\boldsymbol{p}_{BC}$, $\boldsymbol{p}_{CA}$）は，

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_A+\boldsymbol{p}_B+\boldsymbol{p}_C,\quad \boldsymbol{p}_{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_A-\boldsymbol{p}_B),\boldsymbol{p}_{BC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_B-\boldsymbol{p}_C),\quad \boldsymbol{p}_{CA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_C-\boldsymbol{p}_A)$$

で与えられる．

重心 O のまわりの全角運動量 $\boldsymbol{M}_O$ は，

$$\boldsymbol{M}_O=(\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{p}_A+(\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{p}_B+(\boldsymbol{r}_C-\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{p}_C$$

$$=\frac{2}{3}(\boldsymbol{r}_{AB}\times\boldsymbol{p}_{AB}+\boldsymbol{r}_{BC}\times\boldsymbol{p}_{BC}+\boldsymbol{r}_{CA}\times\boldsymbol{p}_{CA}).$$

一方，AB の重心 D のまわりの角運動量 $\boldsymbol{M}_D$ は

$$\boldsymbol{M}_D=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{r}_{AB}\times\boldsymbol{p}_A+(-\boldsymbol{r}_{AB})\times\boldsymbol{p}_B\}+\left(\boldsymbol{r}_C-\frac{\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}_B}{2}\right)\times\boldsymbol{p}_C$$
$$=\boldsymbol{r}_{AB}\times\boldsymbol{p}_{AB}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_{CA}-\boldsymbol{r}_{BC})\times\boldsymbol{p}_C$$

となる．

系の運動エネルギー H_0 は，

$$H_0=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}_A{}^2+\boldsymbol{p}_B{}^2+\boldsymbol{p}_C{}^2)=\frac{\boldsymbol{P}^2}{6m}+\frac{2}{3m}(\boldsymbol{p}_{AB}{}^2+\boldsymbol{p}_{BC}{}^2+\boldsymbol{p}_{CA}{}^2)$$

となる．

$\boldsymbol{P}^2$ は粒子間の相対座標と可換であり，したがって M_O, M_D とも可換になる．相対運動の運動エネルギーと M_O, M_D の交換関係を調べると，

$$[\boldsymbol{p}_{AB}{}^2,\ \boldsymbol{r}_{AB}]=-2i\hbar\boldsymbol{p}_{AB},\quad[\boldsymbol{p}_{AB}{}^2,\ \boldsymbol{r}_{BC}]=i\hbar\boldsymbol{p}_{AB},\quad[\boldsymbol{p}_{AB}{}^2,\ \boldsymbol{r}_{CA}]=i\hbar\boldsymbol{p}_{AB}$$

等より，

$$[\boldsymbol{p}_{AB}{}^2,\boldsymbol{r}_{AB}\times\boldsymbol{p}_{AB}+\boldsymbol{r}_{BC}\times\boldsymbol{p}_{BC}+\boldsymbol{r}_{CA}\times\boldsymbol{p}_{CA}]=i\hbar\boldsymbol{p}_{AB}\times(-2\boldsymbol{p}_{AB}+\boldsymbol{p}_{BC}+\boldsymbol{p}_{CA})$$
$$=-3i\hbar\boldsymbol{p}_{AB}\times\boldsymbol{p}_{AB}=0$$

であるから，$[\boldsymbol{H}_0,\ \boldsymbol{M}_O]=0$ となる．

また，

$$[H_0,\ \boldsymbol{M}_D]=\frac{2}{3m}\left[\boldsymbol{p}_{AB}{}^2+\boldsymbol{p}_{BC}{}^2+\boldsymbol{p}_{CA}{}^2,\ \boldsymbol{r}_{AB}\times\boldsymbol{p}_{AB}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_{CA}-\boldsymbol{r}_{BC})\times\boldsymbol{p}_C\right]$$
$$=\frac{2i\hbar}{3m}\left\{(-2\boldsymbol{p}_{AB}+\boldsymbol{p}_{BC}+\boldsymbol{p}_{CA})\times\boldsymbol{p}_{AB}+\frac{3}{2}(\boldsymbol{p}_{BC}-\boldsymbol{p}_{CA})\times\boldsymbol{p}_C\right\}$$
$$=\frac{i\hbar}{2m}(\boldsymbol{p}_A+\boldsymbol{p}_B)\times\boldsymbol{p}_C=\frac{i\hbar}{2m}\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{p}_C$$

となり，もし系の全運動量 $\boldsymbol{P}=0$ ならば H_0 と $\boldsymbol{M}_D$ は可換になる．

次に系のポテンシャルエネルギー V,

$$V=V_{AB}(r_{AB})+V_{BC}(r_{BC})+V_{CA}(r_{CA})$$

と $\boldsymbol{M}_O$, $\boldsymbol{M}_D$ の交換関係を求める．

$$[V_{AB}(r_{AB}),\ \boldsymbol{p}_{AB}]=i\hbar\frac{dV_{AB}}{dr_{AB}}\frac{\partial r_{AB}}{\partial\boldsymbol{r}_{AB}}=i\hbar\frac{\boldsymbol{r}_{AB}}{r_{AB}}\frac{dV_{AB}}{dr_{AB}},$$
$$[V_{AB}(r_{AB}),\ \boldsymbol{p}_{BC}]=-\frac{i\hbar}{2}\frac{\boldsymbol{r}_{AB}}{r_{AB}}\frac{dV_{AB}}{dr_{AB}},$$
$$[V_{AB}(r_{AB}),\ \boldsymbol{p}_{CA}]=-\frac{i\hbar}{2}\frac{\boldsymbol{r}_{AB}}{r_{AB}}\frac{dV_{AB}}{dr_{AB}}$$

を用いると，

$$[V_{AB}(r_{AB}),\ \boldsymbol{M}_O]=2i\hbar\left\{\left(\boldsymbol{r}_{AB}-\frac{\boldsymbol{r}_{BC}}{2}-\frac{\boldsymbol{r}_{CA}}{2}\right)\times\frac{\boldsymbol{r}_{AB}}{r_{AB}}\right\}\frac{dV_{AB}}{dr_{AB}}$$
$$=i\hbar\left(\boldsymbol{r}_{AB}\times\frac{\boldsymbol{r}_{AB}}{r_{AB}}\right)\frac{dV_{AB}}{dr_{AB}}=0$$

等が得られる．これより，

$$[V,\ \boldsymbol{M_O}]=0.$$

一方，

$$[V_{AB}(r_{AB}),\boldsymbol{M_D}]=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_{CA}-\boldsymbol{r}_{BC})\times[V_{AB}(r_{AB}),\boldsymbol{p}_C]=0,$$

$$[V_{BC}(r_{BC}),\boldsymbol{M_D}]=\boldsymbol{r}_{AB}\times[V_{BC}(r_{BC}),\ \boldsymbol{p}_{AB}]+\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_{CA}-\boldsymbol{r}_{BC})\times[V_{BC}(r_{BC}),\ \boldsymbol{p}_C]$$

$$=-\frac{i\hbar}{2}\left\{\boldsymbol{r}_{AB}\times\frac{\boldsymbol{r}_{BC}}{r_{BC}}+(\boldsymbol{r}_{CA}-\boldsymbol{r}_{BC})\times\frac{\boldsymbol{r}_{BC}}{r_{BC}}\right\}\frac{dV_{BC}}{dr_{BC}}=0,$$

$[V_{CA}(r_{CA}),\ \boldsymbol{M_D}]=0$ となり，$[V,\ \boldsymbol{M_D}]=0$.

結局，$\boldsymbol{M_O}$ は系の Hamiltonian と可換で保存量，$\boldsymbol{M_D}$ は $\boldsymbol{P}=0$ ならば Hamiltonian と可換で保存されるが，一般に $\boldsymbol{P}\neq 0$ のときは $[H_0,\ \boldsymbol{M_D}]\neq 0$ のため保存されない．

また $\boldsymbol{P}=0$ のときは $\boldsymbol{M_O}=\boldsymbol{M_D}$ であることを容易に示しうる．

第 4 章

〔4.1〕 物体が静止してみえる座標系で，物体の両端の座標を z_1, z_2 としよう．z 方向に速度 v で物体が走っている座標系（速度 $-v$ の Lorentz 変換）に移ると，(4.3) より，

$$z_1'=\frac{z_1+vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$z_2'=\frac{z_2+vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

となる．両端の間の距離はこれより静止座標系ではかった距離の γ 倍になる．

$$z_2'-z_1'=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma(z_2-z_1).$$

〔4.2〕 本文参照

〔4.3〕 本文参照

〔4.4〕 スピン 1/2 粒子が n 個からなる系の全スピン角運動量 S は，スピンの z 成分の最大値が $n/2$ であるから，$S=n/2,\ n/2-1,\ \cdots$ の値をとりうる．したがって偶数個のスピン 1/2 粒子を集めると整数スピンの系を作ることができ，奇数個のスピン 1/2 粒子を集めると半整数スピンの系が作れる．任意のスピンの粒子がこのようにスピン 1/2 粒子の合成により作られていると考えよう．時間半転を 2 回くり返すと，スピン 1/2 粒子の波動関数は符号を変えるが，n 個のスピン 1/2 粒子からなる系の波動関数は $(-1)^n$ 倍になる．したがって，整数スピン粒子（n：偶数）の波動関数は元のまま，半整数スピン粒子（n：奇数）の波動関数は符号を変える．

〔4.5〕

(3.2) の変換に対し $\partial x'/\partial x,\ \cdots$ 等を求め Δ を計算すると，

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

同様に (4.52) に対し,

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-1.$$

さて，座標系の変換（空間回転または空間反転）を2度行ない $(x, y, z)\to(x', y', z')\to(x'', y'', z'')$ と変化したとする.

$$\frac{\partial(x'',y'',z'')}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x''}{\partial x} & \frac{\partial x''}{\partial y} & \frac{\partial x''}{\partial z}\\ \frac{\partial y''}{\partial x} & \frac{\partial y''}{\partial y} & \frac{\partial y''}{\partial z}\\ \frac{\partial z''}{\partial x} & \frac{\partial z''}{\partial y} & \frac{\partial z''}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x''}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial x''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial x''}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}, & \cdots\cdots\\ \frac{\partial y''}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial y''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial y''}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}, & \cdots\cdots\\ \frac{\partial z''}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial z''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial z''}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}. & \cdots\cdots\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial x''}{\partial x'} & \frac{\partial x''}{\partial y'} & \frac{\partial x''}{\partial z'}\\ \frac{\partial y''}{\partial x'} & \frac{\partial y''}{\partial y'} & \frac{\partial y''}{\partial z'}\\ \frac{\partial z''}{\partial x'} & \frac{\partial z''}{\partial y'} & \frac{\partial z''}{\partial z'}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z}\\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z}\\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z}\end{vmatrix}=\frac{\partial(x'',y'',z'')}{\partial(x',y',z')}\cdot\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)}.$$

右手座標系から左手座標系への任意の変換は，空間反転と適当な空間回転を組み合せて得られる．上の関係からこの際の Δ は回転に対する $\Delta(=+1)$ と反転に対する $\Delta(=-1)$ の積で $\Delta=-1$ となる.

[4.6] 本文参照

第 5 章

[5.1] 本文参照

第 6 章

[6.1] 光の平面波は $a_0=0$ のようにゲージをえらぶと,

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}(A_0=0).$$

電場，磁場は (6.8) より,

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{a}e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)},$$

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$$

である．Lorentz 条件より $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=0$ であるから，$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{a}$ は直交し，また $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}$ はこの二つのベクトルに直交する．そうして $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}$ 方向の3個の単位ベクトルは右手直交座標系を作る.

さて，$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ を測定するときは，その実数部が測定値に対応する．

$$\mathrm{Re}\boldsymbol{E}=-\frac{\omega}{c}\boldsymbol{a}\sin(\boldsymbol{kr}-\omega t),\ \ \mathrm{Re}\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}\sin(\boldsymbol{kr}-\omega t).$$

(Re は実数部の意味)．$\sin(\boldsymbol{kr}-\omega t)<0$ のときを考えると，$\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{a}$ 方向，$\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}$ 方向を向くから，光の進行方向，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ は右手直交座標系を作る．$\sin(\boldsymbol{kr}-\omega t)>0$ のときは E は $-\boldsymbol{a}$ 方向，H は $-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}$ 方向を向く．$\boldsymbol{k}$，$-\boldsymbol{a}$，$-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}$ 方向の3個の単位ベクトルも右手座標系を作るので結論は変りない．

〔6.2〕 本文参照

〔6.3〕 $H=H_0+H'$,　　$H_0=\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{m\omega^2}{2}x^2$,　　$H'=g\sqrt{\hbar\omega^3m}x.$

H_0 を無摂動系，H' を摂動系として扱う．

量子が1個存在する状態 ψ を無摂動系での量子が 0, 1, 2, ･･･ 個存在する状態 $\psi_0,\psi_1,\psi_2,\cdots$ の和として表わす．

$$\psi=c_0\psi_0+c_1\psi_1+c_2\psi_2+\cdots.$$

H' の1次の計算では（§2.5 参照），

$$c_n=\frac{\langle n|H'|1\rangle}{E_1-E_n}\ \ (n\neq 1).$$

H' を量子数の増減の演算子 a，$a^\dagger$ で書くと，(6.30) により，

$$H'=g\omega\hbar\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}.$$

したがって，$\langle 0|H'|1\rangle=\dfrac{g\omega\hbar}{\sqrt{2}}$，$\langle 2|H'|1\rangle=g\omega\hbar.$

$\langle n|H'|1\rangle=0$ $(n\neq 0,2)$，が得られる．

$E_1-E_0=E_2-E_1=\hbar\omega$ であるから，結局次式が得られる．

$$\psi=\psi_1+g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0-\psi_2\right).$$

〔6.4〕 i) 仮定により $[A,a]=0$. この式のエルミット共役をとると，$[a^\dagger,A^\dagger]=[a^\dagger,A]=0$. ($A$ のエルミット性 $A^\dagger=A$ を使った)．

さて，$[A,a^\dagger a]=[A,a^\dagger]a+a^\dagger[A,a]$ と書けるから，$[A,a^\dagger a]=0$.

ii) i) と同様に $\{A,a\}=\{A,a^\dagger\}=0$. $[A,a^\dagger a]=\{A,a^\dagger\}a-a^\dagger\{A,a\}=0$.

〔6.5〕 本文参照

〔6.6〕 光子の電子による散乱で，散乱前の光子の運動量を $\boldsymbol{p}$，散乱後の運動量を $\boldsymbol{q}$ としよう．電子の運動エネルギーは小さいので，$|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{q}|$ が成立する．終状態の光子 $\boldsymbol{q}$ の状態密度 ρ は，光子のスピン方向を決めておけば，

$$\rho dE=\left(\frac{L}{2\pi c}\right)^3\frac{\omega^2}{\hbar}d\Omega\, dE$$

となる．ω は光子 $\boldsymbol{q}$ の振動数$\left(\omega=\dfrac{cq}{\hbar}\right)$ である．(6.65) 参照．

$\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{q}$ の遷移行列を T と書くと，散乱の微分断面積は，

$$d\sigma = \frac{L^3}{c}\frac{2\pi}{\hbar}|T|^2\rho.$$

摂動項を $\dfrac{e^2}{2mc^2}A^2$ と考えて T を求めると，(6.43) を用いて，

$$T = 2\frac{e^2}{2mc^2}\frac{1}{L^3}\frac{c^2\hbar}{2\omega}\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0.$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ は光子 $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ の偏りのベクトルである．

これより，$d\sigma = \dfrac{d\Omega}{4\pi^2}\left(\dfrac{e^2}{2mc^2}\right)^2|\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2.$

終状態の光子の偏りについての和をとり，始状態の光子の偏りにつき平均すると (204 ページ参照)，

$$|\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 \to \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta).$$

θ は $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ の間の角度である．全断面積 σ は，

$$\sigma = \int d\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi mc^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}r_0^2 \approx 6.6\times10^{-25}\,\mathrm{cm}^2.$$

$r_0 \equiv \dfrac{e^2}{4\pi mc^2} \approx 2.82\times10^{-13}\,\mathrm{cm}$ (古典電子半径).

e^2 の項で散乱振幅に寄与するのは $\dfrac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2$ だけでなく，(6.67) の $\dfrac{e}{mc}\boldsymbol{pA}$ の 2 次の摂動項がある．この項の T への寄与と $\dfrac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2$ 項からの寄与との比は次の程度である．

$$\frac{\left(\dfrac{eq}{mc}\right)^2}{\hbar\omega}\Bigg/\frac{e^2}{2mc^2} = \frac{q}{mc} \ll 1.$$

したがって，この項は省略できる．

[6.7] (6.84) より，
$$[E] = \left[\frac{mc}{\hbar}\right]^2[\varphi]^2[L]^3.$$

E, c, $\hbar$ の次元は，

$$[E] = [M][L]^2[T]^{-2},\ [c] = [L][T]^{-1},$$
$$[\hbar] = [M][L]^2[T]^{-1}$$ であるから．

$[\varphi] = [M]^{1/2}[L]^{1/2}[T]^{-1}$ (光子のポテンシャル A_μ と同じ次元である)．

[6.8] 本文参照

[6.9] まず $[A_\mu(x),\ A_\nu(x')]$ を求めよう．(6.43) を代入すると，

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(x')] = \frac{1}{L^3}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{c\hbar}{2k}\{(\sum_h \varepsilon_\mu^*(\boldsymbol{k},h)\varepsilon_\nu(\boldsymbol{k},h))e^{-i[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\omega(t-t')]}$$
$$-(\sum_h \varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},h)\varepsilon_\nu^*(\boldsymbol{k},h))e^{i[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\omega(t-t')]}\}.$$

$A_0 = 0$ であるようにゲージをとっておくと，(6.41) が成立する．

$$\varepsilon_0(\boldsymbol{k},h) = 0,\ \ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},h)\cdot\boldsymbol{k} = 0.$$

$\boldsymbol{k}$ が z 方向のとき，(6.40) より，

$$\sum_h \varepsilon_\mu{}^*(\boldsymbol{k},h)\varepsilon_\nu(\boldsymbol{k},h)=\sum_h \varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},h)\varepsilon_\nu{}^*(\boldsymbol{k},h)=\delta_{\mu,\nu}(1-\delta_{\mu,3}\delta_{\nu,3}).$$

$\boldsymbol{k}$ が任意の方向のときは,

$$\sum_h \varepsilon_\mu{}^*\varepsilon_\nu=\sum_k \varepsilon_\nu{}^*\varepsilon_\mu=\delta_{\mu\nu}\left(1-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$$

と書ける. μ, ν は 1, 2, 3 のいずれかの値をとる.

したがって (6.102) を用いると,

$$[A_\mu(x),A_\nu(x')]=\frac{\delta_{\mu,\nu}}{L^3}\sum_h\frac{c\hbar}{2k}\left(1-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$$
$$\times\{e^{-i[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\omega(t-t')]}-e^{i[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\omega(t-t')]}\}$$
$$=i\hbar c\delta_{\mu,\nu}\left(1-\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\partial^2}\right)D(x-x').$$

$\boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ より,

$$[E_\mu(x),E_\nu(x')]=\frac{-i\hbar}{c}\delta_{\mu\nu}\left(1-\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\partial^2}\right)\partial_t{}^2D(x-x')$$
$$=-i\hbar c\delta_{\mu\nu}(\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu)D(x-x').$$

ここで $\left(\partial^2-\dfrac{1}{c^2}\partial t^2\right)D=0$ を用いた.

同様に $\boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ を用いると次式が得られる.

$$[H_\mu(x),H_\nu(x')]=[E_\mu(x),\ E_\nu(x')]=[E_\mu(x),H_\mu(x')]=0,$$
$$[H_\mu(x),E_\nu(x')]=-i\hbar\varepsilon_{\mu,\nu,\lambda}\partial_\lambda\partial_t\left(1-\frac{\partial_\lambda{}^2}{\partial^2}\right)D(x-x').$$

(μ, ν, λ は $\mu=1$, $\nu=2$ なら $\lambda=3$ というぐあいに $(1,2,3)$ の値の一つずつをとり, 順列 (μ,ν,λ) が順列 $(1,2,3)$ から偶置換でえられれば $\varepsilon_{\mu,\nu,\lambda}=+1$, 奇置換でえられれば $\varepsilon_{\mu,\nu,\lambda}=-1$ である).

(6.103′) でわかるように, $D(x-x')$ は x と x' が空間的に離れているときは 0 である.

〔6.10〕 角運動量の保存則により2個の B^0 間の軌道角運動量 l は 0 である. A, B の場を φ_A, φ_B と書くと, A, B が中性粒子であることより, φ_A, φ_B はエルミットである.

空間反転により, $\varphi_A\to\eta_A\varphi_A$, $\varphi_B\to\eta_B\varphi_B$

とすると, η_A, η_B は ±1 のいずれかの値をとる. $A^0\to 2B^0$ が空間反転に対し不変のときは, $(-1)^l\eta_A{}^*(\eta_B)^2=\eta_A=1.$

これより A^0 はスカラー粒子となる.

〔6.11〕 §10, 257 ページ参照.

第 7 章

〔7.1〕 本文参照.

〔7.2〕 u, $u^\dagger$ と同じようにして,

$$(v^\dagger v)' = \left(v^\dagger v + \frac{v}{c} v^\dagger \sigma_z v\right)\Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2},\ (v^\dagger \sigma_z v)' = \left(v^\dagger \sigma_z v + \frac{v}{c} v^\dagger v\right)\Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

[7.3]～[7.5] 本文参照.

[7.6] (2.38), (7.32) より,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \boldsymbol{r}] = \frac{i}{\hbar}[c\boldsymbol{\alpha p} + mc^2, \boldsymbol{r}] = c\boldsymbol{\alpha}.$$

$\boldsymbol{\alpha}$ の各成分 α_i は交換関係 (7.15) より $\alpha_i^2 = 1$ をみたす. したがってその固有値は ± 1, $c\alpha_i$ の固有値は $\pm c$ となる.

$\boldsymbol{\alpha}$ は自由電子の Hamiltonian (7.32) と可換でないので, 運動量 $\boldsymbol{p}$ の自由電子の状態は $\boldsymbol{\alpha}$ の固有状態ではない. 運動量 $\boldsymbol{p}$ の電子の4成分スピノル u $(E>0)$ は $\boldsymbol{p} /\!/ z$ の場合 (7.37), (7.39) で与えられる. $\boldsymbol{p}$ が任意の方向のときは同様に,

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{c(\boldsymbol{\sigma p})}{E + mc^2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

であるから, $\boldsymbol{\alpha}$ に対し表示 (7.30) を用いると,

$$\begin{aligned} u^\dagger \boldsymbol{\alpha} u &= (u_1^*, u_2^*)\boldsymbol{\sigma}\begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} + (u_3^*, u_4^*)\boldsymbol{\sigma}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{c}{E + mc^2}(u_1^*, u_2^*)\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma p}) + (\boldsymbol{\sigma p})\boldsymbol{\sigma}\}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2c\boldsymbol{p}}{E + mc^2}(u_1^*, u_2^*)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{2c\boldsymbol{p}}{E + mc^2}N^2 = \frac{c\boldsymbol{p}}{E}. \end{aligned}$$

[7.7] 解 (7.37), (7.39) を使って直接たしかめてもよいが, 具体的な解を使わないで, 次のように導くこともできる. (7.42) から,

$$(p_\mu \gamma_\mu + mc)u(\boldsymbol{p}, h) = 0,\ (-p_\mu \gamma_\mu + mc)v(-\boldsymbol{p}, h) = 0. \qquad (1)$$

これの複素共役の式から $\bar{u}(\boldsymbol{p}, h)(p_\mu \gamma_\mu + mc) = 0$ 等が出る. これらから $\bar{u}(\boldsymbol{p}, h)v(-\boldsymbol{p}, h) = 0$, $\bar{v}(-\boldsymbol{p}, h)u(\boldsymbol{p}, h) = 0$. $u(\boldsymbol{p}, h)$ と $v(-\boldsymbol{p}, h)$ の4個は1次独立だから一般の4成分スピノル w はこの4個の1次結合で表わすことができる. (7.41) を使うと,

$$\begin{aligned} w_\alpha &= \sum_h c_h u_\alpha(\boldsymbol{p}, h) + \sum_h d_h v_\alpha(-\boldsymbol{p}, h) \\ &= \frac{E}{mc^2}\Big[\sum_{\beta, h} u_\alpha(\boldsymbol{p}, h)\{\bar{u}_\beta(\boldsymbol{p}, h)w_\beta\} - \sum_{\beta, h} v_\alpha(-\boldsymbol{p}, h)\{\bar{v}_\beta(-\boldsymbol{p}, h)w_\beta\}\Big]. \end{aligned}$$

w は任意のスピノルであるから,

$$\sum_h u_\alpha(\boldsymbol{p}, h)\bar{u}_\beta(\boldsymbol{p}, h) - \sum_h v_\alpha(-\boldsymbol{p}, h)\bar{v}_\beta(-\boldsymbol{p}, h) = \frac{mc^2}{E}\delta_{\alpha\beta}.$$

これに $(-p_\mu \gamma_\mu + mc)_{\rho\alpha}$ を掛けて α で加えると v の項は (1) により消え, u には $2mc$ が掛けられる. $E/c = p_0$ より求むる関係式の一つが得られる. $(-p_\mu \gamma_\mu - mc)_{\rho\alpha}$ を掛けるともう一つの関係式となる.

第 8 章

〔8.1〕 Bose 粒子のみの関与する現象では重粒子数・軽粒子数は常に 0 で荷電の保存則のみが問題になる．粒子と反粒子が同一である π^0, γ は荷電が 0, その他の Bose 粒子の荷電は保存則がみたされるように定める．ただし粒子と反粒子は荷電が異符号で, π^+ の荷電を $+1$ と決めれば π^- の荷電は -1 となる．荷電の保存則以外に Bose 粒子間の遷移に選択則を与える保存則は知られていないので, 任意の Bose 粒子 A は適当な衝突で π 中間子に転化しうる．たとえば, π^0 と A の衝突で l 個の π^+, m 個の π^-, n 個の π^0 が作られたとすると,

$$\pi^0 + A \to l\pi^+ + m\pi^- + n\pi^0.$$

A の荷電は $Q_A = l - m$ と決まる．

〔8.2〕 第一・二種のゲージ変換に対する不変性はほとんど自明なので読者にまかす．Lorentz 変換に対しては $\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$ $(=\bar{\psi}\boldsymbol{\sigma}\psi,\ i\bar{\psi}\boldsymbol{\alpha}\psi)$ が Lorentz 変換に対するテンソル ((7.22) 参照), $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu (= \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E})$ が同じくテンソルであることより, 相互作用は二つのテンソルの積で Lorentz 不変になる．

〔8.3〕 (8.32), (8.33), (8.28), (8.30) を用いると,

$$\int_0^\infty R_{2,0}{}^2 dr = C_{2,0}{}^2 \int_0^\infty e^{-x} F^2(-1, 2, x) dr$$

$$= \frac{\pi/2}{[2\Gamma(3/2)]^2}\left(\frac{me^2}{4\pi\hbar^2}\right)^2 \int_0^\infty e^{-x}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{me^2}{4\pi\hbar^2}\right)^2. \quad \left(\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \text{を用いた}\right).$$

同様にして,

$$\int_0^\infty R_{2,0}{}^2 r dr = \frac{\pi/2}{[2\Gamma(3/2)]^2} \cdot \frac{me^2}{4\pi\hbar^2} \int_0^\infty e^{-x} x \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\ \frac{me^2}{4\pi\hbar^2}.$$

〔8.4〕 4成分スピノルの 1, 2 成分を φ, 3, 4 成分を χ として波動方程式を書くと,

$$(E - mc^2)\varphi = (\boldsymbol{\sigma}, c\boldsymbol{p} + ig\boldsymbol{E})\chi, \qquad (E + mc^2)\chi = (\boldsymbol{\sigma}, c\boldsymbol{p} - ig\boldsymbol{E})\varphi.$$

ただし電子の場の $\boldsymbol{H}$ は 0 である．第2式で $E = mc^2$ として χ を解き, 第一式に入れると,

$$(E - mc^2)\varphi = \frac{1}{2mc^2}(\boldsymbol{\sigma}, c\boldsymbol{p} + ig\boldsymbol{E})(\boldsymbol{\sigma}, c\boldsymbol{p} - ig\boldsymbol{E})\varphi$$

$$= \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{ig}{2mc}\{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E})\}\right]\varphi + O(\boldsymbol{E}^2)$$

$$= \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{ig}{2mc}\{(\boldsymbol{E}\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{p}\boldsymbol{E}) + i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E})\}\right]\varphi + O(\boldsymbol{E}^2).$$

この式に $\boldsymbol{p} = -i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{E} = -(e/4\pi)(\boldsymbol{r}/r)$ を入れると, $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E} = (e/4\pi)(\boldsymbol{L}/r^3)$, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = -\Delta A_0 = -e\delta(\boldsymbol{r})$ により電磁的エネルギーは,

$$\frac{ge\hbar}{2mc}\delta(\boldsymbol{r}) + \frac{ge(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L})}{4\pi mcr^3}.$$

[8.5] (8.58′) で $Z=1$, $z=6$, $A=12$, $\dfrac{mV^2}{2}=\dfrac{m}{M}\dfrac{MV^2}{2}\approx\dfrac{0.51\times200}{940}\approx0.109$ MeV, $\Delta l=1$, $I\approx7.6\times10^{-5}$ MeV,

$$-\Delta E=\frac{4\pi Z^2 z N_0}{A}\left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)^2\frac{(\hbar c)^2}{2(mV^2/2)}\log\frac{4(mV^2/2)}{I}$$

$$\approx\frac{4\pi\times6\times6\times10^{23}}{12}\cdot\left(\frac{1}{137}\right)^2\cdot\frac{(1.97\times10^{-11})^2}{2\times0.109}\log\frac{4\times0.109}{7.6\times10^{-5}}\approx3\ \text{MeV}.$$

ここで $\hbar c\approx1.97\times10^{-11}$ MeV·cm を用いた.

[8.6] $R(E)\propto E^2/Z^2\ M.$ (8.67) であるから,

$$R\approx2.85\times\frac{1}{2^2\times4}\approx0.18\ \text{g/cm}^2.$$

[8.7]
$$-\frac{dE}{dl}=\left\{4\log\left(\frac{4}{3\alpha z^{1/3}}\right)+\frac{\ }{9}\right\}\overline{\Phi}_{\text{atom}}\frac{EN_0}{A}$$

で,

$$\overline{\Phi}_{\text{atom}}\approx z(z+1)\times5.79\times10^{-28}\ \text{cm}^2\approx\begin{cases}1.05\times10^{-25}\ \text{cm}^2\ (\text{Al},\ z=13)\\3.94\times10^{-24}\ \text{cm}^2\ (\text{Pb},\ z=82)\end{cases}$$

を用いると,

$$-\left(\frac{dE}{dl}\right)_{\text{Al}}=\left\{4\log\left(\frac{4\times137}{3\times13^{1/3}}\right)+\frac{2}{9}\right\}\times1.05\times10^{-25}\times\frac{200\times6\times10^{23}}{27}\approx8.2\ \text{MeV/g}\cdot\text{cm}^{-2}$$

$$-\left(\frac{dE}{dl}\right)_{\text{Pb}}=\left\{4\log\left(\frac{4\times137}{3\times82^{1/3}}\right)+\frac{2}{9}\right\}\times3.94\times10^{-24}\times\frac{200\times6\times10^{23}}{208}\approx36\ \text{MeV/g}\cdot\text{cm}^{-2}$$

[8.8] 自由な $\pi^\pm$ 中間子の場 $\varphi,\varphi^\dagger$ に対する方程式 (6.83) に, $p_\mu\to p_\mu-\dfrac{Q}{c}A_\mu$ のおきかえを行なうと (φ に対し $Q=e$, $\varphi^\dagger$ に対し $Q=-e$), 電磁場と minimal な相互作用をする π 中間子の方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\partial-\frac{ie}{c\hbar}A\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\partial t+\frac{ie}{\hbar}A_0\right)^2\right\}\varphi=-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi,\\&\left\{\left(\partial+\frac{ie}{c\hbar}A\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\partial t-\frac{ie}{\hbar}A_0\right)^2\right\}\varphi^\dagger=-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^\dagger.\end{aligned}\qquad(1)$$

自由な π 中間子場のエネルギーは (6.84) で与えられたが, 電磁場と π 中間場の相互作用エネルギーを求めるために正準形式を用いて議論しよう. 詳しくは, たとえば G. Wentzel "*Quantum Theory of Fields*", Interscience Publishers, 第1章, 第11章参照.

運動方程式 (1) を与える Lagrangian 密度は,

$$L=-\left\{\left(\frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial x_\mu}+\frac{ie}{c\hbar}A_\mu\varphi^\dagger\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}-\frac{ie}{c\hbar}A_\mu\varphi\right)+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^\dagger\varphi\right\}\qquad(2)$$

で与えられ, (1) 式は L が $\varphi,\varphi^\dagger$ の変分に対し不変という変分原理から導かれる.

正準形式によれば, この L から $\varphi,\varphi^\dagger$ に正準共役な量 $\pi,\pi^\dagger$ を次のようにして得ることができる.

$$\pi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{1}{c^2}\left(\dot{\varphi}^\dagger+\frac{ie}{\hbar}A_0\varphi^\dagger\right),$$
$$\pi^\dagger=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}^\dagger}=\frac{1}{c^2}\left(\dot{\varphi}-\frac{ie}{\hbar}A_0\varphi\right).\tag{3}$$

ここで・は時間微分を意味する．系の Hamiltonian 密度は

$$H=\pi\dot{\varphi}+\pi^\dagger\dot{\varphi}^\dagger-L=c^2\pi^\dagger\pi$$
$$+\left(\frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{ie}{c\hbar}\boldsymbol{A}\varphi^\dagger\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{r}}-\frac{ie}{c\hbar}\boldsymbol{A}\varphi\right)+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^\dagger\varphi+\frac{iec^2}{\hbar}A_0(\pi\varphi-\pi^\dagger\varphi^\dagger).$$

自由な π 中間子場の Hamiltonian 密度,

$$H_0=c^2\pi^\dagger\pi+\left\{\frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial\boldsymbol{r}}\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{r}}+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^\dagger\varphi\right\}$$

を除くと，相互作用の Hamiltonian 密度 H' $(=H_1+H_2)$ は,

$$H_1=-\frac{ie}{c\hbar}\left(\frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial\boldsymbol{r}}\varphi-\varphi^\dagger\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{A}+\frac{iec^2}{\hbar}(\pi\varphi-\pi^\dagger\varphi^\dagger)A_0,\quad H_2=\frac{e^2}{c^2\hbar^2}\boldsymbol{A}^2\varphi^\dagger\varphi$$

となる．場を量子化するときに (6.86) のように自由な粒子の場として量子化し，φ, $\varphi^\dagger$ は (1) の代りに (6.83) をみたす．この場合は π, $\pi^\dagger$ も量子化すると (3) の代りに，$\pi=\frac{1}{c^2}\dot{\varphi}^\dagger$, $\pi^\dagger=\frac{1}{c^2}\dot{\varphi}$ である．H_1 を書き直すと,

$$H_1=-\frac{ic}{c\hbar}\left(\frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial\boldsymbol{r}}\varphi-\varphi^\dagger\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{A}+\frac{ie}{\hbar}(\dot{\varphi}^\dagger\varphi-\dot{\varphi}\varphi^\dagger)A_0.$$

相互作用の Hamiltonian 密度 H' と相互作用の Lagrangian 密度 $L'=L-L_0$ を比較すると，e の一乗の項に対しては $H_1=-L_1$ であるが，e^2 に比例する H_2 と $-L_2=(e^2/\hbar^2c^2)A_\mu{}^2\varphi^\dagger\varphi$ とは $A_0{}^2$ の部分だけ異なる．一般に L' が場の量の微分を含むときは $H'=-L'$ は成り立たず，結合定数の二乗に比例する項の差がある．しかし本書で扱う範囲ではこの差は問題とならないだけでなく，Feynman の方法で計算するときは，$-L'$ を相互作用密度として正しい結果が得られるので，以後は $-L'$ のことを相互作用の Hamiltonian 密度とする．L' は Lorentz 変換で不変な量である．

[8.9] $\langle E_+\rangle=\frac{N_0}{A}\int\sigma(E_+)E_+dE_+$ を計算すればよい．(8.145) を用いると,

$$\int\sigma(E_+)E_+dE_+=4\frac{N_0\bar{\phi}}{A}\int_0^{\hbar\nu}\left[\frac{E_+{}^2+(\hbar\nu-E_+)^2+2/3E_+(\hbar\nu-E_+)}{(\hbar\nu)^3}\right.$$
$$\left.\log\frac{4}{3\alpha z^{1/3}}-\frac{1}{9}\frac{E_+(\hbar\nu-E_+)}{(\hbar\nu)^3}\right]E_+dE_+$$
$$=\hbar\nu\frac{N_0\bar{\phi}}{A}\left(\frac{14}{9}\log\frac{4}{3\alpha z^{1/3}}-\frac{1}{27}\right).$$

ここで，$\bar{\phi}\approx5.79z^2\times10^{-28}\,\mathrm{cm}^2$ である．(この $\langle E_+\rangle$ は (8.147) の σ に E_+ の平均値 $\hbar\nu/2$ と $\frac{N_0}{A}$ をかけたものに等しくなっている).

[8.10] Compton 散乱の断面積は,

$$\sigma_{\mathrm{comp.}}=\phi_{\mathrm{T}}\frac{3zmc^2}{8\hbar\nu}\left(\log\frac{2\hbar\nu}{mc^2}+\frac{1}{2}\right).$$

対発生の断面積は，$\sigma_{\rm pair}=\bar{\phi}\left(\dfrac{28}{9}\log\dfrac{2\hbar\nu}{mc^2}-\dfrac{218}{27}\right)$，

$\sigma_{\rm comp}=\sigma_{\rm pair}$ になる光子の $\hbar\nu$ は $\bar{\phi}=\dfrac{3}{8\pi}\alpha z^2\phi_{\rm T}$ より，

$$\frac{mc^2}{\hbar\nu}\left(\log\frac{2\hbar\nu}{mc^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\alpha z}{\pi}\left(\frac{28}{9}\log\frac{2\hbar\nu}{mc^2}-\frac{218}{27}\right)$$

$$\log\frac{2\hbar\nu}{mc^2}=\left(\frac{mc^2}{2\hbar\nu}+\frac{218}{27}\,\frac{\alpha z}{\pi}\right)\Big/\left(\frac{\alpha z}{\pi}\,\frac{28}{9}-\frac{mc^2}{\hbar\nu}\right)$$

$$\approx\frac{218}{3\times 28}=2.6\quad\left(\frac{mc^2}{\hbar\nu}\text{ の項は }\frac{\alpha z}{\pi}\text{ の項にくらべて小さい}\right).$$

これより $\dfrac{\hbar\nu}{mc^2}\approx 6.8$. この $\hbar\nu$ の値は (8.146) の適用限界，

$$\frac{mc^2}{\alpha z^{1/3}}\gg\hbar\nu\gg mc^2\left(\frac{mc^2}{\alpha z^{1/3}}\approx 31mc^2\right)$$

を大体みたしていると考えてよい.

第 9 章

[9.1] π 中間子・核子系の重心系での全エネルギーを W とすれば，実験室系での π 中間子のエネルギーは $(W^2-M^2c^4-\mu^2c^4)/2Mc^2$. これから ($A$) の反応のthreshold エネルギー T_π (π 中間子の運動エネルギー) は上から順に 0, 173, 165, 760, 910MeV. (11-2 表も見よ).

[9.2] $S=\begin{pmatrix}\eta e^{2i\delta} & \pm i\sqrt{1-\eta^2}\,e^{i(\delta+\varphi)}\\ \pm i\sqrt{1-\eta^2}e^{i(\delta+\varphi)} & \eta e^{2i\varphi}\end{pmatrix}$，$0\leq\eta\leq 1$，$\delta$, φ は実数.

[9.3] $S^\dagger=1+\dfrac{i}{\hbar}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dtH'(t)-\frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2H'(t_1)H'(t_2)+\cdots$

と (9.10) を掛け合わせると H' の1次の項はただちに消え，

$$S^\dagger S=1+\frac{1}{\hbar^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2H'(t_1)H'(t_2)-\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2H'(t_1)H'(t_2)\right.$$
$$\left.-\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2H'(t_2)H'(t_1)\right]+\cdots.$$

第1の積分領域を $t_1>t_2$ の部分と $t_1<t_2$ とに分けると，前者は第2の積分と，後者は第3の積分と消し合って H' の2次の項は0となる. 以下同様で $S^\dagger S=1$ となる.

[9.4] 重心系での核子の運動量の大きさを p とすると $p\times 1.4\times 10^{-13}{\rm cm}\approx\hbar$ のところから P 波がきき始める. 実験室系でのエネルギーは $(2p)^2/2M=41$ MeV. これ以下の核子核子散乱では S 波のみを考えればよい.

[9.5] $\sigma_{{\rm tot},\,l}=(2\pi/k^2)(2l+1)(1-{\rm Re}S_l)$

$$|1-S_l|^2=(1-{\rm Re}S_l)^2+({\rm Im}S_l)^2\geq(1-{\rm Re}S_l)^2.$$

これと (9.84) から求める関係式が出る.

[9.6] $\bar{K}^0+n\to\Lambda\to\bar{K}^0+n$ により散乱が起こる. 入射エネルギーを E とすると，

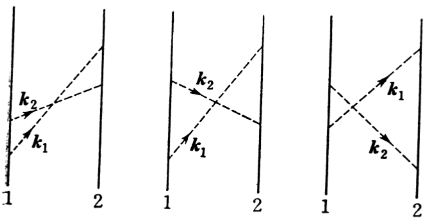
中間状態とのエネルギーの差は $E+(M_N-M_\Lambda)c^2\equiv E-\Delta Mc^2$ で,

$$d\sigma=\left(\frac{f^2}{4\pi}\right)^2\frac{1}{(E-\Delta Mc^2)^2}.$$

全断面積はこれの 4π 倍である．エネルギーが0のときは $E=m_Kc^2$ とおいて (9.108) の数値を用いると，$\sigma|_0=4\pi\left(\dfrac{f^2}{4\pi\hbar c}\right)^2\dfrac{\hbar^2}{(m_K-\Delta M)^2c^2}=48\,\mathrm{mb}.$

〔9.7〕 中間状態として下図の3通りおよび核子1と2をとりかえた合計6通りがある．4次の摂動計算により（問題 2.2),

$$W_4=-\sum_{k_1k_2}\frac{(f\hbar c)^4}{4E_1E_2L^6}e^{i(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)/\hbar}\left(\frac{4}{E_1{}^2(E_1+E_2)}+\frac{2}{E_1E_2(E_1+E_2)}\right).$$



解 9-7 図

k_1, k_2 については全空間についての和のことを考慮して適当に変形すると，

$$W_4=\sum_{k_1k_2}\frac{(f\hbar c)^4}{E_1E_2L^6}e^{i(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{r}/\hbar}\frac{1}{E_1{}^2-E_2{}^2}\frac{1}{E_1{}^3}$$

$$=\frac{f^4}{(2\pi)^6\hbar^2c}\int\!\!\int d\boldsymbol{k}_1d\boldsymbol{k}_2\frac{1}{k_1{}^2-k_2{}^2}\frac{e^{i(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{r}/\hbar}}{\sqrt{k_1{}^2+\mu^2c^2}}=-\left(\frac{f^2}{4\pi}\right)^2\frac{iH_0{}^{(1)}(2i\kappa r)}{\hbar cr}.$$

$H_0{}^{(1)}$ は0次の Hankel 関数で，κ は π 中間子の Compton 波長の逆数である．

〔9.8〕 問題 7.7 の結果を用いる．

〔9.9〕 重心系での核子のエネルギー，運動量を E_N, p とすれば,

$$w=\frac{g_\Lambda{}^2}{4\pi\hbar c}\frac{M+E_N/c^2}{M_\Lambda}\frac{pc}{\hbar}.$$

E_N, p を質量で書くと（M は核子の質量),

$$E_N=\frac{M_\Lambda{}^2+M^2-\mu^2}{2M_\Lambda}c^2,$$

$$p=\frac{c}{2M_\Lambda}\sqrt{(M_\Lambda+M+\mu)(M_\Lambda+M-\mu)(M_\Lambda-M+\mu)(M_\Lambda-M-\mu)}.$$

第 10 章

〔10.1〕 2個の中性子の状態として可能なものは 257 ページの 2行目のものであるがこれと S-波の π 中間子を合成した系のスピン，パリティ（J^P）はそれぞれ 0^-, 0^+, 1^+, 2^+, 2^-, 2^+, … である．はじめの $\pi-d$ 状態は 1^- であるから反応は起こらない．

〔10.2〕 本文略解参照．

〔10.3〕 終状態の 2 核子系の荷電スピンが0のときは 266 ページ (III) と同じであり比は2となる．2核子の荷電スピンが1のときは，$I=1$ と $I=1$（π中間子）の合成

系で $I=0$ と $I=1$ の状態（始状態はこの二つに限られる）を作り（Clebsch-Gordan 係数を用いる），266 ページ）と同様の議論をする．

［10.4］ $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

［10.5］ $\bar{\psi}\tau_\alpha\psi$ は C 変換により $\bar{\psi}\tau_\alpha{}^T\psi$ となる．さらに　$\psi\to e^{i\pi I_2}\psi=i\tau_2\psi$　$\bar{\psi}\to-\bar{\psi}i\tau_2$ とすれば $\tau_2\tau_\alpha{}^T\tau_2=-\tau_\alpha$ であるから，結局 G 変換で $\bar{\psi}\tau\psi\to-\bar{\psi}\tau\psi$．同じようにして $\bar{\psi}\gamma_\mu\tau\psi\to\bar{\psi}\gamma_\mu\tau\psi$, $i\bar{\psi}\gamma_5\tau\psi\to-i\bar{\psi}\gamma_5\tau\psi$.

［10.6］ $l=2$ の球関数（付録 A. 4）と（10. 82）より $l=2$, $J=3/2$, $J_Z=\pm1/2$ の固有状態は，$\psi_\pm=-\sqrt{1/8\pi}(3\cos^2\theta-1)u_\pm+\sqrt{9/8\pi}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}u_\mp$.
これを 2 乗してスピンについて加えれば $\propto 3\cos^2\theta+1$ が得られる．

［10.7］ $j=2$ の光子と $j=1/2$ の核子を合成してみると，

$$A_+u_+=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\left\|J=\frac{5}{2},J_Z=\frac{3}{2}\right\rangle-\left\|J=\frac{3}{2},J_Z=\frac{3}{2}\right\rangle\right),$$

$$A_+u_-=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{2}\left\|J=\frac{5}{2},J_Z=\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{3}\left\|J=\frac{3}{2},J_Z=\frac{1}{2}\right\rangle\right).$$

したがって A_+u_+ では 1/5 の確率，A_+u_- では 3/5 の確率で p^* 状態になる．出てくる π の角分布は（10. 103）の固有状態を用いて，

$$d\sigma(\theta)\propto\frac{1}{5}\left|\left|P_{3/2},\ J=\frac{3}{2}\right\rangle\right|^2+\frac{3}{5}\left|\left|P_{3/2},J=\frac{1}{2}\right\rangle\right|^2\propto 1+\cos^2\theta.$$

これは 10－12 図と合わない．したがって $\gamma-\pi^0$ 反応には電気的四重極子でなく磁気的双極子放射の方が圧倒的に大きいことがわかる．

［10.8］ 289～292 ページと同様に，1 次元の問題として扱う．振動数 ω の平面波であらわされる光が物質中に入射したときの伝播のようすを考える．入射波 $\varphi_{in}(x, t)$ を

$$\varphi_{in}(x,t)=e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$$

とすると，物質中の 1 個の原子により散乱されて作られる波は，

$$\varphi_{sc}(x,t)=if(\omega)e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$$

である．全体の波 $\varphi(x,t)$ は φ_{in} と φ_{sc} の和で S 行列を使うと，

$$\varphi(x,t)=S(\omega)e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)},\ S(\omega)=1+if(\omega)$$

である．散乱の位相差 $\delta(\omega)$ を $S(\omega)=e^{i\delta(\omega)}$ で定義すると，一個の原子による散乱波の振幅 $f(\omega)$ は入射波の振幅 1 にくらべて小さいので $\delta(\omega)=f(\omega)$ と考えてよい．

1 cm あたり N 個の原子が存在するときは，物質中を x cm 通過した後の波は，

$$\varphi(x,t)=e^{iNx\delta(\omega)}e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$$
$$=e^{-i\omega\left[t-\frac{x}{c}\left(1+\frac{Nf(\omega)}{k}\right)\right]}\quad(k=\omega/c)$$

である．この波の位相速度は $v=c/1+\dfrac{Nf(\omega)}{k}$ であり，屈折率 n は真空中の位相速

度と物質中の位相速度の比である. n は実数になるように定義するので,

$$n = \mathrm{Re}\frac{c}{v} = 1 + \frac{N}{k}\mathrm{Re}f(\omega).$$

$f(\omega)$ の虚数部は $\varphi(x, t)$ の減衰作用を与え,

$$|\varphi(x, t)|^2 = e^{-2N\,\mathrm{Im}\,f(\omega)x}.$$

したがって, 吸収率 α は $\alpha = 2N\,\mathrm{Im}\,f(\omega)$ である.

ここで吸収率は, $\alpha = \dfrac{d|\varphi(x,t)|^2}{dx}/|\varphi(x,t)|^2$ で定義する.

3次元の問題として扱う場合は (散乱振幅 f, N の次元はそれぞれ $[L]$, $[L]^{-3}$ これに対し1次元の場合は $[f] = [L]^0$, $[N] = [L]^{-1}$ である), 計算はより複雑であるが結果は次のようになる.

$$n = 1 + \frac{2\pi N}{k^2}\mathrm{Re}f(\omega, 0), \quad \alpha = \frac{4\pi N}{k}\mathrm{Im}\,f(\omega, 0).$$

$f(\omega, 0)$ は光子の1個の原子による前方散乱 ($\theta = 0$) の振幅である. (くわしくは R. Kronig, Journal Optical Society of America, **12**, 547 (1926), Physica **12**, 543 (1946); H. A. Kramers, Atti. congr. intern fisici, Como, **2**, 545 (1927))

第 11 章

[11.1] 始状態は $I = 1/2$, $I_3 = -1/2$ である. 終状態の $\Lambda + N$ の系は $I = 1/2$, $\Sigma + N$ の系は $I = 1/2$ と $3/2$ がある. $I = 1/2$ と π の $I = 1$ を合成して $I = 1/2$, $I_3 = -1/2$ 状態を作ると (10.38) に見られるように π^- が 2, π^0 が1の確率で含まれている. $I = 3/2$ の $\Sigma + N$ 系 (その $I_3 = m/2$ の状態を $(\Sigma N)_m$ と書く) と π の合成で $I = 1/2$ を作ると,

$$\left\|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|(\Sigma N)_3, \pi^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|(\Sigma N)_1, \pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|(\Sigma N)_{-1}, \pi^+\rangle.$$

したがって, π^-, π^0, π^+ の現われる確率は $\frac{1}{6} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$. $\pi^\pm$ の現われる確率と π^0 のとの比は $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 2 : 1$. 結局荷電 π と中性 π の現われる確率は 2 : 1 である.

[11.2] Σ と π で $I = 0$, 1, 2; $I_3 = 0$ の状態を作ると,

$$\|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\Sigma^+\pi^-\rangle - |\Sigma^0\pi^0\rangle + |\Sigma^-\pi^+\rangle),$$

$$\|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Sigma^+\pi^-\rangle - |\Sigma^-\pi^+\rangle),$$

$$\|2, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\Sigma^+\pi^-\rangle + 2|\Sigma^0\pi^0\rangle + |\Sigma^-\pi^+\rangle).$$

逆に解いて, $|\Sigma^+\pi^-\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\|0, 0\rangle + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|1, 0\rangle + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\|2, 0\rangle,$

$$|\Sigma^0\pi^0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}\|0,0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\|2,0\rangle,$$

$$|\Sigma^-\pi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\|0,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\|2,0\rangle.$$

これと $\langle K^-p| = (\langle 1,0\| + \langle 0,0\|)/\sqrt{2}$ から，

$$\langle K^-p|\Sigma^\pm\pi^\mp\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}M_0 \pm \frac{1}{2}M_1,\ \ \langle K^-p|\Sigma^0\pi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}M_0.$$

ただし，M_m は $\langle m,\ 0\,\|\,T\,\|\,m,\ 0\rangle$ の行列要素である．反応の割合いが 2：1：1 から，

$$\left|\frac{1}{\sqrt{6}}M_0 - \frac{1}{2}M_1\right|^2 : \left|\frac{1}{\sqrt{6}}M_0\right|^2 : \left|\frac{1}{\sqrt{6}}M_0 + \frac{1}{2}M_1\right|^2 = 2:1:1.$$

$M_1/M_0 = A$ とすれば，$\left|1-\sqrt{\frac{3}{2}}A\right|^2 = 2,\ \left|1+\sqrt{\frac{3}{2}}A\right|^2 = 1,\ A = -0.58e^{i70^\circ}$.

〔11.3〕 $(\gamma_\mu p_{a\mu} + M_a)u(p_a) = 0,\ \bar{u}(p_b)(\gamma_\mu p_{b\mu} + M_b) = 0$ を使うと，

$$\frac{f_{abc}}{m_c}\bar{u}(p_b)i\gamma_5\gamma_\mu(p_b - p_a)_\mu u(p_a) = f_{abc}\frac{M_a+M_b}{m_c}i\bar{u}(p_b)\gamma_5 u(p_a).$$

〔11.4〕 $(\varphi_{\pi\mu}\partial_\mu\varphi_\pi)\partial_\mu(\varphi_K{}^\dagger\varphi_K)$，$(\boldsymbol{\varphi}_\pi\times\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}_\pi)\partial_\mu(\varphi_K{}^\dagger\boldsymbol{\tau}\varphi_K)$

の二つはエルミットであり，Lorentz 不変形，荷電不変性をみたす．この他 $\Box\varphi$ を含むものは φ の運動方程式を用いて微分を含まないものに書き直される．また，たとえば $(\partial_\mu\varphi_\pi\partial_\mu\varphi_\pi)(\varphi_K{}^\dagger\varphi_K)$ は，

$$\partial_\mu\{(\varphi_\pi\partial_\mu\varphi_\pi)(\varphi_K{}^\dagger\varphi_K)\} - (\varphi_\pi\Box\varphi_\pi)(\varphi_K{}^\dagger\varphi_K) - (\varphi_\pi\partial_\mu\varphi_\pi)\partial_\mu(\varphi_K{}^\dagger\varphi_K)$$

と等しいが，第一項は，

$$(p_{\pi1} + p_{\pi2} + p_{K1} + p_{K2})_\mu$$

に比例する．p_μ はおのおのの粒子の運ぶエネルギー・運動量である．保存則からその総和は 0 であるから，第一項は寄与は 0 となる．こうしてはじめに与えた二つの相互作用だけで十分である．

〔11.5〕 η は擬スカラーであるから，2 個の π にこわれられない（323 ページの最後を見よ）．3 個の π の状態は G パリティ -1 で，$+1$ の η からの遷移は禁止される．4 個の π に崩壊するには Q-値が負である．ゆえに η は強い相互作用では崩壊しない．電磁的相互作用も考えるならば，G パリティの保存則はこわれるから $\eta\to3\pi$ が起こる．また $\eta\to\pi^+ + \pi^- + \gamma$，$\eta\to2\gamma$ の崩壊が考えられる．$\eta\to\pi^0+\gamma$ は禁止される（問題 10.2）．

〔11.6〕 $\Sigma\lambda_i p_i' = \Sigma U\lambda_i U^\dagger p_i$ とそのエルミット共役行列を辺々掛け合わせると，

$$\Sigma_{ij}p_j'^*\lambda_j\lambda_i p_i' = \Sigma_{ij}p_j^* U\lambda_j U^\dagger U\lambda_i U^\dagger p_i = \Sigma_{ij}p_j^* U\lambda_j\lambda_i U^\dagger p_i.$$

この跡（trace）を作ると $\Sigma p_i'^* p_i' = \Sigma p_i^* p_i$ が得られる．すなわち $p_i\to p_i'$ の変換はユニタリーである．

〔11.7〕 始状態の 8 重項の baryon と 8 重項の擬スカラー中間子の系は $8\times8=1+8+8+10+10^*+27$ と分解される．終状態も同様である．したがって，$1\to1$，$10\to10$，$10^*\to10^*$，$27\to27$ の 4 個の振幅と，2 個の 8 次元表現から 2 個の 8 次元表現

に移る2行2列の行列（4個の複素量）の合計8個の振幅で散乱が表わされる．(11.76)と同様な議論をすると入射するBとP，出ていくB'とP'から作られる不変量として，
$T_r(\overline{B}'BP'P)$, $T_r(\overline{B}'BPP')$, $T_r(\overline{B}'P'BP)$, $T_r(\overline{B}'P'PB)$, $T_r(\overline{B}'PBP')$, $T_r(\overline{B}'PPB)$, $T_r(\overline{B}'B)T_r(P'P)$, $T_r(\overline{B}'P')T_r(BP)$, $T_r(\overline{B}'P)T_r(BP')$
の9個が考えられるが，これらの間には1次関係があり独立なものは8個である．S行列が対称なことを使うと7個の振幅で十分である．

[11.8] $\overline{B}$ と B から二つの8重項 $T_r(\overline{B}B\lambda_i)$, $T_r(\overline{B}\lambda_i B)$ が作られる．η と同じ変換性を示すものは $i=8$ のものであるが，あるいはこの和と差をとってもよい．それは (11.77), (11.78) で η と結合している部分である．したがって，質量のずれで8次元表現の $I=0$ 成分と同じ変換性を持つものは，

$$\delta M_1(\overline{N}N+2\overline{\Lambda}\Lambda-2\overline{\Sigma}\Sigma+\overline{\Xi}\Xi)+\delta M^2(\overline{N}N-\overline{\Xi}\Xi).$$

すなわち対称性の破れによる質量のずれは，

$$\delta M_N=\delta M_1+\delta M_2,\ \ \delta M_\Lambda=2\delta M_1,\ \ \delta M_\Sigma=-2\delta M_1,\ \ \delta M_\Xi=\delta M_1-\delta M_2.$$

これから (11.80) が得られる．

第 12 章

[12.1] $Eu^{152}(0,-)$ のK電子補獲により作られた $Sm^{152}(1,-)$ の反跳運動量の大きさを p_1 とすれば，エネルギーの保存則から，

$$p_1c+\frac{p_1^2}{2M}=\Delta E.\ (\Delta E\ \text{はエネルギー差}=0.95\,\text{MeV}).$$

M は Sm^{152} の質量である．これが進行方向から θ の方向に γ 線を出すとき，その運動量を q, $Sm^{152}(0,+)$ の運動量を p_2, 進行方向からの角度を φ とすれば，エネルギー・運動量の保存則は ((4.26) 参照)，

$$\frac{p_1^2}{2M}+\Delta E=\frac{p_2^2}{2M}+qc,$$

$$p_1=q\cos\theta+p_2\cos\varphi,\ \ q\sin\theta=-p_2\sin\varphi.$$

ただし Sm^{152} の $(1,=)$, $(0,+)$ 状態のエネルギー差$=0.96\,\text{MeV}$ は上の ΔE に等しいとした．これから p^2, φ を消去すると $(p_1, q\ll MC)$,

$$\frac{p_1^2}{2M}+\Delta E=qc+\frac{1}{2M}(p_1^2-2p_1q\cos\theta+q^2),$$

$$qc=\Delta E\left(1+\frac{v}{c}\cos\theta\right)-\frac{\Delta E^2}{2Mc^2}+\cdots,\ \ v=\frac{p_1}{M}=\frac{\Delta E}{Mc}. \qquad (1)$$

一方，運動量 q_0 の γ 線が止っている $Sm^{152}(0,+)$ に吸収され，ちょうど $(1,-)$ の励起状態になるためには，

$$q_0c=\Delta E+\frac{q_0^2}{2M},\ \ q_0c=\Delta E+\frac{\Delta E^2}{2Mc^2}+\cdots$$

が必要である．(1) の qc は $\cos\theta=1$ のとき q_0c に等しくなる．すなわち反跳 Sm^{152} の進行方向に放出された γ 線が強く吸収される．

〔12.2〕 中性子のエネルギー・運動量を $P_\mu(=(0, Mc))$, 陽子, 電子, ニュートリノのをそれぞれ P'_μ, p_μ, q_μ とすれば (9.138) により,

$$w=\frac{g_{F1}^2}{2}(2\pi)^4L^3\frac{\hbar^2}{c}\int\bar{\psi}(P)(1+\lambda^*\gamma_5)\gamma_\mu\psi_p(P')\bar{\psi}_p(P')(1+\lambda\gamma_5)\gamma_\sigma\psi_n(P)$$

$$\times\bar{\psi}(q)(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi_e(p)\bar{\psi}_e(p)(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\psi_\nu(q)\delta^4(P-P'-p-q).$$

入射粒子の $\psi_n(P)$ は (9.132) でおきかえられるが, 偏りのない中性性子を問題にしているから, ヘリシティについて加え 2 で割ることにする. すなわち $\psi_{n\alpha}(P)\bar{\psi}_{n\beta}(P)$ は $(1/4L^3P_0)\times(-\gamma_\mu P_\mu+Mc)_{\alpha\beta}$ とする. $\psi_p(P')\bar{\psi}_p(P')$ 等は (9.139) でおきかえる.

$$w=\frac{g_{F1}^2}{2}(2\pi)^4\frac{\hbar^2}{c}\int T_r\left[\frac{-\gamma P+Mc}{4Mc}(1+\lambda^*\gamma_5)\gamma_\mu(-\gamma P'+Mc)(1+\lambda\gamma_5)\gamma_\sigma\right]$$

$$\times\delta(P'^2+M^2c^2)\frac{d^4P'}{(2\pi\hbar)^3}T_r[(-\gamma q)(1+\gamma_5)\gamma_\mu(-\gamma p+mc)(1+\gamma_5)\gamma_\sigma]$$

$$\times\delta(p^2+m^2c^2)\delta(q^2)\delta(P-P'-p-q)\frac{d^4pd^4q}{(2\pi\hbar)^6}.$$

Trace を計算するのに (7.19) の交換関係により,

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma=-\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\sigma-2\delta_{\mu\nu}\gamma_\lambda\gamma_\sigma=\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma-2\delta_{\mu\nu}\gamma_\lambda\gamma_\sigma+2\delta_{\lambda\mu}\gamma_\nu\gamma_\sigma$$

$$=-\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma_\mu-2\delta_{\mu\nu}\gamma_\lambda\gamma_\sigma+2\delta_{\lambda\mu}\gamma_\nu\gamma_\sigma-2\delta_{\mu\sigma}\gamma_\nu\gamma_\lambda.$$

この両辺の Trace をとり, $T_r\{\gamma_\mu(\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma)\}=T_r\{(\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma)\gamma_\mu\}$ および $T_r(\gamma_\mu\gamma_\nu)=-4\delta_{\mu\nu}$ を使うと, $T_r(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma)=8(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})$.

また, $T_r(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma_5)=4i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma},\quad T_r(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda)=0$

も導くことができる. $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ は完全反対称テンソルである. これらより,

$$T_r(-\gamma P+Mc)(1+\lambda^*\gamma_5)\gamma_\mu(-\gamma P'+Mc)(1+\lambda\gamma_5)\gamma_\sigma$$

$$=4(1+|\lambda|^2)(P_\mu P_\sigma'+P_\sigma P_\mu'-(PP')\delta_{\mu\sigma})-4(1-|\lambda|^2)M^2c^2\delta_{\mu\sigma}+8\,\mathrm{Re}\,\lambda P_\lambda P_\nu'\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma},$$

$$T_r(-\gamma q)(1+\gamma_5)\gamma_\mu(-\gamma p+mc)(1+\gamma_5)\gamma_\sigma$$

$$=8(q_\mu p_\sigma+p_\mu q_\sigma-(pq)\delta_{\mu\sigma})+8q_\lambda p_\nu\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}.$$

この二つの積は,

$$T_r[\quad]T_r[\quad]=64(1+|\lambda|^2)\{(Pp)(P'q)+(Pq)(P'q)+(Pq)(P'p)\}$$

$$+64(1-|\lambda|^2)M^2c^2(pq)+128\,\mathrm{Re}\,\lambda\{(Pq)(P'p)-(Pp)(P'q)\}.$$

陽子の受ける反跳は極めて小さいので $P'=P=(0, Mc)$ とすれば,

$$T_r[\quad]T_r[\quad]=64(1+3|\lambda|^2)cEq+64(1-|\lambda|^2)\boldsymbol{p}qc^2.$$

ただし, $p_\mu=(\boldsymbol{p}, E/c)$, $q_\mu=(\boldsymbol{q}, q)$ である.

つぎに P', p, q についての積分を行なう. まず $d\boldsymbol{P}'$ で積分すると $\delta^3(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}'-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$ $(\boldsymbol{P}=0)$ により $\boldsymbol{P}'$ が決まるが, これは小さいので無視できる. $\delta(P'^2+M^2c^2)=(1/2Mc)\delta(P_0'-Mc)$ より,

$$\int\delta(P'^2+M^2c^2)\delta^3(\boldsymbol{P}'+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})d^4P'=\frac{1}{2Mc}.$$

また $\delta(P_0-P_0'-p_0-q_0)=\delta(M_nc-M_pc-(E/c)-q)$ により E を与えると q が決まる. $qc=E_0-E$. エネルギーが決まると δ 関数により運動量が決まる. $(p=|\boldsymbol{p}|)$.

$$\int\delta(p^2+m^2c^2)d^4p=\frac{1}{2c}pd\Omega dE,\ \int\delta(q^2)\delta(P_0-P_0'-p_0-q_0)\,d^4q=\frac{1}{2}qd\Omega_\nu.$$

これを集めると (12.33) が得られる.

[12.3] (12.33) を ν の方向 $d\Omega_\nu$ で積分すると pq の項は消え，残りに 4π が掛けられる．次に e の方向 $d\Omega$ で積分し，さらに 4π が掛かる．dE で積分し (12.39) の f を用いれば，$w=\dfrac{1}{\tau}=\dfrac{m_e{}^5c^4g_{F1}{}^2}{2\pi^3\hbar^7}(1+3|\lambda|^2)f(1,E_0)$ が得られる．ただし (12.39) の F は 1 で，

$$f(1,E_0)=\int_{m_ec^2}^{E_0}pE(E_0-E)^2dE/m_e{}^5c^9.$$

あるいは積分変数を運動量 p に変換し，$p=mc\eta$ とすると，

$$f(1,E_0)=\int_0^{\eta_0}(\sqrt{1+\eta_0{}^2}-\sqrt{1+\eta^2})^2\eta^2d\eta$$
$$=-\frac{1}{4}\eta_0-\frac{1}{12}\eta_0{}^3+\frac{1}{30}\eta_0{}^5+\frac{1}{4}\sqrt{1+\eta_0{}^4}\log(\eta_0+\sqrt{1+\eta_0{}^2}),$$
$$\sqrt{1+\eta_0{}^2}=E_0/m_ec^2.$$

実際の数値 $E_0=1.29\,\mathrm{MeV}$ を入れると $f(1,E_0)=1.27$ となる．

[12.4] Dirac 方程式 $(i\gamma_\mu\partial_\mu-mc)\psi=0,\quad -i\partial_\mu\bar\psi\gamma_\mu-mc\bar\psi=0$ より $\partial_\mu(\bar\psi\gamma_\mu\psi)=0,\ \partial_\mu(\bar\psi\tau_3\gamma_\mu\psi)=0$ が導かれる．全荷電 $(1/c)\int J_0d\boldsymbol{r}$ が陽子に対して e，中性子に対して 0 になるように係数を決めると，核子の電流は $(ec/2)\bar\psi(1+\tau_3)\gamma_\mu\psi$ で与えられる．中間子の電流は (6.95) の e 倍である．核子と中間子の間に相互作用が働き，変換が起こるときはおのおのの電流は別々には保存されず，その和

$$J_\mu=ec\left\{\bar\psi\frac{1+\tau_3}{2}\gamma_\mu\psi-\frac{1}{c\hbar}[\boldsymbol{\varphi}\times\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}]_3\right\}$$

が保存される電流である．ただし，

$$[\boldsymbol{\varphi}\times\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}]_3=\varphi_1\partial_\mu\varphi_2-\varphi_2\partial_\mu\varphi_1=i(\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi-\partial_\mu\varphi^\dagger\varphi)$$

である ((10.27) 参照).

$c\bar\psi\gamma_\mu\psi$ は核子数を与える保存流で，中間子との相互作用があっても（核子数は変らないので）保存される．この半分を上の J_μ から引いた（ただし結果を ec で割ってある），

$$J_\mu{}^3=\frac{1}{2}\bar\psi\tau_3\gamma_\mu\psi-\frac{1}{c\hbar}[\boldsymbol{\varphi}\times\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}]_3$$

も保存流である．これは荷電空間のベクトルの第 3 成分であり，相互作用が荷電不変ならばその第 1，第 2 成分 $J_\mu{}^1$, $J_\mu{}^2$ も保存流である．特に $(J_\mu{}^1+iJ_\mu{}^2)/2$ は，

$$J_\mu{}^+=\frac{1}{2}\bar\psi\tau_+\gamma_\mu\psi-\frac{1}{c\hbar}[\varphi\times\partial_\mu\varphi]_+.$$

ただし τ_+ は (10.19) で与えられ，

$$[\varphi\times\partial_\mu\varphi]_+=\frac{1}{2}([\ ]_1+i[\ ]_2)=\frac{i}{\sqrt{2}}(\varphi_3\partial_\mu\varphi^\dagger-\partial_\mu\varphi_3\varphi^\dagger).$$

$J_\mu{}^+$ に適当な係数を掛け，反跳を受けない中性子 → 陽子変換に対し $\langle p|J_0|n\rangle=g$ にな

るようにすると，

$$J_\mu = g\left\{\bar{\psi}\tau_+\gamma_\mu\psi - \frac{2}{c\hbar}[\varphi\times\partial_\mu\varphi]_+\right\}.$$

反跳を受けない場合は $\langle p|J_0|n\rangle = g$, $\langle\pi^0|J_0|\pi^-\rangle = \sqrt{2}g$ である（368 ページ参照）. 同様に $\langle\pi^+|J_0|\pi^0\rangle = -\sqrt{2}g$. このときに中性子の β 崩壊の能力は中性子の構造には無関係に一定であることを示そう. 中性子は次のようにいろいろの状態の重ね合わせである.

$$\|n\rangle = a|n\rangle + \frac{b}{\sqrt{3}}(|n\pi^0\rangle - \sqrt{2}\,|p\pi^-\rangle) + \cdots,\quad |a|^2 + |b|^2 + \cdots = 1.$$

荷電不変性により $I = 1/2$ であるため，$|n\pi^0\rangle$ と $|p\pi^-\rangle$ は 1 対 $-\sqrt{2}$ の割合いで混っている (10.38). 同様に，

$$\|p\rangle = a|p\rangle + \frac{b}{\sqrt{3}}(-|p\pi^0\rangle - \sqrt{2}\,|n\pi^+\rangle) + \cdots.$$

これらより，

$$\langle p\|J_0\|n\rangle = g|a|^2 + \frac{|b|^2}{3}(-g + 2g + 2g) + \cdots = g(|a|^2 + |b|^2 + \cdots) = g.$$

〔12.5〕 (10.37) により，

$$f_- = \langle n\pi^-|H'|\Sigma^-\rangle = \left\langle\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\|H'|\Sigma^-\rangle,\ \sqrt{2}\ f_0 - f_+ = \sqrt{3}\left\langle\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\|H'|\Sigma^+\rangle.$$

相互作用 H' は $\Delta S = 1$, $\Delta I_3 = -1/2$, $\Delta I = 1/2$ で K^0 と同じ変換性を持つ. 荷電空間の回転に対しては K^0 は n, Σ は π と同じ変換性を持つから，(10.39) により，

$$|K^0\Sigma^-\rangle = \left\|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle,\quad |K^0\Sigma^+\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}\left\|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle.$$

これより，
$$\left\langle\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\|H'|\Sigma^+\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}\left\langle\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\|H'|\Sigma^-\rangle,$$

$$f_+ - \sqrt{2}f_0 = f_-$$

が得られる.

〔12.6〕 Λ のスピン方向を z 軸，陽子の進行方向が xz 面内にあるように座標軸をとる. (12.63) より波動関数は ($\varphi = 0$),

$$\psi^+ = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\{(c_0 - c_1\cos\theta)_+ u + c_1\sin\theta u_-\}.$$

この状態で σ_y の平均値は，

$$\langle\psi^+\sigma_y\psi^+\rangle = \frac{i}{4\pi}\{c_1{}^*\sin\theta(c_0 - c_1\cos\theta) - (c_0{}^* - c_1{}^*\cos\theta)c_1\sin\theta\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sin\theta i(c_1{}^*c_0 - c_0{}^*c_1) = -\frac{\sin\theta}{4\pi}\beta.\quad \text{((12.78) による)}$$

一方，この方向に進む粒子数は (12.66) の α を用いて，

$$\langle\psi^+\psi^+\rangle = \frac{1}{4\pi}\{|c_0 - c_1\cos\theta|^2 + |c_1|^2\} = \frac{1}{4\pi}\{1 - \alpha\cos\theta\}.$$

したがって，$\langle\sigma_\perp\rangle = -\beta\dfrac{\sin\theta}{1 - \alpha\cos\theta}.$

[12.7] K_0, $\bar{K}_0$ が物質中を進む時，散乱による位相の変化は問題 10.8 と同じようにして求められる．K中間子の波数を k，1 cm³ 中の原子の数を $N(=N_0\rho/A$，N_0 は Avogadro 数）とし，

$$n=1+\frac{2\pi N}{k^2}f,\ \bar{n}=1+\frac{2\pi N}{k^2}\bar{f},$$

とすれば K_0 が dx だけ進む時 $inkdx$ だけ位相がずれる．一方 K_1, K_2 は時間と共に (12.92) のように変化する．したがって ($v=dx/dt$).

$$\frac{d}{dx}|K^0\rangle=ink|K^0\rangle-\frac{1}{v\sqrt{2}}\left\{\left(i\frac{E_1}{\hbar}+\frac{1}{2\gamma\tau_1}\right)|K_1{}^0\rangle+\left(i\frac{E_2}{\hbar}+\frac{1}{2\gamma\tau_2}\right)|K_2{}^0\rangle\right\},$$

$$\frac{d}{dx}|\bar{K}^0\rangle=i\bar{n}k|\bar{K}^0\rangle-\frac{1}{v\sqrt{2}}\left\{\left(i\frac{E_1}{\hbar}+\frac{1}{2\gamma\tau_1}\right)|K_1{}^0\rangle-\left(i\frac{E_2}{\hbar}+\frac{1}{2\gamma\tau_2}\right)|K_2{}^0\rangle\right\}.$$

あるいは，$n_\pm=(n\pm\bar{n})/2$ として，

$$\frac{d}{dx}|K_1{}^0\rangle=\left\{in_+k-\frac{1}{v}\left(i\frac{E_1}{\hbar}+\frac{1}{2\gamma\tau_1}\right)\right\}|K_1{}^0\rangle+in_-k|K_2{}^0\rangle,$$

$$\frac{d}{dx}|K_2{}^0\rangle=in_-k|K_1{}^0\rangle+\left\{in_+k-\frac{1}{v}\left(i\frac{E_2}{\hbar}+\frac{1}{2\gamma\tau_2}\right)\right\}|K_2{}^0\rangle.$$

これを解けば一般解は a, b を定数として，

$$|K_1{}^0\rangle=ae^{q_1x}-bRe^{q_2x},$$

$$|K_2\rangle=aRe^{q_1x}+be^{q_2x},$$

$$q_1=q+\Delta,\ q_2=q-\Delta,$$

$$q=\frac{1}{2}\left[i(n+\bar{n})k-\frac{1}{v}\left\{i\frac{E_1+E_2}{\hbar}+\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)\right\}\right],$$

$$\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{v^2}\left\{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}+\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)\right\}^2-(n-\bar{n})^2k^2},$$

$$R=\frac{1}{i(n-\bar{n})k}\left[\frac{1}{v}\left\{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}+\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)\right\}+2\Delta\right].$$

$x=0$ で $|K^0\rangle=1$, $|\bar{K}^0\rangle=0$, したがって $|K_1{}^0\rangle=|K_2{}^0\rangle=1/\sqrt{2}$ とすれば，物質中を l cm 進んだとき ($x=l$),

$$|K_1{}^0\rangle=\frac{1+R}{\sqrt{2}(1+R^2)}e^{q_1l}+\frac{R^2-R}{\sqrt{2}(1+R^2)}e^{q_2l},$$

$$|K_2{}^0\rangle=\frac{R+R^2}{\sqrt{2}(1+R^2)}e^{q_1l}+\frac{1-R}{\sqrt{2}(1+R^2)}e^{q_2l},$$

$$|K^0\rangle=\frac{(1+R)^2}{2(1+R^2)}e^{q_1l}+\frac{(1-R)^2}{2(1+R^2)}e^{q_2l},$$

$$|\bar{K}^0\rangle=\frac{1-R^2}{2(1+R^2)}e^{q_1l}+\frac{R^2-1}{2(1+R^2)}e^{q_2l}.$$

中間子の数はこれらの絶対値の2乗である．

[12.8] 入射する電子，ニュートリノのエネルギー・運動量ベクトルを p, q, 出ていくのを p', q' とすれば，(9.138) により，

$$w=(2\pi)^4L^3\frac{\hbar^2}{c}\frac{g_F{}^2}{2}\int\delta_1(p'+q'-p'q)$$
$$\times\bar{\psi}(p)(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi(q')\bar{\psi}(q)(1+\gamma_5)\gamma_\mu\psi(p')\bar{\psi}(p')(1+\gamma_5)\gamma_\nu\psi(q)\bar{\psi}(q')$$
$$\times(1+\gamma_5)\gamma_\nu\psi(p).$$

この式で $\psi(q')\bar{\psi}(q')$, $\psi(p')\bar{\psi}(p')$ に (9.139), $\bar{\psi}(p)\psi(p)$, $\bar{\psi}(q)\psi(q)$ に (9.143) の置き換えをする. まず γ 行列の計算をする. 問題 12.2 と同じようにして,

$$T_r(-\gamma p+mc)(1+\gamma_5)\gamma_\mu(-\gamma q')(1+\gamma_5)\gamma_\nu=2T_r(\gamma p)(1+\gamma_5)\gamma_\mu(\gamma q')\gamma_\nu$$
$$=8\{p_\mu q_\nu'+p_\nu q_\mu'-\delta_{\mu\nu}(pq')\}+8i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}p_\lambda q_\sigma'.$$

ただし, (pq') は内積 $p_\mu q_\mu'$ で, $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ は完全反対称テンソルである.

$$T_r\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma_5=4i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}.$$

同様に, $T_r(-\gamma q)(1+\gamma_5)\gamma_\mu(-\gamma p'+mc)(1+\gamma_5)\gamma_\nu=8\{q_\mu P_\nu'+q_\nu p_\mu'-\delta_{\mu\nu}(p'q)\}$ $+8i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}q_\lambda p_\sigma'$. この 2 個の T_r の積は 256 $(pq)(p'q')$ となる.

この結果を w に入れ, $4cBL^3$ で割れば断面積が得られる.

$$\sigma=\frac{g_F{}^2}{2(2\pi)^2\hbar^4}\frac{16}{c^2B}\int(pq)(p'q')\delta(p'+q'-p-q)\delta(q'^2)\delta(p'^2+m^2c^2)d^4p'd^4q'.$$

重心系をとり $p=(\boldsymbol{k},p_0)$, $q=(-\boldsymbol{k},E/c)$, $|\boldsymbol{k}|=k=E/c$, $p'=(\boldsymbol{k}',p_0)$, $q'=(-\boldsymbol{k}',E/c)$, $p+q=(0,W/c)$ とすれば, $(pq)-(p'q')=p_0E/c+k^2=EW/c^2$. p',q' についての積分は 251 ページと同じで, $cB=kW$ により,

$$\sigma=\frac{2g_F{}^2}{\pi^2\hbar^4ckW}\int(pq)(p'q')\frac{1}{2k}\frac{c}{2W}kd\Omega=\frac{2}{\pi}\left(\frac{g_F}{\hbar^2c^2}\right)^2E^2.$$

索　引

L

M

N

Y

Z

著者略歴

武田　暁：1924年東京都出身　旧制東京高校，東大理学部物理学科卒（1946年），東大大学院を了し，神戸大学理学部助教授，東大教授（原子核研究所長），現在東北大理学部教授，その間，米国ウイスコンシン大学，ブルックヘブン研究所，カリフォルニア大学ローレンス研究所にて研究，理博，主な著述「原子核破壊」（コロナ社），その他共著3編

宮沢弘成：1927年東京都出身　旧制東京高校，東大理学部物理学科卒（1950年），東大大学院を了し，東大理学部助教授を経て現在東大理学部教授，その間，米国プリンストン高級研究所員，シカゴ大学客員教授，理博

素粒子物理学　　**定価 1300 円**

昭和40年2月1日　第1版印刷
昭和40年2月5日　第1版発行©
昭和45年4月20日　修正第4版発行

著作者の了解により検印を省略いたします

著作者　武田　暁（たけだ ぎょう）
　　　　宮沢弘成（みやざわ ひろなり）

発行者　安孫子貞次

発行所　東京都千代田区四番町8番地
電話　東京　262-9166～8
合名会社　裳華房

印刷所　東京都墨田区亀沢1－9－14
横山印刷株式会社

製本所　東京都千代田区神田錦町3－13
牧製本印刷株式会社